Capítulo 5

Construção geometrica de R.

Neste capítulo vamos construir geométricamente o conjunto dos números reais. O ponto de partida será a representação geométrica de $\mathbf{Q}$ sobre *a reta* e a descoberta de que na reta existem números não racionais, portanto a reta é um conjunto que contém $\mathbf{Q}$ estritamente. Quer dizer que a reta representa um outro conjunto do qual $\mathbf{Q}$ é um subconjunto. Chamaremos este novo conjunto de $\mathbf{R}$ e vamos estudar suas propriedades. O conjunto dos números reais é um dos conjuntos numéricos fundamentais, mas ele representa uma ruptura no pensamento que ainda hoje está mal absorvida pela maioria das pessoas, inclusive matemáticos que chegam a negar sua existência. Ele merece um capítulo a parte.

5.1 O conjunto dos números reais.

O ponto inicial é a constatação de que há um novo conjunto diferente dos anteriores e estabelecer uma fundamentação lógica para sua existência formal. Em suma definir o novo conjunto, e criar *métodos* para atuar sobre ele.
No capítulo anterior convivemos com um erro que é preciso corrigir[a] agora. Falavamos *da reta*, mas retas há muitas. Acontece que, do nosso ponto de vista de representação dos números, apenas interessa considerar uma reta como modelo concreto para o conjunto que agora pretendemos construir. Claro, em outra reta qualquer podemos repetir a representação dos número o que significa estabelecer uma bijeção enter as duas retas.
Ou seja, consideraremos todas as retas equivalentes o que na prática é como se fossem todas iguais. Porisso falavamos e continuaremos falando *da reta*. Duas retas *distintas* são apenas duas cópias do novo conjunto que logo iremos definir.

[a]Este é um livro didático, quer dizer, nele tentamos arremedar o processo natural da aquisição do conhecimento que passa pela convivência com com erros lógico até a formalização do novo conhecimento. O livro didá tico é o cenário artístico em que a ciência se desenvolve.

Definição 38 *Conjunto dos números reais.*

Uma reta qualquer sobre a qual tenhamos escolhido o ponto para representar o zero *e à intervalos iguais escolhido pontos para representar os inteiros, se chamará* `a reta numérica`.

A reta numé rica é o conjunto dos números reais.

Este novo conjunto se designa com o símbolo **R**.

De agora em diante, estaremos chamando de números reais aos pontos de uma reta numérica.

Observação 23 *Unicidade da reta numérica. Entre duas tais retas podemos estabelecer uma* correspondência biúnivoca [1] *e* sobre[2] *de formas que as consideraremos apenas cópias equivalentes da* `reta numérica`.

Ou seja, a reta numé rica *é uma só*[3].

A experiência que começamos com $\sqrt{2}$ pode ser *iterada*, Ver página 121.

- sobre o número $\sqrt{2}$ considere um segmento de reta perpendicular e de comprimento 1. Ligue a extremidade adequada com a origem para construir um triâ ngulo retângulo. A hipotenusa deste triângulo irá medir $\sqrt{3}$ que poderá ser transferida para a reta com um compasso determinando dois números reais: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
- sobre o número $\sqrt{3}$ considere um segmento de reta perpendicular e de comprimento 1. Ligue a extremidade adequada com a origem para construir um triâ ngulo retângulo. A hipotenusa deste triângulo irá medir $\sqrt{4} = 2$ que poderá ser transferida para a reta com um compasso determinando dois números reais: $2, -2$. Neste caso não ganhamos nada, mas mostramos que os inteiros podem ser obtidos da mesma forma que os números irracionais.
- sobre o número 2 considere um segmento de reta perpendicular e de comprimento 1. Ligue a extremidade adequada com a origem para construir um triâ ngulo retângulo. A hipotenusa deste triângulo irá medir $\sqrt{5}$ que poderá ser transferida para a reta com um compasso determinando dois números reais: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

e assim sucessivamente podemos construir $\pm\sqrt{n}$ para qualquer número natural n. Sempre que n for primo o resultado será um novo número irracional.

Observação 24 *Números não algébricos.*

Há outros tipos de números não racionais sobre a reta, por exemplo os números algébricos.

Um número é algébrico se for solução de uma equação polinomial. Por exemplo, $\sqrt{2}$ *é solução da equação*

$$x^2 - 2 = 0$$

então $\sqrt{2}$ *é um número algébrico sobre* **Q**, *mas que não pertence a* **Q** *e sim åsua extensão* **R**.

Que podemos dizer das soluções da equação $x^2 + 1 = 0$ *?*

---

[1] *leia "injetiva"*

[2] *leia "sobrejetiva"*

[3] o conceito de *unicidade* é primordial, ele parece uma necessidade infantil... mas veja, se não considerarmos todas as retas iguais, quando tivermos dois exemplares poderemos ter eventos ocorrendo em locais distintos o que será uma inconveniência, pelo menos porque pode não ser possível compará-los.

Há tambem os números não álgebricos, que não são soluções das equações algébricas com coeficientes racionais[4].

Todo nú mero racional é um número algébrico.

Mas há números que não são nem racionais nem algébricos, estes se chamam transcendentais. *Esta é a definição, quando um número não for algé brico, ele é transcendental.*

Como poderiamos provar que há números não algébricos?

A parte da Matemática que trata deste assunto se chama teoria dos números *a qual pertence o recentemente provado* ú ltimo teorema de Fermat . *Não haveria espaço neste livro para iniciar esta teoria...faz parte de uma disciplina chamada Álgebra, que não é exatamente a mesma ensinada nos concurso para a Polícia e para o Banco do Brasil e Receita Federal.*

A consequência do que fizemos acima é:

- Existe um novo conjunto, *a reta numérica* **R**.
- $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
- Existem números reais que não são racionais, os números irracionais, portanto **R** é um novo conjunto.

Como **R** é um novo conjunto, teremos que estender a ele os mé todos de **Q**, as operações algébricas e lógicas.

Exercício 15 *Números irracionais.*

1. *Prove que $\sqrt{n}$ é um número irracional quando n for primo?*
2. *Quando n, mesmo não sendo primo, ainda $\sqrt{n}$ é um número irracional?*
3. *Verifique se é verdade que "$\sqrt{n}$ é inteiro ou irracional"*

5.2 Estrutura algébrica da reta.

Vamos estender as operações aritméticas e lógicas ao novo conjunto numérico **R**. Como este novo conjunto é de natureza geométrica, estas definições serão feitas usando uma metologia geométrica. Isto quer dizer que consideraremos as operações geométricas como parte de nossa experiência como consideramos **N** um conhecimento fundamental já adquirido ou aceito.

A construção feita aqui ficará incompleta, muita coisa será deixada para o leitor, caso contrário este livro ficaria muito grande.

5.2.1 A adição em R.

Vamos associar a cada número $x \in \mathbf{R}$ real o *segmento de reta orientado* $\overline{0x}$ que liga $0 \in \mathbf{R}$ a x.

Definição 39 *Números reais positivos.*

O conjunto $\mathbf{R}^+$, *chamado dos números reais positivos, é a semi-reta que contiver* $\mathbf{Q}^+$. *A outra semi-reta é o conjunto dos nú meros reais negativos*

[4] sem esta restrição não aconteceria nada diferente, todo número, π por exemplo é solução de uma equação do primeiro grau: $\frac{1}{\pi}x = 1$

Observação 25 *Sentido.*

Observe que a natureza geométrica *dos números reais cria novos conceitos. Os números reais são pontos de uma reta na qual se escolheu um ponto privilegiado para representar o zero e de onde "partem" duas semi-retas:* $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$. *Quer dizer que estamos falando de duas semi-retas "orientadas", uma delas "cresce" no sentido positivo e a outra "cresce" no sentido negativo, porisso passaremos a dizer que esta última descresce*[5].

Assim um número real positivo determina em $\mathbf{R}$, *com a origem, um segmento de reta que tem sentido diferente, contrário, a qualquer segmento de reta determinado com a origem por um número real negativo.*

Adição de de vetores

*Como os númeres reais são "*seres geométricos*" vamos discutir aqui em detalhe como somamos segmentos de reta - vetores.*

É a "`regra do paralelogramo`*", ver (fig. 5.1), página 130.*

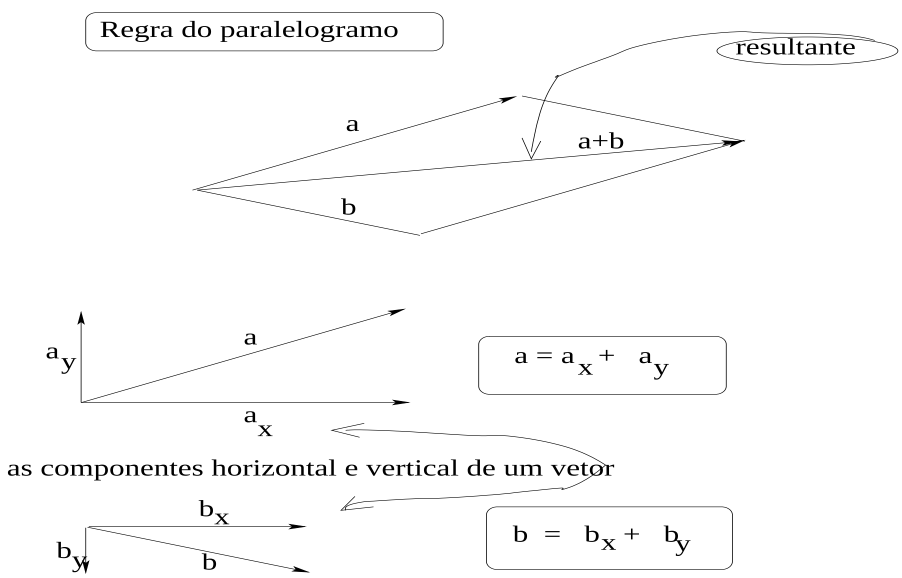

Figura 5.1: A regra do paralelogramo para somar segmentos orientados

Na figura (fig. 5.1), página 130, você pode ver a decomposição *dos vetores* $\vec{a}, \vec{b}$ *que se encontram somados no paralelogramo.*

O paralelogramo, enfim, é uma figura geométrica especial. Os lados sendo paralelos dois, ele serve para "transferir" comprimentos sem deformação.

[5] *se eu tiver uma dívida de 200 Bi com o FMI e "contratar" um novo empréstimo, para auxiliar uma multi- nacional que vem se instalar aqui dentro, de mais 50 Bi, então a minha dívide cresce, mas os meus direitos, a minha independência, "descrescem".*

Aqui você vai ter que fazer uma adaptação mental. Como é que fica a soma de segmentos em cima da reta? Se convença, teremos um paralelogramo "degenerado" com todos os lados em cima da reta...

Patógrafo - construção de figuras semelhantes

Era comum se poder comprar nas casas de desenho um instrumento chamado pantógrafo[6].

A figura (fig. 5.2) página 131, mostra o efeito de um pantógrafo sobre uma figura geomé trica, é possível copiar a figura mantendo suas proporções. Na figura (fig. 5.2) os polígonos A e $\mathcal{A}$ *são semelhantes.*

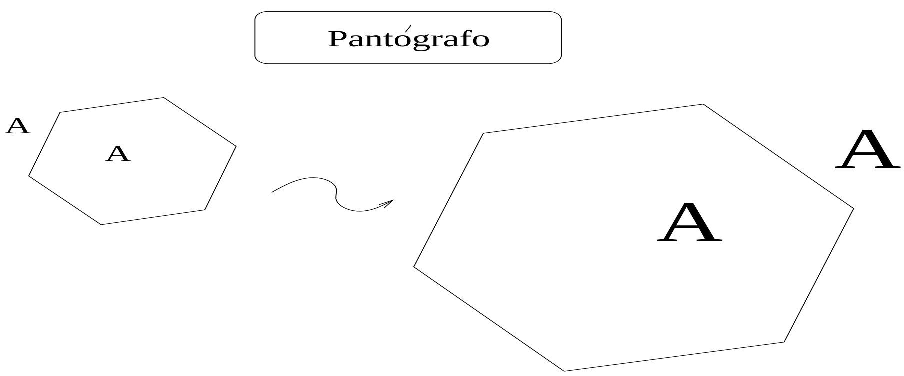

Figura 5.2: Figuras semelhantes obtidas com um pantógrafo

Então podemos transferir segmentos, ou como se costuma dizer, vetores, quardando comprimento e direção, usando a regra do paralelogramo.

Podemos, inclusive, com pantógrafos, "multiplicar" as grandezas geométricas guardando a semelhança, (direção e sentido).

O que nos interessa neste momento é soma, trataremos em seguida da multiplicação, também.

Há dois instrumentos de desenho cruciais para a nossa construção algébrica: compasso, esquadro.

- *Compassos servem para transferir distâncias, porisso conseguimos traçar um círculo com um compasso, transferindo a distância do centro para um ponto "qualquer" guardando a distância escolhida. Todos os pontos assim marcados ficam a mesma distância do centro;*

[6]do grego, *pantos*=tudo, *grafos*=cópia

- *<u>Esquadros</u> servem para transferir direção, retas paralelas.*

Usando um compasso podemos transferir um segmento b para o extremos do segmento a e assim calcular o segmento soma $a+b$ sobre uma mesma reta.

Você pode ver estas idéias concretizadas na figura (fig. 5.3) página 132. Na figura você pode ver a soma dos segmentos a, b todos dois com o sentido positivo da reta. Também você pode ver a soma de dois outros segmentos, a no sentido positivo da reta e b orientado no sentido negativo da reta.

No segundo caso, em que os segmentos tem sentidos contrários:

- *<u>a tem sentido positivo e tem módulo menor</u>;*
- *<u>b tem sentido negativo e tem módulo maior</u>,*

o resultado desta soma é um segmento com orientação negativa: $a+b<0$.

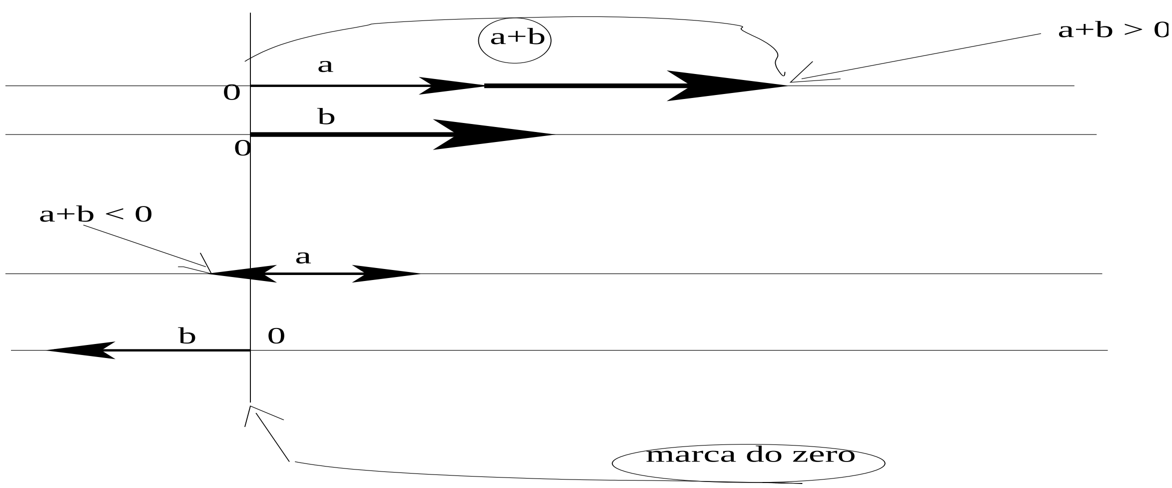

Figura 5.3: Soma de segmentos

Da mesma forma como podemos somar segmentos, també m é possível fazer a diferença entre segmentos. Observe inicialmente que

$$x - y = x + (-y).$$

Quer dizer que a diferença se traduz como uma adição de x com[7] $-y$.

Observe na figura (fig. 5.4) página 133, a soma e a diferença dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$. São as duas diagonais do paralelograma que eles determinam.

Podemos tomar emprestado da geometria e do desenho os instrumentos necessá rios para fazer `álgebra` *e construir o conjuntos dos números reais, geometricamente.*

Vamos aplicar a álgebra vetorial nos geométricos nú meros reais.

[7]Logo vamos definir para os reais a troca de sinal.

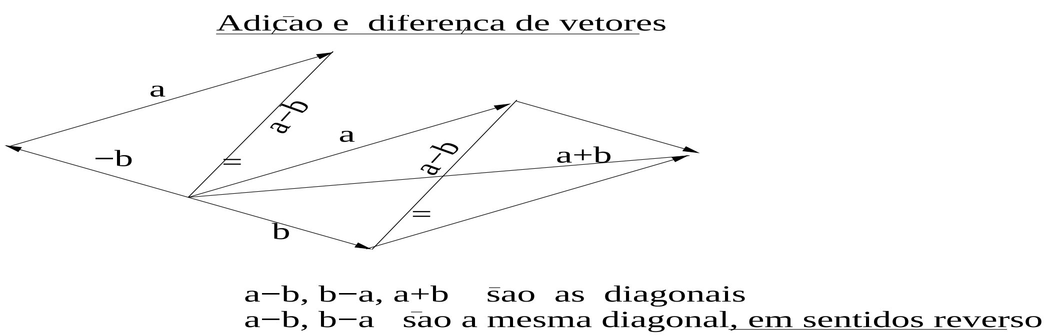

Figura 5.4: Adição e diferença dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$.

Módulo e troca de sinal

De forma idêntica ao que aconteceu com a soma de números inteiros, precisaremos do conceito de módulo. A figura (fig. 5.5), página 134, ilustra diversos fatos geométricos relativos aos números reais. Nela um círculo centrado na origem comum de duas retas indica o módulo.

Definição 40 *Módulo de um número real.*

Dado um número real x com a origem ele determina o raio r, de um círculo de centro na origem e que passa tanto por x como por $-x$. Por convenção consideraremos r igual ao número real positivo e o chamaremos de módulo: $r = |x| = |-x|$. Veja na (fig. 5.5), página 134, o número x alí representando um número negativo, e seu módulo $|x|$. Os dois se encontram num mesmo cí rculo, porque círculos de centro na origem *são o lugar geométrico dos números que têm o mesmo mó dulo.*

Portanto $|x|$ é o raio do círculo de centro na origem que passa por x.

Também precisaremos da função *troca sinal*:

Definição 41 *Função troca sinal. Definimos a função*

$$t : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ ; \ x \mapsto -x$$

de tal modo que $-x$ é o ú nico número real tal que $|-x| = |x|$ e que se encontra na semi-reta em que x não está.

Vamos também definir uma função que identifica quando $x \in \mathbf{R}^+$.

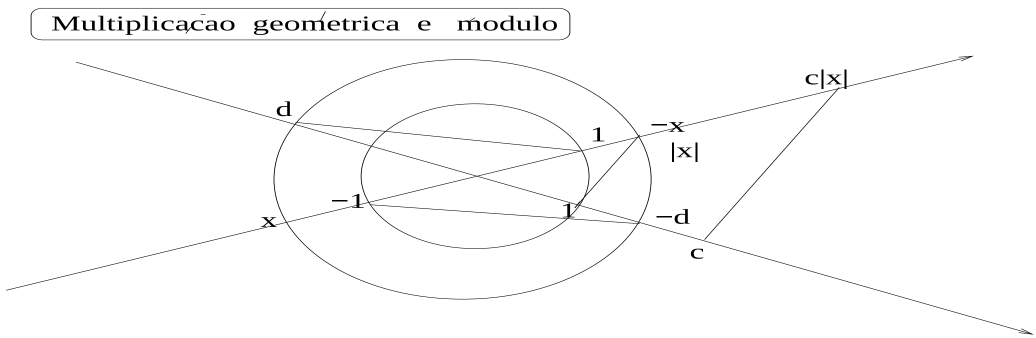

Figura 5.5: Multiplicação, módulo em $\mathbf{R}$.

Definição 42 *Função sinal*
A expressão, o sinal de x é 1 se $x \in \mathbf{R}^+$, *ou o sinal de* x *é* -1 *se* $x \in \mathbf{R}^-$.

$$sign(x) = \begin{cases} x \geq 0 & \Rightarrow \quad 1 \\ x < 0 & \Rightarrow \quad -1 \end{cases} \tag{5.1}$$

A função t serve para transpor x para o outro número real determinado pelo círculo de centro na origem passando por x, independentemente do sinal de x. Observe na (fig. 5.5), página 134, o nú mero d é o número $-d$.

Exercícios 21 *Troca sinal e módulo*

1. *Observe se as duas frases seguintes são verdadeiras: d é a imagem pela função "troca sinal" de −d. −d é a imagem pela função "troca sinal" de d.*
2. *Calcule t(t(d)).*
3. *Calcule* $|||-x|||; |-3|; |-3|+3; 3-|-3|$
4. *Verdadeiro ou falso: "Dois números reais de mesmo mó dulo, mas de sentidos diferentes, determinam com a origem dois segmentos de reta com sentidos opostos. Um é inverso aditivo do outro".*
5. *Calcule* $sign(-3)$*;* $sign(sign(-3))$*;* $1 + sign(-3)$*;* $sign(3) - 1$

Relação de ordem na reta

Queremos, para compatibilizar a relação de ordem de $\mathbf{R}$ com as que definimos em $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ usar a mesma definição anterior.

Definição 43 *Ordem em* **R**

$$x, y \in \mathbf{R}\ ;\ x < y \iff y - x \in \mathbf{R}^+$$

Quando fizermos a diferença (vetorial) $y - x$ a "resultante" deve estar na semi-reta positiva quando $x < y$.

A figura (fig. 5.6) página 135, ilustra estes conceitos.

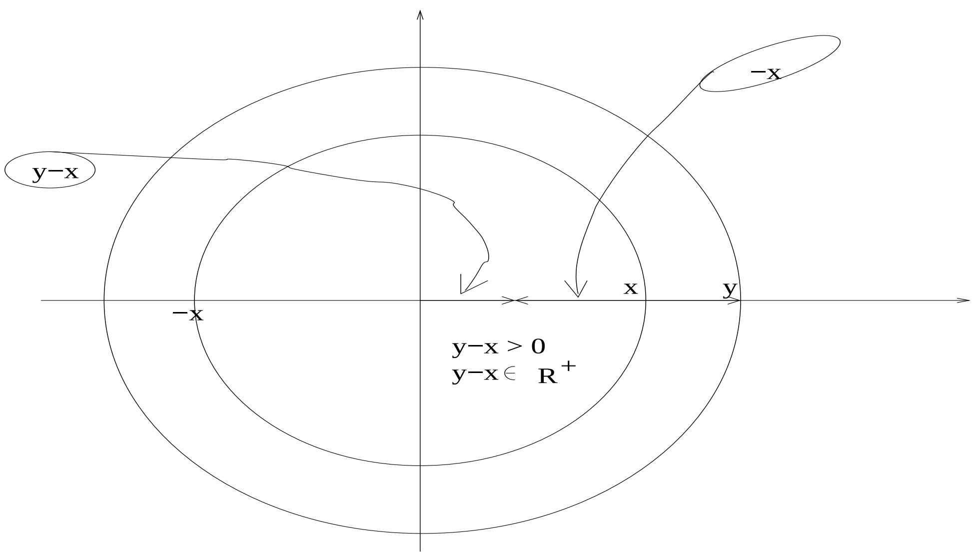

Figura 5.6: Adição, módulo, desigualdade em **R**.

Transferimos para a reta numérica, que representa o novo conjunto numé rico estendendo **Q** *quase* todos os métodos alí existentes: `adição, desigualdade`. Ainda falta definir a multiplicação geométrica que logo faremos. Antes vamos testar a nossa capacidade formal com os novos conceitos demonstrando um teorema.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **42** *Se* $|x| \geq |y|$ *então o* $x + y$ *tem o sinal de* x.

$\boxed{\textbf{Dem}}$ *:*

Quer dizer que x *determina um círculo, de centro na origem, com maior maior do que o círculo determinado por* y.

Então, quando transferirmos. Se os dois tiverem o mesmo sinal nada há o que fazer porque $x + y$ *terá o sinal comum aos dois.*

Vamos discutir portanto o caso em que $x \in \mathbf{R}^-$, *e consequentemente* $y \in \mathbf{R}^+$.

Faça um desenho para acompanhar a explanação.

Quando transferirmos x *para a extremidade de* y, *como* $|x| > |y|$ *então o segmento transferido cobre o segmento* $0y$ *de maneira tal que haverá um excedente (diferença) na semi-reta negativa quer dizer que* $x + y \in \mathbf{R}^-$. *Logo* $sign(x + y) = sign(x)$.

O outro caso é simétrico: $x \in \mathbf{R}^+, y \in \mathbf{R}^-$.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Teorema **43** *A soma em* $\mathbf{R}$ *é comutativa.* **Dem** *:*

A soma de segmentos, usando a regra do paralelogramo é simé trica, porque os lados são iguais dois a dois. A resultante será mesma não importanto a ordem com que façamos a transferência dos segmentos: $a+b=b+a$.

q.e.d .

Precisamos de um elemento neutro para a adição. Um segmento que somado a qualquer outro, reproduza o outro. Este "segmento" será um "segmento degenerado" que se reduz a um ponto, a origem O que divide a reta em duas semi-retas.

Agora, aplicar a regra do paralelogramo a um vetor qualquer, para soma o zero, significa que o paralelograma vai se reduzir ao próprio vetor, (novo paralelogramo degenerado), e o vetor coïncide com a resultante: quer dizer a soma com zero, reproduz o outro vetor. Demonstramos assim:

Teorema **44** *O zero é o elemento neutro da soma.*

Teorema **45** *Todo* $x \in \mathbf{R}$ *tem inverso aditivo. O inverso aditivo de* x *é o outro número real determinado pelo círculo de raio* $|x|$ *e centro* 0*. Porque os dois segmentos* $\overline{0x}$ *e* $\overline{0(-x)}$ *tem mesmo tamanho, mas sentidos contrá rios, ao serem superpostos o ponto determinado será*0.

E agora um teorema complicado de demonstrar, claro que nós não vamos fazê-lo, o deixaremos para o leitor interessado:

Teorema **46** *A adição é associativa.*

A conclusão é que:

Teorema **47** $(\mathbf{R}, +)$ *é um grupo comutativo.*

Vamos terminar esta seção mostrando que a adição geométrica é compatível com a adição usual de números inteiros ou racionais, portanto é uma estensão da adição de $\mathbf{Q}$ ao conjunto $\mathbf{R}$.

Teorema **48** *Compatibilidade da soma geometrica com a soma de inteiros* **Dem** *:*
Para os inteiros, como cada inteiro n *determina na reta orientada um segmento de reta cujo comprimento é* n *vezes o tamanho do segmento* 01 *vemos que* n *significa uma soma repetida de* 01 *conseaquentemente a soma dos inteiros* n, m *será também uma soma de segmentos de reta.* **q.e.d .**

No caso dos racionais, já interpretamos $\frac{p}{q}$ como segmentos de reta de comprimento $\frac{1}{q}$ logo $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ será uma soma de segmentos de reta de comprimento $\frac{1}{qn}$. Demonstramos assim:

Teorema **49** *Compatibilidade da soma geometrica com a soma em* $\mathbf{Q}$

Como os inteiros, os racionais determinam segmentos de reta, a desigualdade como foi definida, coïncide com a desigualdade de $\mathbf{Q}$ e de $\mathbf{Z}$. Isto demonstra:

Teorema **50** *Compatibilidade da ordem de* $\mathbf{R}$ *com a ordem de* $\mathbf{Q}$

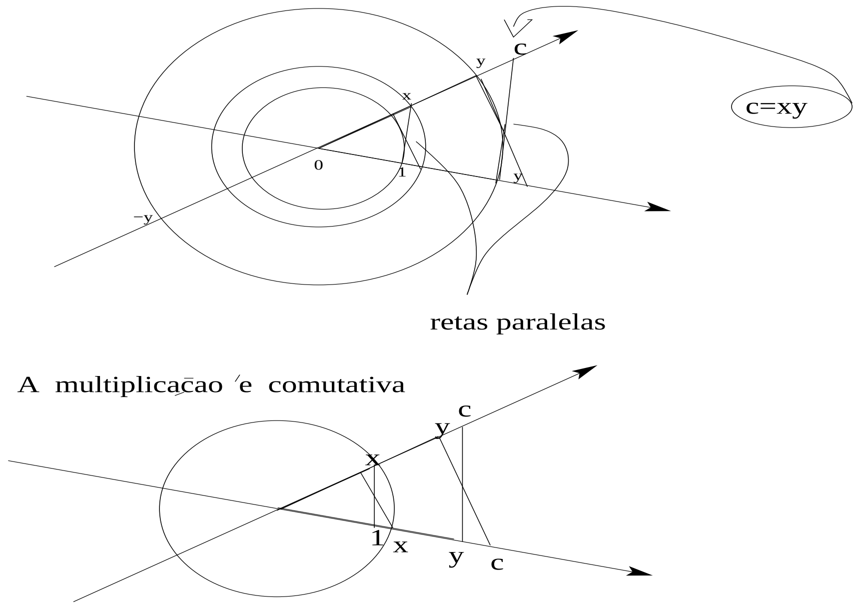

Figura 5.7: A multiplicação geométrica

5.2.2 A multiplicação em R.

Vamos agora definir a multiplicação geométrica. Acompanhe o texto da definição com figura (fig. 5.7) página 137. A definição da multiplicação, acompanha o texto [2].

Definição 44 *De multiplicação geométrica. A definição da multiplicação, se faz de acordo com o seguinte algoritmo:*

- *Dados* $x, y \in \mathbf{R}$.
- *Considere duas cópias da reta númerica, concorrentes na origem.*
- *Considere* x *em uma das cópias e* y *na outra.*
- *Trace o segmento de reta* $\overline{x1}$ *ligando* x *a unidade representada na reta em que* y *está marcado.*
- *Passe uma parela ao segmento* $\overline{x1}$ *passando por* y.
- *O ponto* c *determinado por esta paralela na reta em que* x *está marcado é o produto de* x *por* $y; c = xy$.

A multiplicação está baseada em triângulos semelhantes.

A única propriedade trabalhosa é a associatividade que vai implicar num desenho complicado. Apenas trabalhosa, porisso vamos deixá-la generosamente para o leitor interessado.

Vamos mostrar as demais propriedades.

Teorema **51** *A multiplicação é comutativa*

$$xy = yx$$

Dem: *Os triângulos 0yc desenhados em (fig. 5.7) veja o detalhe naquela figura, são iguais.* **q.e.d .**

Teorema **52** *Existe um inverso multiplicativo* **Dem**: *Se $x \neq 0$ a construção feita na (fig. 5.8) pode ser feita uma vez que será possível traçar paralelas.*

A existência do inverso está demonstrado na figura (fig. 5.8) página 138. Os passos executados foram:

1. *Traçamos uma reta ligando x com a unidade na outra reta.*

   Observe que $x = 0$ pertenceria a ambas as reta e portanto a frase anterior ficaria âmbigua *e portanto impossível de ser executada. Algoritmos não admitem ambiguidades, portanto $x = 0$ não tem inverso.*

2. *Traçamos, pela unidade marcada na mesma reta em que está x marcado, uma paralela.*

3. *Esta paralela vai encontrar o número c tal que*

$$xc = 1 \equiv c = \frac{1}{x}$$

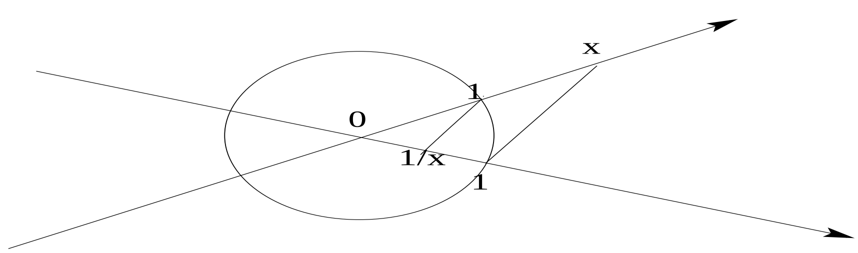

Figura 5.8:

q.e.d .

Teorema **53** *Elemento neutro da mulplicação* **Dem**:

Existe uma única reta passando por $x, 1$. **q.e.d .**

A conclusão é que

Teorema **54** $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ *é um grupo comutativo.*

Observação 26 *Grupo dos reais positivos.*
Observe que o conjunto dos números reais positivos, estritamente positivos, també m é um grupo com a multiplicação. É o subgrupo do grupo de $\mathbf{R}^*$.

Os comentários que fizemos sobre a adição e sua significação geométrica em $\mathbf{Q}$ se aplicam aqui para a multiplicação.

5.2.3 O corpo ordenado $(\mathbf{R}, +, \cdot, \geq)$.

Já estudamos as propriedades aditivas e multiplicativas de $\mathbf{R}$, falta-nos estudar as propriedades que relacionam a adição com multiplicação e estas operações com a relação de ordem.

Teorema **55** *O produto é distributivo relativamente à adição.* **Dem**:
Como a nossa fonte de informações é a geometria, junto com o conjunto dos números naturais, então vamos usar o cálculo de á reas para verificar a distributividade. Teriamos que definir área:

Definição 45 *Área de um retângulo.*
É o produto dos números reais que medem os lados deste retângulo.

Suponhamos agora que tenhamos um retângulo de lados c *e* $a+b$, *quer dizer que um dos lados do retângulo se compõe da soma geomé trica de dois segmentos cada um deles medindo* a *e* b *respectivamente, e o outro lado temos um segmento medindo* c.
Quer dizer que podemos decompor este retângulo em dois outros retângulos, um com lados medindo c *e* a *e outro com lados medindo* c *e* b.
As áreas destes dois novos retângulos é ac *e* bc. *Como eles são disjuntos, suar áreas se podem somar:* $ac + bc$ *é área do retângulo inicial.*
Mas a área do retângulo inicial seria também $c(a+b)$ *logo:*

$$c(a+b) = ca + cb = ac + bc$$

q.e.d .

Teorema **56** *Desigualdade e adição.* **Dem**: *Dados tres números reais* a, b, c *se* $a \leq b$ *então* $a + c \leq b + c$. *Por definição, (verifique que é mesmo),* $a \leq b$ *significa que* a *está esquerda de* b *na reta. Como a soma é uma translação, então se transladarmos* a, b *no mesmo sentido e do mesmo tamanho, os pontos resultantes vão guardar a mesma posição relativa, então* $a + c$ *estará à esquerda de* $b + c$ *isto é:* $a + c \leq b + c$. **q.e.d .**

Teorema **57** *Desigualdade e multiplicação. Dados tres números reais* a, b, c *se* $a \leq b$ *e* $c \geq 0$ *então* $ac \leq bc$. *Se* $c \leq 0$ *então* $ac \geq bc$. **Dem**: *Precisamos do seguinte lema:*

Lema *3* *Produto de positivos é positivo Tome* x, y *em cada uma das semiretas positivas que se encontram em* 0. *Como o triângulo determinado por* $0, y, xy$ *é semelhante ao triângulo deteminado por* $0, 1, x$ *então* xy *está na mesma semireta que* x, *quer dizer que* $sign(x) = sing(xy)$.

Agora,

$$a \leq b \equiv b - a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c(b-a) \geq 0 \equiv cb - ca \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ca \leq cb$$

q.e.d .

Ou como se diz, *multiplicar por um número positivo uma desigualdade, não altera o sentido da mesma, mas multiplicar por um número negativo, altera o sentido da desiguldade.*

Exercício 16 *Solução geométrica de equações.*

1. *Dados dois nú meros a, b reais positivos, encontre o número x tal que $ax = b$, geometricamente.*

2. *Use o fato "todo segmento de reta tem um comprimento" para mostrar que dado $x \in \mathbf{R}^+$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$.*

3. *Mostre que dado $x \in \mathbf{R}^+$, existem $n, m \in \mathbf{N}$ tal que*

$$m \leq x \leq n.$$

   O número m se chama parte inteira de x .

4. *Propriedade arquimediana da reta Dados $a \leq b$; $a, b \in \mathbf{R}$ existe uma número natural n tal que $an \geq b$.*

5. *Resolva as desigualdades abaixo usando as propriedades de $\mathbf{R}$.*

   (a) (a) $3x + 7 = 0$ (b) $3x + 7 \leq 0$
   (b) (a) $-2x + 7 \geq 0$ (b) $-3x - 5 \geq -3$
   (c) (a) $\frac{3x-7}{4} = 3$ (b) $x - 7 \geq -3$
   (d) (a) $-\frac{2x-7}{3} \leq 0$ (b)$-3x + 7 \geq 0$

6. *Represente geometricamente as soluções das desigualdades da questão anterior.*

7. *Encontre os pontos de $\mathbf{R}$ x $\mathbf{R}$ tal que*

   (a) (a) $x + y = 0$ (b) $x - y \leq 0$
   (b) (a) $-x - y \geq 0$ (b) $-3x - 5y \geq -3$
   (c) (a) $\frac{3x-7y}{4} \leq 3$ (b) $x - 2y \geq -3$
   (d) (a) $-\frac{2x-y}{3} \geq 0$ (b)$x - y \geq 0$

8. *Represente geometricamente as soluções das desigualdades da questão anterior.*

9. *Encontre os pontos de $\mathbf{R}$ x $\mathbf{R}$ tal que*

   (a) (a) $x^2 + y^2 = 3$ (b) $x^2 + y^2 \leq 3$
   (b) (a) $x^2 + y^2 \geq 2$ (b)$4x^2 + 4y^2 \leq 3$
   (c) (a) $\frac{3x-7y}{4} \leq 3$ (b) $x - 2y \geq -3$
   (d) (a) $-\frac{2x-y}{3} \geq 0$ (b)$x - y \geq 0$