A derivada

Praciano-Pereira, Tarcisio *

Sobral Matemática
24 de dezembro de 2018
tarcisio@sobralmatematica.org
préprints da Sobral Matemática
no. 2018.07
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

*tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

A derivada cria um modelo de função linear afim tangente ao gráfico de uma dada função f e se isto for possível, digo que f é diferenciável. É interessante observar que derivada implícita fornece uma visão ampliada da derivada tornando sua interpretação geométrica mais clara. Vou usar a derivada implícita nesta monografia mostrando o seu efeito didático. Termino com um caso particular e essencial para compreender o significado de primitivas de funções multivariadas com aplicação de dois teoremas, de Green e de Cauchy.

palavras chave: derivada, derivada implícita, função linear afim tangente, teorema de Cauchy, teorema de Green.

The derivative produces a model of an affine linear function tangent to the graphic of a given function f if this is possible we say that f is a differentiable function. The implicit differentiation is a kind of method to produce the derivative and it is interesting to observe that it helps to create the intuition about the linear object which is tangent. To finish I will consider two particular cases which describe what are the possible primitives of functions of several variables and an application of two fundamental theorems, Green's theorem and Cauchy's theorem.

keywords: Cauchy's theorem, derivative, Green's theorem , implicit derivative, tangent linear manifold.

Para construir uma monografia pequena objetivando o conceito de derivada, eu pensei que seria mais interessante colocar-me na situação de um segundo curso de Cálculo portanto considerando o público senhor dos assuntos *limite*, *derivada de uma função univariada.*
O projeto do trabalho é então o seguinte:

1. A derivada implícita de uma função multivariada.

2. O plano tangente, gradiente, curva de nível e extremo.

3. A fórmula de Taylor.

4. A intrigante situação das primitivas dos campos vetoriais, e quem responde a esta questão são dois teoremas fundamentais, o teorema de Green que decide quando uma equação diferencial é exata, e o teorema de Cauchy que resolve as equações de Cauchy-Riemann.

Desta forma vou definir derivada num contexto mais avançado o que vai me permitir construir um texto mais divertido para a leitora, e desta forma também posso ter um horizonte mais amplo para as aplicações.
Para me restringir ao contexto do Cálculo vou tratar de derivada de funções reais de variável vetorial deixando de fora as funções vetoriais.
Certamente a leitora entendida do assunto vai encontrar alguns conceitos que lhe são caros e que eu terei deixado de lado, mas seria um grave risco tentar colocar toda a riqueza de conceitos e aplicações da derivada num texto necessariamente limitado como este. Tenho que otimizar dentro dos limites impostos.

1 Derivada implícita de $w = F(x, y, z)$

A expressão $w = F(x, y, z)$ representa um objeto de dimensão três, uma regra prática para calcular a *dimensão* é contar o número de variáveis envolvidas na expressão e subtrair uma unidade. É um objeto de dimensão três imerso dentro de um espaço de dimensão 4. A partir da dimensão 3, inclusive, a nossa linguagem geométrica reflete a nossa *prisão tridimensional* e já não temos vocabulário apropriado para nos referirmos aos objetos. O conceito de variedade veio aos poucos solucionar este problema linguístico.

$w = F(x, y, z)$ é uma *variedade* de dimensão três imersa numa variedade linear (espaço vetorial) de dimensão quatro.

Calcular a *derivada implícita* de $w = F(x, y, z)$ significa escrever uma combinação linear de quatro variáveis cujas notações tradicionais são dx, dy, dz, dw usando como coeficientes as novas funções

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, 1$$

todas funções das três variáveis (x, y, z):

$$dw = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$w - d = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} \tag{2}$$

em que na equação (1.2) as "*derivadas parciais*" estão calculadas no ponto (a, b, c), portanto representam agora números e substitui as variáveis dw, dz, dy, dx por diferenças envolvendo as coordenadas do ponto (a, b, c, d).

Isto é uma definição! O que posso agora fazer é mostrar que esta definição generaliza, dando continuidade para dimensões maiores do que 1, aquilo que foi feito no Cálculo a uma variável e que ela é o modelo que produz uma variedade linear tangente ao gráfico de uma função derivável. Vou passar a fazer isto.

No caso univariado, consideremos a equação de uma função linear afim

$$y - b = m(x - a) \tag{3}$$

e como desejo que ela seja tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a)) = (a, b)$, supondo que f seja derivável, tenho que impor as duas condições, $b = f(a); m = f'(a)$; a esta equação resultando na equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a); b = f(a); m = f'(a); \tag{4}$$

Se derivarmos implicitamente y = f(x) vamos obter

$$dy = f'(x)dx \tag{5}$$

e se substituirmos as variáveis dx, dy por diferenças chegamos a equação da reta tangente acima descrita e então vemos como o modelo funciona:

1. derivamos todas as sobrepressões, relativamente a todas as variáveis;
2. substituímos as variáveis dy, dx pelas diferenças y-b, x-a, respectivamente;
3. substituímos a variável x pelo valor no ponto em que desejamos a variedade linear tangente.

O resultado é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Funciona exatamente assim para qualquer número de variáveis e se as variáveis forem em número maior do que 1 aparecem as derivadas parciais, que é uma denominação que mostra que houve um tempo em que os nossos antepassados entendiam mal a derivada porque na verdade a derivada é a jacobiana e não as "derivadas parciais", estas são as entradas da matriz jacobiana, a derivada.

Obviamente que ninguém pensa em alterar as denominações caso contrário criarmos uma linguagem incompatível com a Matemática escrita nos últimos quatro séculos o que seria no mínimo uma ruptura cultural.

Mas temos que compreender que há um linguajar desencontrado sendo preciso ser leal com as alunas para que elas consigam entender os desencontros linguísticos de uma disciplina "sem erros" que é a Matemática, este produto do cérebro humano.

O produto de uma matriz por um vetor é uma combinação linear e eis a razão de ser a derivada implícita uma combinação linear. Ela aparece muitas vezes nos livros associada a um número chamado de *diferencial total*.

Os tópicos a desenvolver na próxima seção:

- O plano e suas derivadas parciais
- A variedade linear tangente, e o conceito de aproximação linear.
- O conceito de *variedade* vai *aparecer* no texto com o uso de sinônimos numa tentativa de repassar para a leitora o seu significado sem tentar definir que me levaria para longe do limite do monografia.
- O plano tangente, um vetor perpendicular

2 Variedade de nível e gradiente, extremos

Na equação da reta A(x-a) + B(y-b) = 0 identifico um produto escalar de (A,B) por (x-a, y-b) então o vetor (A,B) é perpendicular a esta reta.

De forma análoga A(x-a) + B(y-b) + C(z -c) = 0 é um plano que passa no ponto (a,b,c) e é perpendicular ao vetor (A,B,C).

Se F for derivável a equação da variedade linear tangente, como já fiz referência anteriormente, é

$$w - d = \frac{\partial F}{\partial x}(x-a) \quad \tfrac{\partial F}{\partial y}(y-b) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(z-c) \tag{6}$$

onde eu identifico o *vetor formal*

$$grad(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\right) \tag{7}$$

que, se for calculado no ponto (a,b,c) produz um *vetor que é perpendicular* à variedade linear tangente ao gráfico de F no ponto

$$(a,b,c,d); d = F(a,b,c)$$

e por definição, então perpendicular ao gráfico de F no referido ponto.

É interessante perguntar-se o que acontece quando se faz a interseção da variedade $w = F(x,y,z)$ com o gráfico da função constante $w = k$. Claro, primeiro que tudo tenho que admitir a hipótese de que isto seja possível, e mais do que isto de que posso encontrar uma solução:

$$k = F(a, b, c); (a, b, c, k); \tag{8}$$

Se a solução existir, uma varredura de um retângulo conveniente pode encontrar uma solução aproximada para esta equação portanto posso prosseguir sob a hipótese de que seja possível encontrar uma solução e *soluções aproximadas* são, em geral, as únicas *soluções* que é possível encontrar.

Se eu calcular a derivada implícita de $k = F(x, y, z)$, como k é uma constante, o resultado será

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \tag{9}$$

que posso usar como o modelo para produzir a variedade linear tangente no ponto (a,b,c)

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) \tag{10}$$

e novamente se vê que o gradiente é perpendicular a uma variedade de dimensão imediatamente menor: dimensão 2, neste caso. É uma variedade que surge associada à altura k que os engenheiros introduziram na Matemática como "curvas de nível" no caso bivariado, e que vou chamar de variedade de nível k. Neste contexto se tem uma linguagem geométrica que é interessante associar: superfícies de nível. E o gradiente é perpendicular às superfícies de nível. Como elas representam as regiões do espaço onde não há *crescimento visível*, porque somos *prisioneiros da terceira dimensão*, vemos que o gradiente, que é perpendicular a elas aponta nas direções onde há crescimento (ou decrescimento) otimizado. São as direções em *busca dos extremos* das funções.

Procure o *gradiente* num ponto duma variedade e você poderá assim perceber qual é a *direção de fuga* para a próxima dimensão do espaço. . . .

Os conceitos *curva de nível* e *superfície de nível* são generalizados pelo conceito de *variedade de nível.*

Em otimização isto é usado para construir um algoritmo para determinação de máximos ou mínimos de funções, é o chamado método do gradiente.

3 A fórmula de Taylor

Vou construir um polinômio que aproxima o gráfico de uma função num determinado ponto.

A figura (1) página 5, mostra um satélite em órbita e agora eu vou acrescentar mais um *personagem*, um foguete e a sua trajetória com um objetivo bem especifico. A trajetória dum foguete e meu objetivo é discutir em as condições para fazer uma acoplagem do foguete com o satélite, por exemplo a Estação Espacial Internacional e um foguete que vai visitá-la levando víveres ou para fazer

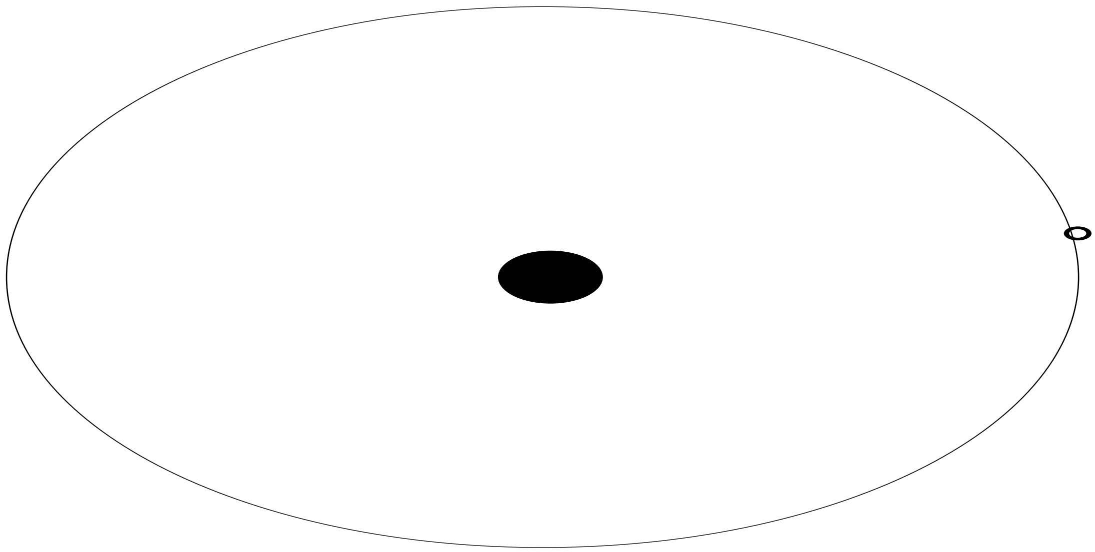


Figura 1: Estação Espacial Internacional

uma troca de pessoal. Vou usar este exemplo como motivação para a construção teórica que dá nome a esta seção.

Primeiro que tudo a observação de que a solução deste problema foge ao contexto do Cálculo sendo necessário deixar isto claro para não criar falsas expectativas. É um problema de equações diferenciais envolvendo algoritmos computacionais para sua solução, entretanto a questão não pode ser resolvida mais a frente se não pudermos contar com as ferramentas do Cálculo e a experiência ganha neste disciplina para serem aplicadas mais além. Isto justifica que o exemplo possa ser considerado mesmo com o risco de que a leitora fique com a impressão de que eu terei parado exatamente onde deveria ter continuado.

A equação da reta tangente já foi um primeiro exemplo desta questão, um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é tangente ao gráfico de f. Agora queremos obter um polinômio do grau n que seja tangente ao gráfico de f e vamos construir as hipótese para que isto possa ser feito.

Retomando o problema espacial as condições necessárias para o acoplamento do foguete à estação são:

- Que no momento t_0 o foguete e a estação espacial se encontrem no mesmo local em que também esteja. É o que vou estipular sob forma de equação como: $f(a) = P(a)$ em que P é o polinômio procurado, representando a trajetória do foguete, e f representa, nesta história, a órbita onde trafega a estação espacial;

- que o foguete chegue momento t_0 com a mesma velocidade, derivada do movimento, que a estação, que vou estipular sob forma da equação: $f'(a) = P'(a)$;

- que o foguete chegue momento t_0 com a mesma aceleração, segunda derivada do movimento, que a estação, que vou estipular sob forma da equação: $f''(a) = P''(a)$;

3.1 o valor do erro

Vou apresentar nesta seção a *fórmula de Taylor* da mesma forma como eu habitualmente a apresento quando dou uma aula sobre o assunto. Primeiro vou apresentá-la com um erro que é intuitivo e esperado, em seguida vou corrigir o erro mostrando que existem nuances escondidas nas equações matemáticas que somente podem ser descobertas com uma análise matemática mais detalhada. Mas o erro serve para evidenciar a importância da forma correta e isto mostra o quanto é *importante errar-se*!

O *polinômio de Taylor* é um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico duma função diferenciável.

O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico duma função num ponto dado, confira o gráfico na figura (fig. 2), página 6.

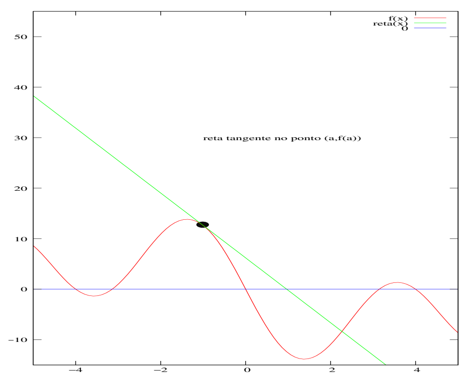


Figura 2:

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transformar sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \tag{11}$$
$$y = f(a) + m(x - a); \tag{12}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \tag{13}$$

A equação (eq.11) é a da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular m, e cheguei, na equação (eq.13) à equação que passa no ponto $(a, f(a))$ com coeficiente angular $f'(a)$.

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque corpo ejectado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda "livre"*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesmas transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

uma pedra rodando presa a um cordão

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{14}$$
$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{15}$$
$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{16}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{17}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \tag{18}$$

e na equação (eq.18) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.14) (eq.18) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor às condições

- de tangência e
- cópia da aceleração

no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2; \tag{19}$$
$$P(a) = a_0 = f(a); \tag{20}$$
$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a); \tag{21}$$
$$P'(a) = a_1 = f'(a); \tag{22}$$
$$P''(x) = 2a_2; \tag{23}$$
$$P''(a) = 2a_2 = f''(a) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{f''(a)}{2}; \tag{24}$$
$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2; \tag{25}$$

e você tem na equação (eq.25) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se tenha desprendido do seu carregador no ponto $(a, f(a))$, partindo do ponto $(a, f(a))$, copiando a velocidade $f'(a)$ e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora, um pique de aceleração, $f''(a)$ que lhe tenha sido dada no momento do lançamento.

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x-a)^3 \tag{26}$$

deduzindo direto da equação (eq.25).

Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \tag{27}$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou pode estar errado!

Neste segundo caso não há erro, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \tfrac{f(a)}{1} + \tfrac{f'(a)}{1}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \tag{28}$$
$$P(x) = \tfrac{f(a)}{0!} + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3; \tag{29}$$

Você pode encontrar na página [8, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com gnuplot. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem n, conhecidas, num ponto $x = a$ é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots a_n(x-a)^n \tag{30}$$

com $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} P(a) = & f(a) & \Rightarrow & a_0 = f(a); \\ P'(a) = & f'(a) & \Rightarrow & a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = & f^{(k)}(a) & \Rightarrow & a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{cases} \tag{31}$$

Como $0! = 1!$ e $2! = 2$ então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k; \tag{32}$$

Há dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *cosseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \tag{33}$$

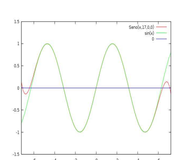
$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \tag{34}$$

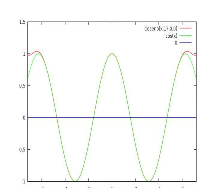
em que foi usado `if-else`-compacto, com a sintaxe da linguagem `C`, e o símbolo %, em `C`, é a função congruência módulo-2 resto dos inteiros na divisão por dois. Na equação (eq. 34), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{dsen(k)(0)}{k!} x^k; \tag{35}$$

$$P(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; n \geq 0; \tag{36}$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem, $a = 0$. O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.





Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são `Python` e em geral os dialetos da linguagem `LISP`. Não é necessário usar polinômios de grau muito alto, basta definir o *seno* ou o *cosseno*, usando a formula de Taylor módulo π. Por exemplo, com um polinômio de grau 17, a aproximação rivaliza com a que você pode obter numa calculadora científica.

Na figura (3.1) página 8, você pode ver os gráficos das funções seno e coseno definidas algoritmicamente dentro do `gnuplot` e de polinômios de Taylor de grau 17, do seno e do coseno no intervalo $[-6, 6]$, também usando a expressão algorítmica do cosseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, cosseno, no intervalo $[-6, 6]$.

Observe que isto é o suficiente para definir *seno, cosseno* para qualquer número real, algoritmicamente, usando a periodicidade.

4 Derivada parcial

Quando as funções têm *várias variáveis* se produz o conceito de *derivada parcial*. Este é um conceito defeituoso que os nossos antepassados incluíram no Cálculo e que representou durante muito tempo uma dificuldade de compreensão que somente foi eliminada a muito custo e decepção. Embora defeituoso, e até porque passou a fazer parte integrante da literatura, é praticamente impossível se reescrever o Cálculo sem passar por êle.

Quando uma função, F for multivariada, há derivadas "parciais" que podem ser calculadas relativamente a cada uma de suas variáveis considerando então as demais variáveis como constantes. Notações:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x \tag{37}$$

indica que a derivada foi calculada relativamente a variável $\underline{x}$ considerando as demais variáveis "constantes". É uma contradição difícil de resolver (a não ser com uma notação mais complicada e pouco usada, de multíndices), porque F_x é uma função das mesmas variáveis que F e o "x" que aparece na notação F_x é um índice. Oserve a forma grotesca que assume algumas vezes a "precisão da Matemaática":

$$F(x, y) = (x - 4)(y - 5); \tag{38}$$

$$F_x(x, y) = (y - 5); \tag{39}$$

$$(x, y) = (3, 4) \quad \Rightarrow \quad F_x(3, 4) = 4 - 5 = 1; \tag{40}$$

e uma aluna que estiver se iniciando no Cálculo tem que entender esta sequencia de cálculos como absolutamente lógica. Fica ainda melhor se a professora disser que na última equação acima não tem x.

Quando se calculam derivadas parciais se fala, "considerando as demais variáveis constantes", isto vale apenas para efeito do cálculo da derivada. Por exemplo, se

$$F(x, y, z) = x^2 + 2xyz + y^2 + z^3 \tag{41}$$

então

$$F_x(x, y, z) = 2x + 2yz; \; F_y(x, y, z) = 2xz + 2y; \; F_z(x, y, z) = 2xy + 3z^2; \tag{42}$$

que são, respectivamente as derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z); \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z); \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \tag{43}$$

A jacobiana é a *matriz funcional* das derivadas parciais.

A letra "x" que aparece no símbolo do operador derivada, é apenas um índice indicando relativamente a que variável a derivada foi calculada. Se eu quiser calcular o valor da derivada, por exemplo, no ponto $(-1,2,3)$ eu vou escrever:

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(-1,2,3) = 2x + 2yz|_{x=-1,y=2,z=3} \tag{44}$$

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(-1,2,3) = -2 + 12 = 10 \tag{45}$$

$$F_x(-1,2,3) = 10 \tag{46}$$

As derivadas parciais surgiram num tempo em que não se compreendia a *derivada como uma aplicação linear*, uma nova função, que tem como imagem, em cada ponto um *objeto linear tangente*. E mesmo esta frase está incompleta e a leitora deve ser crítica a respeito dela. Uma aplicação linear tem como conjunto de saída um espaço vetorial, entretanto, a derivada tem como conjunto de saída o mesmo domínio que a função F cuja derivada estamos calculando o que nos permitiria dizer que é uma *função linear defectiva*... se for possível estender a derivada a um espaço vetorial incluindo o domínio de F então a frase ficaria corrigida, teriamos uma autêntica *função linear*, entretanto, o espaço de chegada é formado de *objetos lineares*, é um conjunto de variedades lineares. A Geometria Diferencial conseguiu desenvolver uma linguagem adequada para a derivação introduzindo o conceito de *espaços tangentes*.

Assim,

- se $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ então
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{47}$$
é uma função
$$J(F) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2; \tag{48}$$
$$(a,b) \mapsto J(F)(a,b) = \left(\tfrac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}\tfrac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}\right) \tag{49}$$
uma matriz 2×2 como imagem de cada ponto (a,b) do domínio de F.

- se $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ então posso interpretar F como uma função que tem duas componentes, P,Q que são funções, cada uma delas, de duas variáveis tomando valores númericos: $P,Q : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ e como cada uma delas tem duas *derivadas parciais* então a função F terá quatro derivadas parciais:
$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)); \tag{50}$$
$$J(F) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4; \tag{51}$$
$$J(F)(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}|_{(a,b)} & \frac{\partial P}{\partial y}|_{(a,b)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}|_{(a,b)} & \frac{\partial Q}{\partial y}|_{(a,b)} \end{pmatrix} \tag{52}$$

A derivada é uma função de duas variáveis que tem em cada ponto do domínio uma imagem com quatro coordenadas. Cada uma destas coordenadas foi interpretada pelos matemáticos do século 19 como *derivada parcial* de F.

- De maneira mais genérica, mas tentando manter a notação simples, se $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ então

$$F(x,y) = (P_1(x_1,\dots,x_n)\dots,P_m(x_1,\dots,x_n))\,; \tag{53}$$

$$A = (a_1,\dots,a_n); \tag{54}$$

$$J(F)(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}|_A & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n}|_A \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial P_m}{\partial x_1}|_A & \cdots & \frac{\partial P_m}{\partial x_n}|_A \end{pmatrix} \tag{55}$$

em que você pode identificar na matriz, na última equação, que foram calculadas $n \times m$ entradas da matriz jacobiana, que é a derivada de F e cada uma dessas entradas foi calculada no ponto A tornando esta matriz uma matriz númerica de ordem $n \times m$ como o valor da derivada no ponto A. Os antigos não conseguiram ver que o valor da derivada num ponto com n coordenadas é uma matriz $n \times m$ e assim criaram o conceito de *derivada parcial*.

- Como uma matriz $n \times m$ representa uma transformação linear entre os espaços vetorais $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ então eu posso escrever os três casos anteriores de forma mais condensada num formato que fica pronto para a generalização do conceito de derivada como operador linear para espaços de dimensão não finita:

$$F : U \subset E \longrightarrow F; E, F \text{ espaços vetoriais;} \tag{56}$$

$$A \in U; J(F)(A) = D(F)(A) \in \mathcal{L}(E,F); \tag{57}$$

$$X \in U \subset E; F(X) \in F; J(F)(A) = D(F)(A) \in \mathcal{L}(E,F); \tag{58}$$

$$E = \mathbf{R}^n, F = \mathbf{R}^m \;\; \Rightarrow \;\; \mathcal{L}(E,F) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{nm}; \tag{59}$$

E você pode reconhecer na equação (eq.4.57) que estou fazendo referência ao que era uma matriz $n \times m$ e agora é uma função linear entre dois espaços vetoriais que é a tradução do símbolo $\mathcal{L}(E,F)$ relativamente aos dois espaços E, F.

Nas equações (eq.4.57) e (eq.4.58) estou usando o símbolo D para representar a derivada: $J(F)(A) = D(F)(A)$, porque não se costuma mais fazer referência à *jacobiana* quando se trata da derivada de funções definidas em espaços de dimensão não finita, e até se deveria manter esta terminologia e não fazê-lo representa um novo preconceito. . .

Quando os espaços vetoriais não forem de dimensão finita surgem diversos problemas para discutir a derivabilidade. Por exemplo, um dos casos mais simples, quando E, F forem espaços de sucessões que são as primeiras e relativamente mais simples generalização à dimensão infinita, as derivadas serão matrizes cujas linhas serão sucessões, portanto um novo tipo de sucessão, implicando na discussão sobre convergência de tais tipos de sucessões. Haverá derivada se houver convergência ... e neste ponto a teoria teve que adquirir uma nova linguagem para conter os problemas que estou aqui simplificando com o rótulo "*convergência*".

Mas agora deixe-me retornar aos casos em que a dimensão é pequena e mais ainda ao espaços $E = F = \mathbf{R}^2$ quando $F = (P, Q)$ que os físicos chamam de *campo vetorial* e também deixe-me adotar uma notação que vai me permitir uma linguagem mais direta para o meu objetivo imediato que é o *teorema de Green* que é o objetivo da próxima seção.

5 Compos conservativos

Vou fazer uma apresentação deste teorema, o teorema de Green, que é uma das peças mais importantes do Cálculo a várias variáveis não somente pelas suas aplicações como ele provavelmene surgiu nos estudos de eletricidade e magnetismo, mas também por ele descreve um segredo dos mais bem guardados do comportamento das funções multivariadas e que nem sempre é apontado com esta função. Você vai ver aqui que nem sempre uma função

$$F :\longrightarrow \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \tag{60}$$

pode ser uma derivada, ou ainda, que o conjunto de tais funções se dividem entre as que podem ser derivadas e as que não podem ser uma derivada. No Cálculo univariado, praticamente, toda função "*bem comportada*" é uma derivada. Agora, em duas variáveis, *bom comportamento* significa pouca coisa.

Este teorema é um dos resultados mais importantes do *Cálculo multivariado* junto com outros teoremas que podem ser considerados extensões ou complementações dele, como, por exemplo o *teorema de Stokes* e o *teorema da divergência de Gauss*. Não tenha dúvida que esta lista está longe de ser exaustiva.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável definido num domínio Ω do plano, então

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{61}$$

Na equação (eq.61), à esquerda, está uma *integral de linha* calculada sobre a fronteira, $\partial\Omega$ da região Ω, e segunda integral, à direita, é uma integral dupla, calculada sobre a região Ω, portanto entre as duas integrais há um salto de dimensão 1 como no teorema Fundamental do Cálculo sendo esta a razão que me leva sempre a dizer que o teorema de Green é uma extensão do *teorema Fundamental do Cálculo.*

O teorema de Green tem uma versão trivial pela qual vou começar e que serve para classificar os campos vetoriais que vou usar ao final na expressão do teorema. Vou apresentar esta redação no caso de campos vetoriais bivariados, $(x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbf{R}$ com o objetivo de manter a linguagem simples. Para obter o caso com mais variáveis, basta acrescentar mais "*coordenadas*" às derivadas mas com algum cuidado! Esta generalização pode ser obtida com uma *mudança de variável* via uma parametrização duma superfície no espaço de dimensão maior do que três.

Se F for um campo escalar, *uma função real de duas variáveis reais*, por exemplo, continuamente diferenciável, então, pelo teorema de *Schwarz-Clairaut*, as derivadas mistas serão iguais

$$J(F) = f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)); \tag{62}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y); \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y); \tag{63}$$

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}; \tag{64}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} = Q_x = P_y = F_{yx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \tag{65}$$

o que torna *nulas* as integrais na expressão

$$\int\int_{\Omega} (Q_x - P_y) dxdy = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 0; \tag{66}$$

Como posso calcular as primitivas de Q_x, P_y é possível deduzir, desta integral dupla, que a integral de linha, também nula,

$$\oint_{\partial\Omega} P_x dx + Q_y dy = 0 \tag{67}$$

em que agora o símbolo $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio Ω, e esta integral é também nula. Suponha que tem uma poligonal de lados paralelos aos eixos e use-a para passar da integral dupla para integral de linha, é um exercício relativamente simples.

Mas a razão pela qual a integral de linha na equação (eq.67) é nula se pode deduzir de forma independente da integração feita na equação (eq.66). Ela é a *integral de linha* sobre um caminho fechado, a fronteira do domínio Ω quer dizer, uma integral que sai do ponto P e retorna ao ponto P ao longo do caminho $\partial\Omega$. Como nesta construção inicial o integrando foi construído como derivada dum campo vetorial F então a integral de linha começando numa condição inicial $P \in \Omega$ define uma primitiva F associada à esta condição inicial P e então as integrais do tipo da equação (eq.67), sobre circuítos fechados, têm que ser nulas.

Esta é a formulação trivial do teorema de Green. Se eu alterar um pouquinho a notação vou obter a expressão comum nos livros de Cálculo.

$$P(x,y) = F_x(x,y);\ Q(x,y) = F_y(x,y); \tag{68}$$

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy \tag{69}$$

que é a expressão (trivial) do *teorema de Green* quando partimos de uma função diferenciável F, porque as duas integrais envolvidas são nulas:

- A *integral de linha* é nula porque o integrando é uma derivada e a curva $\partial\Omega$ liga um ponto P a si mesmo, uma curva fechada,
- A *integral dupla* é nula porque pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* da igualdade entre derivadas mistas.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável continuamente, sobre um domínio Ω qualquer, ainda vale o teorema de Green mas as integrais não precisam ser nulas. A integral de linha, por exemplo, separa os campos vetoriais em duas classes:

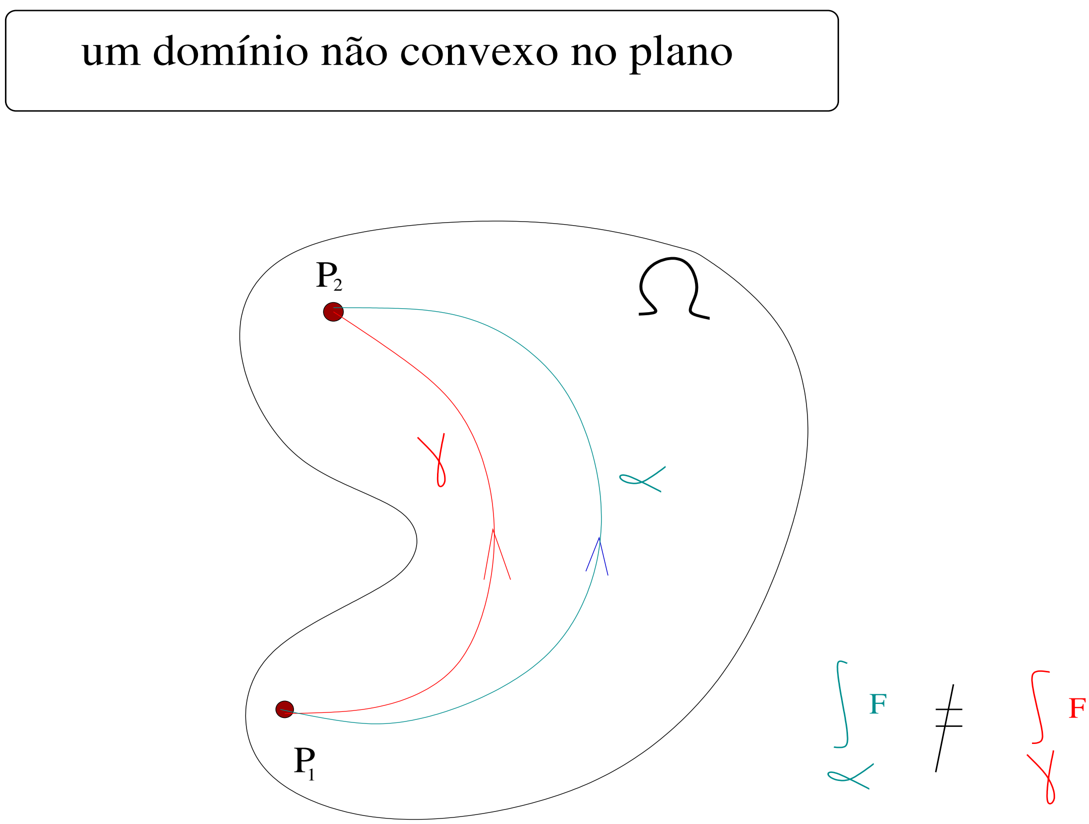


Figura 3:

- <u>*Campos conservativos*</u>, é o caso trivial, quando o campo vetorial é a derivada de um campo escalar. Então a integral de linha sobre qualquer curva fechada é zero, é uma aplicação direta do *teorema fundamental do Cálculo*.
- <u>*Campos não conservativos*</u>, quando houver uma curva fechada, fronteira de um domínio Ω sobre a qual a integral de linha na equação (69) é diferente de zero, mas ainda é igual a integral dupla.

o valor da integral de linha é então a perda (ou ganho) de energia que o campo escalar sofre ao longo da curva $\partial\Omega$. Neste caso o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva. Esta formulação permite ainda explicar dois tipos de integrais,

- <u>*integrais independentes do caminho*</u> aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{70}$$

  que são nulas sobre qualquer curva fechada. O campo escalar é conservativo, tem primitiva (vem da derivada de um campo escalar diferenciável).

- <u>*integrais que dependem do caminho*</u> aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{71}$$

  que podem ser "*não nulas*" sobre alguma curva fechada, mas não é necessário que sejam nulas.

  O campo escalar é não conservativo e não tem primitiva (não vem da derivada de um campo escalar diferenciável). Dizemos que integral depende do caminho porque, escolhidos dois caminhos entre dois pontos dados P_1, P_2, como se pode ver na figura (3) página 14, se o valor da integral sobre um dos caminhos, de P_1 até P_2 for diferente do valor da integral sobre o outro caminho, também de P_1 até P_2, podemos definir uma curva fechada, indo de P_1 até P_1, então a integral será diferente zero sobre esta curva fechada. Isto equivale a dizer-se que o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva, não é a derivada de um campo escalar.

Como um exemplo, considere a integral da expressão do teorema de Green quando Ω for uma região do plano, confira a figura (fig 4), página 16.

Nesta figura a união das curvas γ e $r\mathbf{S}^1$ isolam o $(0,0)$ no exterior da região $\Omega_r = \Omega - rU$, em rU é uma contração do disco unitário cuja fronteira é $r\mathbf{S}^1$. Chame de $\beta_r = -r\mathbf{S}^1 \cup \gamma$, a união destas duas curvas fechadas, devidamente orientadas para que $(0,0)$ esteja no exterior da região Ω_r.

Para orientar uma curva, considere um vetor tangente e um vetor perpendicular à curva no mesmo ponto com um ângulo positivo, $\frac{\pi}{2}$ entre eles. É a orientação positiva da curva. Oriente as duas fronteiras de modo que o vetor perpendicular aponte para a região limitada pelas curvas, como mostra a figura (fig 4).

Observe que não mencionei na descrição uma curva que aparece na figura (fig 4), ligando a curva γ e a curva $r\mathbf{S}^1$. Esta curva é um truque usado nas demonstrações, ela foi seguida duas vezes e em sentidos contrários, como indicam as setas apontando em direções opostas, portanto a integral de linha sobre esta curva é zero e não conta nos cálculos: *somei e subtrai*!

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right); \tag{72}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}; \tag{73}$$

$$\int\int_{\Omega_r} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0 = \oint_{\beta_r} Pdx + Qdy; \tag{74}$$

$$(P, Q) \text{ não é uma derivada} \quad \Rightarrow \quad (\exists\gamma)\ (\oint_{\gamma} Pdx + Qdy \neq 0); \tag{75}$$

A curva γ mencionada na equação (eq.75) tanto pode ser $\gamma = \partial\Omega$ como $r\mathbf{S}^1$ sobre as quais o valor da integral de linha coincide em módulo. Eu teria que demonstrar que pelo menos uma destas integrais é diferente de zero (porque as duas poderiam ser zero. . .):

$$I_r = \oint_{r\mathbf{S}^1} Pdx + Qdy = \tag{76}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} r\sin(t)d(r\cos(t))dt + r\cos(t)d(r\sin(t))dt \tag{77}$$

$$I_r = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi; \tag{78}$$

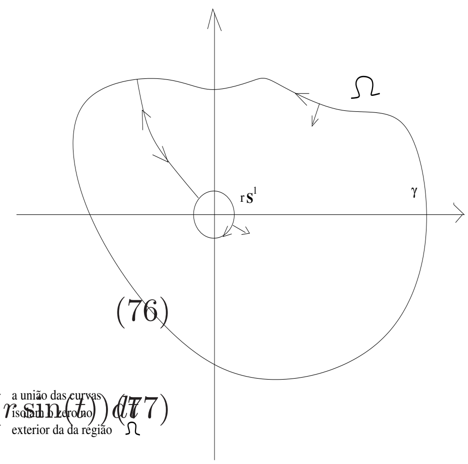


Figura 4:

Na equação (eq.77) tirei para fora da integral r^2 do denominador e lhe atribui sinal negativo porque ela está sendo calculada no sentido "dos ponteiros do relógio" que é o sentido negativo de percurso. O resultado obtido, 2π merece um comentário especial, é um salto de uma "*espira*" na superfície de Riemann que é o gráfico da função f como função de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$.

Eras, ainda existem relógios com ponteiros?

Calcular integrais de linha sobre curvas arbitrárias pode ser uma experiência nada fácil, nem sempre encontramos meios de calcular uma integral "*exatamente*", mas o cálculo aproximado com um programa de computador é simples. Experimente [9, programas/Green.calc] que está editado para o cálculo da integral na equação (eq.76), leia os comentários. O programa irá calcular várias vezes, aproximadamente, a integral de linha atualizando o valor do passo `delta`. A curva se chama `gamma` e tem três parâmetros `a,b,r` para definir uma translação para um ponto do plano (a, b) e um fator de escala r de modo que você pode calcular a integral de linha sobre $r\mathbf{S}^1 + (a, b)$, a translação do círculo de raio r para o ponto (a, b). Se a origem estiver no interior de γ o valor da integral é o calculado na (eq.78).

Por exemplo, usando `Green.calc` com

$$(a, b) = (0.1, -0.2), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 2π e com

$$(a, b) = (2, -3), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 0, como era de esperar.

6 Derivada sobre o corpo C

A **derivada complexa** é a derivada comum e corrente mas calculada no Cálculo com números complexos. Até um certo ponto, fazer Cálculo com números reais ou complexos e idêntico e naõ vejo razão porque não se faz assim no Cálculo.

Mas ocorre que, em alguns momentos, as coisas ficam diferentes e vou mostrar-lhe isto aqui.

O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) e é, assim, um *corpo*. Desta forma posso aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável*. São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa*. O resultado é intrigante, mas é simples de demonstrar-se como você vai ver aqui uma forma simplificada do método que eu tomei emprestado do livro de Henry Cartan intitulado *Calcul Différentiel*,[2]. É simples hoje, mas foi construído ao longo de mais de um século e representa a solução de uma única equação diferencial, as *equações de Cauchy-Riemann*, um sistema linear de equações diferenciais parciais.

Existe uma notação clássica, usada por praticamente todos os autores que escrevem sobre funções complexas, deixe-me introduzi-la aqui. Se $z = x + iy$ então a função complexa $w = f(z)$ tem duas funções componentes, u, v e posso escrever

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y); \tag{79}$$

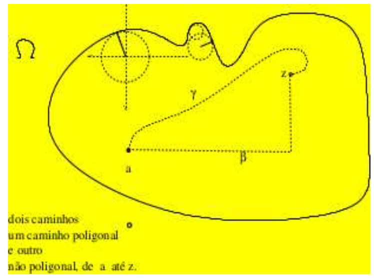
$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)); \tag{80}$$

u, v são funções reais da variável complexa $z = x + iy$ e algumas vezes são compreendidas como funções reais de duas variáveis reais (x, y), como está expresso na equação (eq.80). São formas idênticas de interpretar f, u, v. E vou estar usando uma *interpretação* ou a outra conforme me for conveniente!

As funções complexas que tiverem derivada complexa, também tem uma primitiva que é única a menos duma constante, como no caso real. A forma de calcular esta primitiva é muito semelhante àquela que usamos no caso real, apenas que agora temos que caminhar entre dois pontos ao longo duma curva no plano, confira a figura (fig. 6), página 18.

Na figura você pode ver dois caminhos, um caminho poligonal, β e outro não poligonal, γ, partindo da condição inicial a até o ponto z. Se a função tiver uma primitiva, então o cálculo desta integral não pode depender da escolha do caminho e isto é muito prático, podemos escolher um melhor caminho para fazer o cálculo e eu vou com frequência escolher um caminho poligonal. Observe que o caminho escolhido tem que estar inteiramente contido no domínio de definição da função. Como as funções complexas são, de fato, transformações do plano, o Teorema de Green se lhes aplica e classifica estas funções como *independentes* *do caminho* ou *dependentes do caminho* relativamente às integrais sobre curvas. As que tiverem *derivada complexa* são *independentes do caminho*, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann.

Uma forma simples de se chegar ao resultados acima mencionados pode ser esquematizada na seguinte sequência em que estou usando derivação implícita para fazer aparecer as equações de *Cauchy-Riemann*, também estou usando a dualidade de interpretação $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$, $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, conforme for conveniente:



ou dúbio, escolha...

$$f \text{ uma função complexa de variável complexa;} \tag{81}$$

$$f = u + iv; u, v \text{ funções reais de variável complexa;} \tag{82}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = f'(z) \in \mathbf{C}; \tag{83}$$

$$df = J(f)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\alpha + \beta i)(dx + idy) = (\alpha dx - \beta dy) + i(\alpha dy + \beta dx) \tag{84}$$

$$df = f'(z)dz = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$u_x = v_y; u_y = -v_x; \text{ Cauchy-Riemann} \tag{86}$$

$$f'(a + ib) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x = v_y - iu_y; \tag{87}$$

A igualdade na equação (eq. 83) vem da afirmação inicial, **C** *é um corpo, como* **R***, a derivação das funções reais de variável real, se aplica* verbatim *ao caso complexo*, portanto, como no caso real, $f'(z) \in \mathbf{C}$, a *derivada complexa* é o número complexo $\alpha + i\beta$.

Este fato, que a derivada é um *número complexo*, volta a ser usado na equação (eq. 85) para identificar um tipo particular de matriz jacobiana, a derivada de f, agora vista como função de $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, na equação (eq. 85).

O que está em jogo aqui e que faz surgir este sistema de equações de diferenciais chamado de equações de Cauchy-Riemann é um pequeno e importante detalhe. Qualquer matriz 2×2 representa uma transformação linear do plano no plano, mas um subconjunto delas é que representa uma transformação linear de **C** em **C**, são aquelas da forma que se encontra na equação (eq. 85). Observe a seguinte sequência de cálculos e a observação que farei ao final dela:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix}; \tag{88}$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y); \tag{89}$$

Os cálculos acima poderiam ter sido feitos, faça você mesmo, de forma mais geral, usando uma matriz qualquer, em lugar daquela usada na equação (eq.88) e depois forçando uma igualdade entre ela e o resultado do produto de números complexos que aparece na equação (eq.89). Quer dizer que as *equações de Cauchy-Riemann* apenas caracterizam quando uma função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ é uma função que tem derivada complexa.

Vou poder assim destacar, entre as funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, uma classe particular de funções cuja matriz jacobiana tem o formato apresentado na equação (eq. 85), as funções analíticas.

A equação (ou sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem), equação (eq. 86), obtida quando se igualar as matrizes nas equações (eq. 83) e (eq. 85), é conhecida como *equações de Cauchy-Riemann*, e elas caracterizam quando uma função $f = u + iv$ é analítica e são usadas com frequência como definição de função analítica.

A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as *equações de Cauchy-Riemann*. Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo.

Quer dizer que voltando a olhar para as funções vetoriais de variável vetorial de dimensão dois haverá duas classes disjuntas de funções:

- aquelas que satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*, as funções analíticas, que são de classe $\mathcal{C}^\infty$,
- e as outras, que podem ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ mas que não são analíticas.

Por exemplo

$$g(x,y) = (x,-y) = (u(x,y), v(x,y)); g(z) = \overline{z}; \tag{90}$$

$$u_x = 1 \neq v_y = -1; g'(x,y) = J(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{91}$$

$$g''(x,y) \equiv 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{92}$$

$$(\forall n) g^{(n)} \equiv 0 \cdots \tag{93}$$

Então a derivada de $g(x,y) = (x,-y)$ não se pode identificar com um número complexo e assim g não tem uma *derivada complexa*, mas tem derivadas de todas as ordens que são matrizes nulas. g não é uma função analítica mas é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Obviamente que ainda existe uma infinidade de outras funções que nem mesmo precisam ser contínuas: a "*maioria*"!

maioria, imprecisão, confira a hipótese de Cantor!

Uma das implicações mais fortes da analiticidade é que se f for analítica irá transformar *abertos do plano complexo* em *abertos do plano complexo* mas não é uma propriedade fácil de ser demonstrada. Esta propriedade fundamental, ser de classe $\mathcal{C}^\infty$, caracteriza as *funções analíticas* como *aplicações abertas*.

Mas a recíproca não é verdadeira porque a função g, definida na equação (eq. 90), é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, é uma aplicação aberta, mas não é analítica.

A derivada complexa de f pode ser escrita numa das formas alternativas seguintes, usando as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y = \alpha + i\beta; \tag{94}$$
$$f'(a+ib) = \alpha + i\beta; \tag{95}$$

O número $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$ pode ser obtido com uma qualquer das expressões da equação (eq. 94).

Usando a equação (eq. 94) e a equação (eq. 95) posso criar a expressão de dois *operadores diferenciais* que vão permitir-me a síntese destes dois conceitos centrais, a *derivada complexa* e as *equações de Cauchy-Riemann*. Deixe-me seguir usando a notação $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 2(\alpha + i\beta) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) + (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv); \tag{96}$$
$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u+iv) = 2(\alpha + i\beta) \tag{97}$$
$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = 2(\alpha + i\beta) \tag{98}$$
$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = (\alpha + i\beta) = f'(a+ib); \tag{99}$$
$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \tag{100}$$
$$\partial f = f'; \tag{101}$$
$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})u - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 0 \tag{102}$$
$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u-iv) = 0 = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})\overline{(u+iv)} = \overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(u+iv) = 0 \tag{103}$$
$$\frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial})}(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \tag{104}$$
$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}); \tag{105}$$
$$\overline{\partial}(f) = 0; \tag{106}$$

- Na equação (eq. 96) escrevi de forma repetida a expressão da derivada, à direita é o resultado da aplicação do operador $(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ a cada uma das componentes de f e à esquerda é a expansão do mesmo operador. A razão pela qual o valor é $2(\alpha + i\beta)$ vem da equação (eq. 87) que expressa a derivada $(\alpha + i\beta)$ usando as derivadas parciais de u, v.

- A equação (eq. 97) resume a anterior assim como também (eq. 98) agora usando f.

- Na equação (eq. 99) defini o operador ∂, como resumo da equação anterior.

- Na equação (eq. 100) defini o operador ∂ em dois formatos equivalentes.

- A equação (eq. 101) é a expressão da derivada usando o operador ∂, e vale quando f tiver uma *derivada complexa*.
- Na equação (eq. 102) estão sendo aplicadas as equações de Cauchy-Riemann resumidas na equação (eq. 103) em três formatos equivalentes fazendo uma definição prévia do operador $\overline{\partial}$ que será corrigida na próxima equação uniformizando a notação porque a multiplicação por $\frac{1}{2}$ não vai alterar o resultado quando a função f for analítica (e nem quando não for ...). Observe que a igualdade central, na equação (eq. 103), vale independentemente de que f seja ou não analítica, mas, ser zero, é consequência da hipótese de que seja analítica.
- A equação (eq. 104) define o operador $\overline{\partial}$, que representa as equações de Cauchy-Riemann, em três formatos equivalentes.
- Na equação (eq. 105) encontra=se uma definição do operador $\overline{\partial}$.
- A equação (eq. 105) é a expressão das equações de Cauchy-Riemann usando o operador $\overline{\partial}$.

Destes cálculos posso deduzir duas expressões mais simples de dois *operadores diferenciais* clássicos permitindo uma forma concisa de expressar tanto as *equações de Cauchy-Riemann* como a definição da derivada de uma função analítica:

$$\partial = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x} - i\tfrac{\partial}{\partial y}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{1}{i}\tfrac{\partial}{\partial y}) \tag{107}$$

$$\overline{\partial} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x} + i\tfrac{\partial}{\partial y}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{1}{i}\tfrac{\partial}{\partial y}) \tag{108}$$

$$\partial(f) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \tag{109}$$

$$\overline{\partial}(f) = 0 \iff f \text{ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann} \tag{110}$$

Embora a formulação à direita, nas equações (eq. 107) e (eq. 108) sejam mais didáticas (ligadas à definição de conjugado), a expressão que parece ser a mais comum são as que ficam à esquerda, para definir os operadores $\partial, \overline{\partial}$.

Neste ponto, de posse da expressão simples, como número complexo para a derivada, posso demonstrar o teorema fundamental mencionado anteriormente sobre a infinidade de derivadas que tem uma função analítica como uma aplicação do operador $\overline{\partial}$.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1 (funções analíticas)** *infinitamente deriváveis*
A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as equações de Cauchy-Riemann. *Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo:*

Dem :

$$f = u + iv; f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y \tag{111}$$

$$2\overline{\partial}(f') = 2\overline{\partial}(u_x + iv_x) = 2\overline{\partial}(u_x) + 2i\overline{\partial}(v_x); \tag{112}$$

$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + i(v_{xx} + iv_{yx}); \tag{113}$$

$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + iv_{xx} - v_{yx}; \tag{114}$$

$$2\overline{\partial}(f') = v_{yx} + iu_{yx} - iu_{yx} - v_{yx} = 0 \tag{115}$$

1. *Na equação (eq. 111) estou escrevendo f e a expressão de sua derivada usando a equação (eq. 87).*
2. *Nas equação (eq. 112)- (eq. 114), estou aplicando a definição do operador $\overline{\partial}$. Como $\overline{\partial}$ é um operador linear porque é combinação linear de derivadas que são operadores lineares então posso expandir a aplicação para cada uma das parcelas de f.*
3. *Na equação (eq. 115) reescrevi todas as derivadas para se tornassem derivadas mistas, para então concluir que a soma é nula e portanto f' satisfaz às equações de Cauchy-Riemann porque f é analítica e então f' também é analítica.*

Termina-se a demonstração do teorema aplicando indução finita. **q.e.d .**

As equações de Cauchy-Riemann são um exemplo de equação diferencial parcial que foi resolvida ao longo de mais de um século, resultando na construção do que se chamava de *teoria das funções* que se pode dizer, com alguma dose de exagero, que foi o processo de construção da *solução das equações de Cauchy-Riemann*, ou, a solução destas equações é uma função analítica e vice-versa.

As funções analíticas são também chamadas de *funções holomorfas*.

Como subproduto da solução das *Cauchy-Riemann* se obteve a solução da equação homogênea de Laplace. Se $f = u + iv$ for analítica, então as duas funções reais u, v são harmônicas, quer dizer, satisfazem à equação homogênea de Laplace $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$, isto é consequência direta das equações de Cauchy-Riemann e do teorema de Schwarz-Clairaut das derivadas mistas.

As funções u, v chamam-se *conjugados harmônicos*. A recíproca é verdadeira e passa pela solução da equação diferencial de Cauchy-Riemann (as equações de Cauchy-Riemann) em que uma das duas funções, u ou v, é um dado do problema. A solução é única a menos de uma constante.

Para resolver a *equação diferencial parcial* $\Delta(F) = 0$ foi preciso montar toda a teoria das funções analíticas.

Índice Remissivo

Referências

[1] Frank Ayres Jr. *Cálculo - Col. Schaum*. Bookman, 2007.

[2] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Herman - Paris, 1967.

[3] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 1*. LTC, 2011.

[4] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 2*. LTC, 2011.

[5] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 3*. LTC, 2011.

[6] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 4*. LTC, 2011.

[7] Stephen Smale Morris W. Hirsch. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.

[8] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[9] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[10] James Stewart. *Cáculo Vol I*. Cengage Learning, 2013.

[11] James Stewart. *Cálculo Vol II*. Cengage Learning, 2013.