Parte II

Decomposição de matrizes

Uma das características da ciência, e em particular das *estruturas* em Matemática é a busca de elementos simples com os quais podemos gerar todos os elementos de um determinado espaço, por exemplo,

- na Física as particulas básicas, átomos, protons, neutros e diversas outras (mas não muitas) que compõem toda a matéria, ou a energia, que é um estado da matéria;
- os elementos químicos com os quais podemos compor *todo o restante da matéria que existe no Universo*, mineral ou biológica, porém eles mesmos feitos com as partículas básicas da Física;
- na biologia o ácido DNA constituido de apenas seis compostos químicos mas, que, nos seus diversos arranjos guardam todas as informações dos diversos tipos de células que compõem o corpo de qualquer ser vivo, mas os compostos químicos do DNA são construídos com os elementos químicos básicos;
- teoria da informação os *bytes* com que podemos registrar, transmitir, toda a informação que conhecemos, como textos, arquivos de computador, fotografias etc..
- Os algarismos básicos de um sistema de numeração com so quais construímos todos os demais números, mas também representamos os algarismos básicos com *bytes*;
- na Álgebra Linear os vetores básicos que geram um espaço vetorial, ou matrizes mais simples com as quais podemos construir outras matrizes.

De forma analóga, se busca encontrar matrizes *simples* dentro as muitas que representam uma *transformação linear*, este é o objetivo deste capítulo e do próximo.

Capítulo 5

Autovalor e autovetor

A solução de um sistema de equações lineares implica em uma série de operações com matrizes nos levando a discutir *formatos especiais* para as matrizes, como matrizes triangulares e um caso especial destas, as matrizes escalares,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

que tem elementos diferentes de zero apenas sobre a diagonal principal. Como temos feito até agora, estamos os concentrando em matrizes quadradas, as outras matrizes tem a sua teria dedutível destas.

5.1 Autovalor e autovetor

O primeiro laboratório deste capítulo deve conduzí-lo a entender o significado dos autovalores e seus correspondentes autovetores. A tônica será dada aos exemplos e pequenos experimentos. O método consiste em usar matrizes diagonais e escalares, aquelas que somente tem entradas não nulas em cima da diagonal principal, estas matrizes estão associadas ao problema dos *autovalores* ou dos *autovetores*. Nestas matrizes os autovalores aparecem explicitos.

5.1.1 Primeiros exemplos de autovalor e autovetor

As duas formas para matrizes, *diagonal* ou *escalar* são as formas mais simples que uma matriz pode assumir, e o *problema* é que nem sempre podemos conseguir este formato para uma matriz qualquer. Neste capítulo vamos estudar quando isto é possível e quais as consequências desta possibilidade.

Laboratório 15 *Matrizes escalares*

1. *matriz escalar* Considere a matriz $\mathcal{T} = 3 * \mathcal{I}$ em que $\mathcal{I}$ representa a matriz identidade $3 \ \text{x} \ 3$. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

   (a) Para todo vetor $x \in \mathbf{R}^3$; $\mathcal{T}x = x$

   (b) Para todo vetor $x \in \mathbf{R}^3$; $\mathcal{T}x = 3x$

   (c) $Ker(\mathcal{T}) = \{0\}$

   (d) $Im(\mathcal{T}) = \mathbf{R}^3$

   (e) $\mathcal{T}$ expande o $\mathbf{R}^3$ de três unidades.

   (f) $\mathcal{T}$ contrái o $\mathbf{R}^3$ de $\frac{1}{3}$.

2. *matriz escalar* Considere a matriz $\mathcal{T}$ cujas entradas são todas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ. Uma matriz deste tipo se chama escalar. Verifique que $\mathcal{T}x = \lambda x$. Ou seja $\mathcal{T}$ expande o espaço inteiro, por igual, com o fator de expansão uniforme λ. Expande *ou* contrai, *conforme* $\lambda > 1$ *ou* $\lambda < 1$.

3. *matriz escalar*

   (a) Escreva a matriz que expande o $\mathbf{R}^4$ de 5 unidades.

   (b) Escreva a matriz que contrái o $\mathbf{R}^3$ com o fator 0.5.

   (c) Escreva a matriz que multiplica todos os vetores do $\mathbf{R}^3$ por -1.

4. *matriz escalar* Verifique a identidade

$$\mathcal{T} = \lambda \mathcal{I}$$

   se a matriz $\mathcal{T}$ for a matriz escalar que tem todas as entradas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ. $\mathcal{I}$ representa a matriz identidade.

5. *matriz diagonal* Considere a matriz $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definida no $\mathbf{R}^3$ com a base

$$e_1 = (1,0,0), e_1 = (1,0,0), e_3 = (0,0,1)$$

   Verifique quais das afirmações são verdadeiras

   (a) $\mathcal{T}$ expande o subespaço $[e_1]$ com o fator 3.

   (b) $\mathcal{T}$ expande o subespaço $[e_3]$ com o fator -2.

   (c) $\mathcal{T}$ expande o subespaço $[e_2]$ com o fator 3.

   Resposta: *errada, (a)*

6. *matriz diagonal* Considere a matriz $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definida no $\mathbf{R}^3$ com a base

$$e_1 = (1,0,0), e_1 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)$$

Verifique quais das afirmações são verdadeiras

   (a) $\mathcal{T}$ *expande o subespaço* $[e_1]$ *com o fator* 2.

   (b) $\mathcal{T}$ *expande o subespaço* $[e_3]$ *com o fator* -2.

   (c) $\mathcal{T}$ *expande o subespaço* $[e_2]$ *com o fator* 3.

   Resposta: *erradas, (b), (c), a base foi mudada!*

7. *matriz diagonal* Na matriz $\mathcal{S}$ todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considere em $\mathbf{R}^n$ a base

$$\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$$

Uma matriz deste tipo se chama diagonal. *Mostre que* [1]

$$\mathcal{S}x = \lambda_i x \Longrightarrow\Longleftarrow x \in [e_i]$$

8. *matriz diagonal* Na matriz $\mathcal{S}$ todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considere em $\mathbf{R}^n$ a base

$$\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$$

Mostre que

$$\mathcal{S} = \lambda\mathcal{I}$$

não é uma identidade e sim uma equação. Encontre as n *soluções desta equação.*

9. *equação característica*

   Definição 25 *Equação característica*

   Dada uma matriz n x n $\mathcal{S}$ *a expressão*

$$\det(\mathcal{S} - \lambda\mathcal{I})$$

é uma equação polinomial chamada equação característica *associada à matriz* $\mathcal{S}$.

[1] As matrizes escalares são um caso particular de matrizes diagonais com o mesmo escalar em todas as posições da diagonal

Para cada uma das matrizes $\mathcal{S}$ abaixo, resolva a equação característica

$$\det(\mathcal{S} - \lambda \mathcal{I})$$

na variável λ.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *j)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

10. *Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras para uma matriz $\mathcal{S}$ de dimensão n x n*

    (a) *A* equação característica *é de grau maior do que n*

    (b) *A* equação característica *é de grau menor do que n*

    (c) *A* equação característica *é de grau menor ou igual a n.*

11. *expansão de subespaço*

    Analise o resultado do item anterior e conclua se é verdade que

    (a) *a matriz $\mathcal{S}$ expande uniformemente o espaço gerado pelo vetor e_i. Dê exemplo que apoie sua resposta.*

    (b) *a matriz $\mathcal{S}$ expande de forma diferente os espaços gerados pelos vetores e_i e e_j se $i \neq j$. Dê exemplo que apoie sua resposta.*

12. *deformações geométricas*

    (a) *Verifique que a matriz* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *transforma círculos de centro na origem e raio r em círculos de centro na origem de raio $3r$.* **Sugestão** *As equações paramétricas de um círculo de centro na origem são $(rcos(t), rsen(t))$.*

    (b) *Verifique que a matriz* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *transforma círculos de centro na origem em elipses com* taxa de distorção $\frac{3}{4}$.

13. *matriz diagonal* *Na matriz $\mathcal{S}$ todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Considere em $\mathbf{R}^n$ a base*

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (1, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (1, 1, \ldots, 1)\}$$

    (a) *Mostre que*

$$\mathcal{S}x = \lambda_i x \Longrightarrow\Longleftarrow x \in [e_1]$$

(b) *Mostre que*

$$\mathcal{S}x = \lambda_i x \Longrightarrow\Longleftarrow x \in [e_i]$$

é falso para todo $i > 1$.

(c) *Escolha as opções certas:*

i. *A escolha da base no espaço altera o significado das matrizes.*

ii. *Um operador linear tem diversas matrizes que são a "cara matricial do operador" associada a uma determinada base escolhida para o espaço vetorial.*

iii. *Uma matriz representa um único operador linear.*

iv. *Um* operador linear *tem uma matriz que o representa.*

5.1.2 Autovalor: a definição e o método

Nos exercícios do *laboratório* nos fixamos na propriedade que têm alguns operadores lineares, aqui todos representados por matrizes, de expandir certas regiões do espaço nas quais eles atuam como se fossem *escalares*. O escalar λ que corresponde a esta expansão (ou contração) recebe um nome assim como o vetor expandido (na verdade o espaço espandido):

Definição 26 *Autovalor, autovetor Se para uma transformação houver algum vetor* $\vec{x}$ *tal que*

$$\lambda \neq 0; T\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

dizemos que λ *é* `autovalor` *de* $\mathcal{T}$ *e que* $\vec{x}$ *é um autovetor associado ao autovalor* λ. *Autovalores e autovetores também são chamados* `valores próprios` *e* `vetores próprios`.

As matrizes diagonais são formados de autovalores em sua diagonal quando a base do espaço for a base canônica

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Para determinar os *autovalores* somos levados a resolver a equação

$$\mathcal{T}x = \lambda x. \tag{5.1}$$

Um dos itens do *laboratório* nos conduziu a formas equivalentes desta equação:

$$\mathcal{T}x = \lambda\mathcal{I}x \Longleftrightarrow (\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I})x = 0$$

e é em geral a última forma que sempre usamos quando o operador linear estiver expresso sob forma de uma matriz. Como "queremos" ter soluções, na variável λ, diferentes da *trivial*

$$\lambda \neq 0$$

então concluímos que

$$\det(\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I}) = 0,$$

portanto o sistema homogêneo tem soluções não triviais. Demonstramos assim o teorema

Teorema **30** *Autovalores*

Dada uma matriz $\mathcal{T}$ as raízes da equação característica

$$\det(\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I})$$

são os autovalores *de $\mathcal{T}$*

A terminologia é confusa, em geral a terminologia em Matemática é mais precisa. As denominações

- autovalor
- valor próprio
- valor característico

se referem ao mesmo conceito, assim como

- autovetor
- vetor próprio
- vetor característico

e o que é pior, a equação algébrica de grau *menor ou igual* a n

$$\det(\mathcal{S} - \lambda\mathcal{I})$$

se designa *exclusivamente* por *equação característica* .

Neste livro vamos usar a terminologia *autovalor, autovetor e equação característica.*

Observação 13 *O autovalor nulo e o autovetor nulo*

Observe que a definição descarta o "autovalor" nulo, ele não acrescentaria nenhuma informação, produziria o núcleo do operador. Depois você verá que ele seria intútil para os objetivos que temos com o conceito de autovetor*, mas o núcleo pode ser agregado ao conjunto dos* autoespaços*. Esta é uma linha de ação que retomaremos ainda na* decomposição de um espaço *relativamente às propriedades de um operador.*

Por outro lado o vetor zero satisfaz à definição de autovetor com qualquer escalar:

$$T0 = \lambda 0.$$

Consequentemente vamos simplesmente considerá-lo um elemento de qualquer autoespaço *como uma complementação natural destes conjuntos. Sem o vetor zero eles não seriam espaços vetoriais.*

5.1.3 Estrutura dos autovetores associados a autovalores

No próximo laboratório faremos mais alguns experimentos para entender melhor o significado dos autovalores, quando eles existirem, e a estrutura do conjunto dos autovetores e do conjunto dos autovalores.

O conjunto dos *autovalores* é chamado de *espectro* de um operador linear e nos dá informações sobre o operador.

Também vamos ver que tem sentido alterar o sistema de referência do espaço, para *adotar uma base de autovetores* quando houver uma boa coleção de autovalores. Neste momento estamos perdidos por usar diretamente matrizes para representar os operadores lineares, mas logo retoremos a história pelo outro lado da descrição em que os operadores lineares terão expressões analíticas, não matriciais, neste momento a figura ficará inteiramente clara, quando separarmos os conceitos de *matriz* e *operador linear* .

Vamos introduzir uma definição que será necessária em um dos itens do *laboratório.*

Definição 27 *Matriz de mudança de base. Uma matriz $\mathcal{T}$ se diz de* `mudança de base` *se ela transforma $\mathcal{T}\vec{e}_i$ em $\vec{v}_i$ em que $(\{\vec{e}_i)_i, (\vec{v}_i)_i\}$ são duas bases do espaço.*

Definição 28 *Espectro de um operador linear*

O conjunto dos autovalores *de um operador linear T se chama de* espectro *de T e usamos a notação $\sigma(T)$ para nos referirmos a este conjunto.*

Laboratório 16 *Autovetores e base de autovetores*

1. *<u>Multiplicidade dos autovetores</u> Considere uma matriz $\mathcal{T}$.*
   - (a) *<u>múltiplo de um autovetor</u> Suponha que $\vec{u}$ seja um autovetor de $\mathcal{T}$ associado ao autovalor λ. Mostre que qualquer múltiplo de $\vec{u}$ também é um autovetor.*
   - (b) *<u>combinação linear de autovetores</u> Suponha que $\vec{u}_1, \vec{u}_1$ sejam autovetores de $\mathcal{T}$ associados ao autovalor λ. Mostre qualquer combinação linear $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_1$ é um autovetor de $\mathcal{T}$ associado a λ.*
   - (c) *Escolha a alternativa certa justificando sua resposta:*
     - i. *O conjunto E_λ dos autovetores de $\mathcal{T}$ associados a λ é um espaço vetorial;*
     - ii. *Se acrescentarmos o vetor zero ao conjunto E_λ dos autovetores de $\mathcal{T}$ associados a λ então E_λ se torna um espaço vetorial;*
2. *Encontre os autovalores e os autovetores associados à matriz*

$$1)\ \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Respostas

(a) *autovalores 4,2 ; autovetores (3,-1), (2,-1)*

(b) *autovalores -5, -8, 13 ; autovetores (5,-13,5), (8,8,-13), (1,1,1)*

Solução completa no capítulo final do livro.

3. *autovalores distintos*

   (a) *Suponha que o operador linear* T *tenha dois autovalores* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *e associados a estes autovalores, respectivamente, os autovetores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. *Mostre que o conjunto* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *é* l.i.

   (b) *hipótese de indução Suponha que o operador linear* T *tenha* $\underline{k > 2}$ *autovalores* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *distintos considere os autovetores respectivamente associados a estes autovalores,* $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.

   hipótese: os vetores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$. *são* l.i.. *Verifique que se* T *tiver mais um autovalor* λ_{k+1} *distintos dos demais, então o conjunto* $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$ *será também* l.i. *em que* $\vec{u}_{k+1}$ *é o autovetor associado a* λ_{k+1}.

4. *matriz sem autovalores*

   (a) *Verifique que a matriz de rotação real* $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ *não pode ter autovalores, nem autovetores, a não ser para exatamente para dois valores de* θ, *quais?*

   (b) *Verifique que esta matriz tem um autovalor, determiná-lo, se representar* $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$

5. *número máximo de autovalores Considere uma matriz* $\mathcal{T}$ *que representa um operador linear*

$$T : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$$

   (a) *Enuncie um teorema da Álgebra que garante que* T *tem exatamente* $\underline{n}$ *autovalores, com possível repetição.*

   (b) *Considere agora* $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$. *Decida quais das afirmações são corretas, e justifique*

      i. $\mathcal{T}$ *terá exatamente* $\underline{n}$ *autovalores;*

      ii. $\mathcal{T}$ *terá no máximo* $\underline{n}$ *autovalores;*

      iii. $\mathcal{T}$ *terá no mínimo* $\underline{n}$ *autovalores;*

6. espaço próprio *Suponha que haja dois* autovetores l.i. v_1, v_2 *associados ao* autovalor λ_1. *Mostre que os vetores do espaço*

$$[v_1, v_2],$$

gerado por estes vetores, são autovetores *associados a* λ_1.

7. *base de vetores próprios. A matriz* $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ *representa o operador linear* A *relativamente à base ortogonal*

$$\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$$

do $\mathbf{R}^2$.

   (a) *Encontre os* `autovalores` *de* $\mathcal{A}$ *e um par de* `autovetores` $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ *correspondendo aos* `autovalores` *encontrados, para matriz.*
   Resposta $\lambda \in \{3, 2\}; v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)$

   (b) *Verifique, e justifique, que*

$$\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)\}$$

   é uma base para o espaço $\mathbf{R}^2$.

   (c) *Resolva a equação linear, (use* `scilab`*),*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (d) *Decida qual das afirmações seguintes é verdadeira relativamente à matriz* $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *que você encontrou na solução do sistema anterior.*

      i. $\mathcal{T}$ *transforma a base* $\{e_1, e_2\}$ *na base* $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)\}$;
      ii. $\mathcal{T}$ *transforma a base* $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)\}$ *na base* $\{e_1, e_2\}$.

   Veja na figura (fig. 5.1) página 132,

   (e) *Calcule o produto* $\mathcal{T} * \mathcal{A} * \mathcal{T}^{-1}$ *e justifique o resultado.*

   (f) *Qual é a matriz de* A *relativamente a base de autovetores? Verifique as contas.*

   (g) *Encontre a matriz de mudança de base,* $\mathcal{M}$.

Vamos à síntese dos resultados do laboratório:

- multiciplidade dos *autovetores* Qualquer múltiplo de um autovetor associado a um determinado autovalor é também um autovetor.

- autoespaço Mais geralmente, se uma coleção de *autovetores* estiver associado a um *autovalor*, o espaço gerado por estes *autovetores* é formado de autovetores associados ao *autovalor*.

- equação característica Os *autovalores* da matriz $\mathcal{T}$ são as raízes da *equação característica*

$$\det(\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I})$$

$$
\begin{tikzcd}
E_V \arrow[r, "A"] & E_V \arrow[d, "T"] \\
E_f \arrow[u, "T^{-1}"] \arrow[r, "B"] & E_f
\end{tikzcd}
$$

$$B = TAT^{-1}$$

Figura 5.1: Matriz de mudança de base

- <u>inexistência de autovalores</u> Há equações polinômiais que não tem raizes sobre o corpo dos reais isto sugere que esta teoria somente pode ser bem aplicada se o corpo de base for o dos números complexos.

- <u>distintos autovalores</u> Se $\vec{u_1}$ for um autovetor associado a λ_1 e $\vec{u_2}$ for um autovetor associado a λ_2 então

  $$\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$$

  é um conjunto *l.i.*

Como os "experimentos"feitos foram de caracter "abstratos"nós assim provamos o teorema:

Teorema **31** *Matriz de autovalores*

Seja T um operador linear definido em $\mathbf{R}^n$ e consideremos as $\underline{m \leq n}$ *raízes da equação característica de T, os autovalores*

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$$

e um conjunto de autovetores correspondentes a estes autovalores

$$\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m$$

- *Se $m = n$ então a matriz de T relativamente à base*

  $$\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$$

é uma matriz diagonal contendo os autovalores

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n.$$

- *Se $m < n$ então podemos completar uma base para $\mathbf{R}^n$ a partir dos autovetores* l.i.

$$\underbrace{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m}, \underbrace{\vec{u}_{m+1}, \cdots, \vec{u}_n}$$

de tal modo que T tenha uma matriz relativamente a esta base (e não será 'unica), divida em blocos, um bloco-diagonal formado pelos autovalores e outro bloco de dimensão n x $n-m$ cujas colunas serão da forma $T(\vec{u}_j)$; $j > m$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_m & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

O teorema somente pode garantir o que obtivemos a partir de nossos experimentos. Por exemplo, os vetores

$$\vec{u}_{m+1}, \cdots, \vec{u}_n$$

podem estar no núcleo do operador T e neste caso os números $a_{k,j}$ que aparecem na matriz seriam todos nulos e

$$posto(\mathcal{T}) = posto(T) = m.$$

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **32** *Dependência linear e autovetores*
Sejam dois autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de um operador linear T. Dois correspondentes autovetores v_1, v_2 são linearmente independentes

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*
Por absurdo, vamos supor que v_1, v_2 sejam l.d.*, suponhamos que $v_1 = \alpha v_2$ para um determinado escalar α. Aplicando T temos*

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \tag{5.2}$$

$$T(v_1) = T(\alpha v_2) = \lambda_2 \alpha v_2 \tag{5.3}$$

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_2 \alpha v_2 \longrightarrow v_1 = \alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 = \alpha' v_2 \tag{5.4}$$

como $\alpha' \neq \alpha$, um absurdo logo v_1, v_2 são l.i. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Observe que um *corolário* deste *teorema* é os autoespaços, correspondentes a distintos autovalores, são diferentes e portanto podemos *decompor* o espaço em subespaços diferentes de acordo com um operador linear.

5.2 Exercícios sobre autovalor e autovetor

Exercícios 7 *Autovalor e autovetor*

1. *autovetor e operador diferencial* *Considere o operador diferencial*

$$L(y) = y''$$

.

   (a) *Verifique que os vetores*

$$y = sen(x)\ ; y = cos(x)$$

   são dois autovetores `l.i.` *de L. Identifique os* autovalores *aos quais eles estão associados.*

   (b) *Descubra um* autovetor *associado ao autovalor* 1 *para o operador L.*

   (c) *Fórmula de Abel-Euler* *Verifique que*

$$y = e^{ix}$$

   é um autovetor *de L, encontre a que* autovalor *está associado.*

   (d) *Verifique que $y = e^{ix}$ pertence ao espaço gerado pelos vetores $y = cos(x), y = sen(x)$.*

2. *Raizes racionais de polinômios*

   (a) *Prove que se*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$$

   com coeficientes forem inteiros, tiver uma raiz inteira $r \in \mathbf{Z}$ então r divide a_0

   Solução 5

$$\begin{gathered} P(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0 \\ a_n r^n + \cdots + a_1 r = -a_0 \in \mathbf{Z} \\ a_n r^{n-1} + \cdots + a_1 = -\frac{a_0}{r} \in \mathbf{Z} \end{gathered}$$

——————————————————

   (b)

   (c) *Prove que se*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$$

   com coeficientes inteiros e se $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ for uma raiz de P então p divide a_0 sendo p, q são primos entre si.
   Sugestão: *multiplique por q^n e use o item anterior.*

3. *aplicação de matrizes diagonais.*

   (a) *Suponha que* $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ *sejam os distintos componentes de um* `sistema econômico`*,*

   todos indispensáveis e independentes. A economia de um setor $\vec{v}$ *deste sistema, (*um munícipio, por exemplo, dentro de um pais*), caracteriza sua presença no* `sistema` *com os pesos* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *com que participam na produção:* $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$*. E os vetores são definidos pela relação*

$$\vec{e}_1 = \delta_{ij}$$

   Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \Longleftarrow i = j \ ; \ \delta_{ij} = 0 \Longleftarrow i \neq j$$

   formando um sistema ortogonal de vetores.

   Se o munícipio não produzir o item $\vec{e}_i$ *então* $x_i = 0$*. A matriz* T *memoriza a evolução do sistema em dois momentos. Suponha que o município* $\vec{v}$ *duplicou sua presença na economia com os produtos* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_7\}$*, não teve presença relativamente aos produtos* $\{\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_9, \vec{e}_{10}\}$*, e sua produção de* $\vec{e}_5$ *se reduziu a, metade, relativamente ao período anterior observado. Suponha que o número de itens da economia é 10, (sua dimensão). Determine a matriz* T *que memoriza a transição de um estado da economia* $\vec{v}$ *para o seguinte* $T\vec{v}$*.*

   (b) *planejamento político-econômico Considere a mesma terminologia anterior, mas agora consideremos que a matriz* T *com elementos diagonais* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *representa as taxas de juros aplicadas aos empréstimos de financiamentos na produção dos distintos componentes. Qual o significado econômico para o munícipio se o banco central estabelecer as taxas de juros* $\{\lambda_1 = 10\%a.m. = \ldots = \lambda_7 = 10\%, \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 1\%a.m.\}$*, não esquecendo que o munícipio* $\vec{v}$ *comparece na economia apenas com o intens* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_7$*.*

   (c) *Suponha que uma taxa de juros razoável seja de* $2.5\%a.a.$ *e que o planejamento econômico deseje estimular a produção dos itens* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5\}$*, desestimular a produção dos itens* $\{\vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_{10}\}$ *e manter estáveis os restantes. Como poderia ser a matriz* T*?*

4. *planejamento político-econômico Considere que um sistema de vetores ortogonais* $(e_i)_{i=1\cdots n})\ ;\ e_{ij} = \delta_{ij}$

   Considere que parte destes vetores representam as distintas profissões na economia, por exemplo, $i \leq n_1$ *e a outra parte, por exemplo,* $i > n_1$ *representam os produtos industriais. Considere a matriz* $\mathcal{T}$ *que distorce a economia com a inflação. Deduza que* $\mathcal{T}$ *é uma matriz diagonal e que* $\lambda_i > 1 \Longleftarrow i > n_1$ *e* $\lambda_i < 1 \Longleftarrow i \leq n_1$*.*

5. *Verifique a identidade*

$$\mathcal{A}x = \lambda x \equiv \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}x = 0$$

em que $\mathcal{I}$ é a matriz identidade compatível com $\mathcal{A}$.

6.

7.

8.