

# Sumário

Introdução .....	6
<b>1 Teoria dos Conjuntos.</b>	<b>7</b>
1.1 O conceito de conjunto. ....	7
1.2 Conjunto e estrutura. ....	11
1.3 elemento, subconjunto ....	18
1.4 operações ....	20
1.4.1 união, interseção ....	20
1.4.2 diferença ....	24
1.5 Estrutura algébrica nos conjuntos ....	26
1.6 produto cartesiano ....	28
<b>2 Análise Combinatória Simples.</b>	<b>31</b>
2.1 Análise Combinatória ....	31
2.2 combinações ....	33
2.2.1 Partições de um conjunto. ....	44
2.3 O binômio de Newton. ....	49
2.4 arranjos ....	54
2.4.1 repetição ....	54
2.4.2 Arranjos simples. ....	55
2.4.3 Permutações. ....	58
2.5 $n(A \cup B)$ ....	60
2.6 $n(A \times B)$ ....	64
<b>3 Relações e Funções.</b>	<b>67</b>
3.1 Relações. ....	67
3.1.1 Relações de ordem. ....	69
3.1.2 equivalência ....	72
3.2 função ....	73
3.3 função ....	79
3.3.1 injetiva ....	79
3.3.2 sobrejetiva ....	81
3.3.3 bijetiva ....	82
3.4 Funções polinomiais ....	83
3.4.1 A função linear afim ....	83

<b>4</b>	<b>Conjuntos numéricos fundamentais.</b>	<b>93</b>
4.1	os naturais . . . . .	93
4.1.1	álgebra $\mathbf{N}$ . . . . .	93
4.1.2	ordem . . . . .	95
4.2	Os números inteiros. . . . .	96
4.2.1	A definição de $\mathbf{Z}$ . . . . .	96
4.2.2	adição em $\mathbf{Z}$ . . . . .	96
4.2.3	produto em $\mathbf{Z}$ . . . . .	100
4.2.4	ordem em $\mathbf{Z}$ . . . . .	100
4.2.5	demonstrações . . . . .	102
4.3	rationais . . . . .	104
4.3.1	incompletitude, $\mathbf{Z}$ . . . . .	104
4.3.2	álgebra dos racionais . . . . .	106
4.3.3	compatibilidade . . . . .	108
4.3.4	demonstrações . . . . .	112
4.3.5	equivalência . . . . .	115
4.3.6	m.m.c . . . . .	117
4.4	interpretação geométrica . . . . .	118
4.4.1	A reta e os racionais. . . . .	118
4.4.2	os irracionais . . . . .	120
4.4.3	rationais na reta . . . . .	122
4.5	programa . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Construção geométrica de <math>\mathbf{R}</math>.</b>	<b>127</b>
5.1	os reais . . . . .	127
5.2	álgebra na reta . . . . .	129
5.2.1	A adição em $\mathbf{R}$ . . . . .	129
5.2.2	A multiplicação em $\mathbf{R}$ . . . . .	137
5.2.3	corpo ordenado . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Funções Especiais</b>	<b>141</b>
6.1	função linear . . . . .	141
6.2	Progressão aritmética . . . . .	143
6.2.1	Notação e exemplos . . . . .	144
6.2.2	Soma dos termos de uma P.A. . . . .	146
6.3	Gráficos das funções lineares . . . . .	150
6.3.1	Coefficiente angular de uma reta . . . . .	152
6.3.2	Retas e suas equações . . . . .	153
6.4	Equação da reta que não passa na origem . . . . .	156
6.5	Equação do 1º Grau . . . . .	159
6.6	Discussão da equação do 1º Grau . . . . .	161
6.6.1	Exercícios Propostos . . . . .	161
6.7	Sistema de Equações do 1º Grau . . . . .	162
6.7.1	Matrizes . . . . .	163
6.7.2	Exercícios Propostos . . . . .	167
6.8	Problemas do 1º Grau . . . . .	167
6.8.1	Exercícios Propostos . . . . .	169
6.8.2	Solução de alguns exercícios . . . . .	170
6.9	Progressões geométricas . . . . .	170
6.10	Função quadrática . . . . .	175

6.10.1	A função padrão $y = f(x) = x^2$ . . . . .	175
6.11	O gráfico de uma função do segundo grau . . . . .	177
6.11.1	A forma padrão $x \mapsto (x - a)(x - b)$ . . . . .	179
6.12	Equação do 2º grau . . . . .	183
6.12.1	Exercícios Resolvidos . . . . .	183
6.12.2	Exercícios Propostos . . . . .	185
6.12.3	Exercícios Propostos . . . . .	186
6.12.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	187
6.12.5	Exercícios Propostos . . . . .	190
6.13	Logaritmos . . . . .	208
6.13.1	A história . . . . .	208
6.13.2	Construção de um logaritmo . . . . .	210
6.13.3	Construindo outro logaritmo . . . . .	218
6.13.4	Os logaritmos decimais . . . . .	220
6.13.5	A base de um logaritmo . . . . .	224
6.14	Gráfico de uma função logarítmica . . . . .	226
6.15	Função inversa de uma função logarítmica . . . . .	227
6.15.1	Troca de base do logaritmo . . . . .	228
6.16	Função exponencial . . . . .	229
<b>7</b>	<b>Números Complexos</b> . . . . .	<b>245</b>
7.1	incompletitude, $\mathbf{R}$ . . . . .	245
7.1.1	nú meros complexos . . . . .	246
7.1.2	A representação geométrica dos complexos . . . . .	248
7.2	Números complexos: extensão dos reais . . . . .	251
7.3	Módulo, argumento e conjugado . . . . .	256
7.4	Intepretação geométrica do produto . . . . .	256
7.5	Raízes de um número complexo . . . . .	260
<b>8</b>	<b>O anel dos polinômios.</b> . . . . .	<b>267</b>
8.1	números . . . . .	268
8.2	polinô mio . . . . .	270
8.3	estrutura algé brica . . . . .	272
8.3.1	sobre os exercí cios . . . . .	274
8.4	estrutura dos polinômios . . . . .	280
8.5	divisão . . . . .	282
8.5.1	resto . . . . .	283
	Bibliografia . . . . .	287
	Índice remis- sivo alfabético. . . . .	287



# Lista de Figuras

1.1	O conjunto universo e tres subconjuntos . . . . .	12
1.2	Um grafo com 6 nós . . . . .	13
1.3	A união de três conjuntos. . . . .	21
1.4	A interseção de dois conjuntos . . . . .	22
1.5	A interseção de duas retas . . . . .	22
1.6	A diferença entre os conjuntos A e B . . . . .	25
2.1	Árvore de possibilidades. . . . .	55
2.2	$A \cup B \cup C$ . . . . .	62
2.3	$n(A \cup B \cup C \cup D)$ . . . . .	63
3.1	Diagrama de Hasse de $P(A)$ ; $A = \{0, 1, 2, 3\}$ . . . . .	69
3.2	Histograma dos enfermeiros. . . . .	75
3.3	Evolução do preço do dolar. . . . .	76
3.4	gráfico de $f(x) = x$ domínio $A = \{-10, -9, -8, \dots, 10\}$ . . . . .	77
3.5	Gráfico de $f(x) = x^2$ . . . . .	78
3.6	gráfico de $f(x) = x + 1$ domínio $A = \{-5, -9, -8, \dots, 5\}$ . . . . .	79
3.7	$f(x) = x^2$ esta função não é sobrejetiva se domínio $A = \{-5, -4, -3, \dots, 5\}$ ; contra-domínio $\{-25, -24, \dots, 24, 24\}$ . . . . .	=
	. . . . .	82
3.8	diferença, função linear afim . . . . .	85
3.9	a tangente do ângulo $\alpha$ é $a$ . . . . .	86
3.10	Os pontos em que uma função linear afim corta os eixos. . . . .	87
3.11	A função linear $y = 2x$ . . . . .	89
4.1	Frações equivalentes com denominadores diferentes $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ . . . . .	105
4.2	Racionais e inteiros . . . . .	107
4.3	entre dois racionais sempre há outro... . . . .	118
4.4	O intervalo $[0, 1]$ colocado sob uma lente. . . . .	119
4.5	. . . . .	119
4.6	Raizes quadradas . . . . .	121
5.1	A regra do paralelogramo para somar segmentos orientados . . . . .	130
5.2	Figuras semelhantes obtidas com um pantógrafo . . . . .	131
5.3	Soma de segmentos . . . . .	132
5.4	Adição e diferença dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ . . . . .	133

5.5	Multiplicação, módulo em $\mathbf{R}$ .	134
5.6	Adição, módulo, desigualdade em $\mathbf{R}$ .	135
5.7	A multiplicação geométrica	137
5.8		138
6.1	A soma dos termos de uma P.A.	148
6.2	Área do trapézio	149
6.3	Coefficiente angular da reta e a razão da P.A.	151
6.4	Várias reta, seus ângulos, sentido dos ângulos	152
6.5	Um par de números representa um ponto no plano	153
6.6	Equação de reta que passa na origem	154
6.7	duas retas paralelas, uma delas passa na origem	156
6.8	Discussão geométrica, sistema de equações	163
6.9	O produto de matrizes	164
6.10	Alguns pontos do gráfico $x \mapsto x^2$	238
6.11	Um gráfico com mais densidade $x \mapsto x^2$	239
6.12	Gráfico de $x \mapsto x^2$ com alta densidade	240
6.13	Uma parábola e sua translação	240
6.14	duas translações	241
6.15	Homotetias da parábola padrão	241
6.16	logaritmos base $a$ ; $a \in \{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 2, e, 10\}$	242
6.17	Primeira versão do gráfico do logaritmo - base maior do que 1	242
6.18	Gráfico do $y = \log_2(x)$ com os pontos de coordenadas inteiras salientados.	243
7.1	Representação geométrica dos complexos	247
7.2	Produto de números complexos	248
7.3		249
7.4	Propriedades dos números complexos	252
7.5	Conjugado de um número complexo	254
7.6	A projeção de $a + bi$ sobre $\mathbf{S}^1$ .	257
7.7	As raízes da unidade	261
7.8	Raízes quartas da unidade	263
7.9	As raízes terceiras de 2	264
7.10	Raízes quintas de 7	265
7.11	Raízes cúbicas de $3 + 4i$	266
8.1	$\mathbf{R} \subset \mathbf{R}[x] \subset \mathcal{F}([a, b])$	280

## Introdução.

### Como usar este livro.

Este livro tem oito capítulos que devem ser lidos em sequência porque todo capítulo depende do anterior. Dentro dos capítulos há *seções* em que eles são divididos e nós queremos chamar sua atenção que o texto é completado com comentários: observações e as notas de rodapé.

Os comentários, o texto teórico, são de nossa consideração o material mais importante do livro, mas nem sempre o mais fácil. Sugerimos que você inicialmente dê-lhes menos importância e se concentre nos exercícios.

Talvez você deva ler as observações na ordem em que elas aparecerem, mas com baixa prioridade, numa primeira leitura. Para lhe permitir uma busca mais acurada de informações, o livro tem um índice remissivo alfabético, ao final, em que todos os conceitos que surgem nas observações se encontram *indexados* para que facilmente você retorne a eles quando achar necessário.

Os exercícios foram escritos para serem feitos com auxílio de uma *teoria mínima*. A própria teoria deve surgir dos exercícios.

Mas não despreze totalmente a teoria, nela há dicas de como se aprofundar na solução dos exercícios. Em suma, quase todos os exercícios podem ser resolvidos em mais de um nível, e você deve resolvê-los no nível em que puder, e depois tentar aprofundar a solução.

Usamos uma convenção tipográfica no livro, *texto em itálico* representa material que você deve olhar com cuidado, possivelmente não está definido ainda e estamos usando a concepção intuitiva do termo. Quando usarmos **texto tipográfico** estaremos fazendo referência a um termo técnico, já definido anteriormente ou considerado bem conhecido como tal. Quando usarmos letra pequena estamos lhe querendo dizer que o assunto é polêmico e que há muito mais coisa para ser dito do que estamos conseguindo dizer naquele momento. Usamos texto sublinhado para chamar sua atenção de um detalhe que poderia passar despercebido, tem o mesmo sentido **texto em negrito**.

Queremos agradecer à *comunidade de programação livre e aberta* sem a qual este livro nunca teria sido escrito porque depende de programas de domínio público para sua edição, de programas de domínio público para confecção de gráficos e simulação computacional. Com o mesmo espírito este livro é colocado como `copyleft` uma variante da GPL - Gnu Public Licence. Uma cópia da GPL pode ser encontrado em [www.debian.org](http://www.debian.org). Quer dizer que você pode copiar este livro para seu uso pessoal sem pagar nada ao autor. Claro, *se você, quiser comercializar o livro* então um contrato com o autor, neste sentido, se torna obrigatório.

Os leitores são encorajados a entrar em contacto com o autores, por e-mail, [tarcisio@member.ams.org](mailto:tarcisio@member.ams.org), para qualquer assunto ligado a este livro.

