Capítulo 4

Sistemas de equações lineares II

O *teorema* deste capítulo se chama *teorema da imagem e do núcleo* e ele descreve como é a solução de uma sistema de equações lineares.
Este teorema nos diz tudo a respeito do *tamanho* do espaço-solução de uma equação linear.
Mais a frente no capítulo vamos estudar como é que se resolve uma equação linear, o problema é que nem sempre sabemos fazer as contas... Se o sistema for muito grande o tempo de computação pode ser proibitivo, isto para não considerar a precisão que se perde.
Portanto, para calcular mesmo, nos encontramos em franca área de pesquisa algoritmica na qual não vamos entrar neste livro, veja [**?**] e a bibliografia alí citada.

4.1 O Teorema da imagem e do núcleo

Vimos no (ex. 4), página 86 que as colunas de uma matriz geram a imagem da função linear que esta matriz representa. Se a matriz for quadrada podemos rapidamente deduzir daí a dimensão do núcleo e consequentemente ter uma idéia muito precisa de como são as soluções do sistema linear que esta matriz representa, é o que nos diz o *teorema da imagem e do núcleo*.

4.1.1 A imagem de uma matriz como função linear

Ao considerarmos um sistema como

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

temos:

- Uma função linear
$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n.$$

- Uma família de vetores, $a_1 \cdots a_n$, as colunas da matriz, linearmente combinados com os escalares $x_1 \cdots x_n$
$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$$
gerando $Im(T)$, a imagem de T.

- Se os vetores a_i não forem *l.i.* então este conjunto de vetores pode ser *simplificado* com a retirada de alguns que são combinação linear de outros, tornando o conjunto de vetores-linha (ou o conjunto dos vetores-coluna) um *conjunto linearmente independente*, Consequentemente a dimensão da imagem de T é menor que n.

- Uma consequência disto é que as linhas desta matriz também são *l.d.*, porque o determinante da matriz é zero, o $Ker(T)$ não é trivial, tem dimensão diferente de zero.

- Inversamente, se os vetores a_i forem *l.i.* então a dimensão do espaço $Im(T)$ é n o que significa que o determinante da matriz não é nulo, portanto o espaço $Ker(T) = \{0\}$, cuja dimensão é zero. Neste último caso temos a equação
$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 0 + n = n$$
que desejamos generalizar:

- Vemos que,
  - se a dimensão do núcleo *crescer*, a dimensão da imagem *decresce* ;
  - reciprocamente, se a dimensão do núcleo *decrescer*, a dimensão da imagem *cresce*.

Esta relação é de grande importância para entender a estrutura da solução dos sistemas lineares. Vamos fazer algumas definições para melhorá-la.

Definição 24 *Posto e liberdade*
Considere, como acima, que uma função linear T esteja definida por uma matriz.

- $\underline{dim(Ker(T))}$ *é chamada de* liberdade *do sistema de equações* $T(\vec{x}) = \vec{b}$.

- $\underline{dim(Im(T))}$ *é chamada de* posto *do sistema de equações (ou da matriz)*

Estamos aqui sugerindo que transformações lineares *sejam sempre definidas por matrizes. Em alguns dos exercícios, ao final deste capítulo, você irá ver que isto é falso. Mas, uma matriz sempre define uma* transformação linear.

Não é usual falarmos da *liberdade* de uma matriz, porque *posto* e *liberdade* estando conectados por uma equação, podemos deduzir a *liberdade* do *posto*. Em geral fala-se apenas do *posto*[1] de uma matriz.

Observação 12 *O significado da* liberdade

Se $dim(Ker(T)) \neq 0$ então há muitas soluções possíveis.

A palavra "muitas" tem pouco sentido[2] *uma vez que* muitas *são as soluções apenas se $dim(Ker(T)) \neq 0$. É preciso caracterizar melhor a* amplidão *do conjunto das soluções, usando o conceito de* dimensão *porque*

$$dim(Ker(T)) = 1, dim(Ker(T)) = 2$$

são distintos graus de liberdade, ambos com muitas soluções*, uma infinidade delas.*

- *liberdade = 0, quando a $dim(Ker(T)) = 0$, neste caso a solução, se houver, é um* **ponto***, é 'unica.*
- *liberdade = 1, quando a $dim(Ker(T)) = 1$, e se houver solução, então o espaço solução é uma* **reta***, qualquer solução é múltipla de uma solução particular $x_0 \neq 0$.* **Todas as soluções se encontram sobre a mesma direção***.*
- *liberdade = 2, quando a $dim(Ker(T)) = 2$, e se houver solução, então o espaço solução é um* **plano***, e, consequentemente, as soluções passam a ser geradas por duas soluções* l.i.*:* **há soluções em várias direções***.*
- *liberdade = 3, quando a $dim(Ker(T)) = 3$, e se houver solução, então o espaço solução é um* **espaço 3D***, e, consequentemente, as soluções passam a ser geradas por três soluções* l.i.*:* **há soluções em várias dimensões**.

liberdade é a dimensão da solução.

Liberdade e Posto

Há autores que propõem, simplesmente, a eliminação do conceito de *determinante*. Eles têm razão num ponto, o determinante é difícil de ser calculado, deixando de ser prático. Nós consideramos o determinante um instrumento teórico, não prático. Quando falarmos do *determinante* não pretendemos calculá-lo diretamente.

Para encontrar *liberdade* de uma matriz (ou de um sistema de equações associado a uma matriz) procuramos o maior subdeterminante não nulo desta matriz.

[1]Não é atôa que a '*liberdade*" depende diretamente do '*posto*".

[2]estamos fazendo referência à cardinalidade, se houver mais de uma solução a "quantidade" (cardinalidade) delas é a mesma, *muitas*, portanto o adjetivo *muito* é vázio de sentido, dimensão é que conta.

Vamos começar pensando numa matriz quadrada $\mathcal{A}$ cujo determinante seja zero. Isto significa que existe pelo menos uma linha desta matriz que pode ser escrita como combinação linear das outras e portanto esta linha pode ser anulada.

Método prático:

- *triangularize superiormennte a matriz*, anule todos as entradas abaixo da diagonal principal, e você vai encontrar todas as linhas que podem ser anuladas e assim calcular a liberdade da matriz: o número de linhas nulas, é a dimensão do núcleo.

- Ao mesmo tempo o complementar (o número de linhas complementar) é a dimensão da imagem.

Com esta notação, ou terminologia, vamos enunciar o resultado,

Teorema 28 *Teorema do núcleo e da imagem*

Se $\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$ *for uma função linear, então*

$$dim(Im(T)) + dim(Ker(T)) = n = posto(T) + liberdade(T)$$

Dem :

Considere a matriz $\mathcal{A}$ *e a transformação linear que ela representa* $\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right. \equiv \tag{4.2}$$

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b \tag{4.3}$$

que já interpretamos como sendo os vetores $a_1 \cdots a_n$ *expandindo a imagem,* $Im(T)$*. O número máximoa de vetores* l.i. *deste conjunto é o posto*$(\mathcal{A})$ **q.e.d .**

Laboratório 13 *Posto e liberdade*

1. *Calcule posto e liberdade das matrizes Use* octave *para verificar suas respostas.*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} cos(2) & -sin(2) & 0 \\ sin(2) & cos(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2. *Para cada uma das matrizes, $\mathcal{A}$, no exercício anterior, resolva o sistema de equações*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

considerando os vetores de dados:

a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ g) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ h) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

i) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ j) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ k) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ l) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. *Prove que a translação de uma reta por um ponto (vetor) é uma reta.*

4. *Considere $\underline{r}$, uma reta, e $x_0 \in r$ um ponto escolhido sobre a mesma. Se $x \in r$ representar um ponto arbitrário sobre a reta, verifique que o conjunto*

$$\{x - x_0 \; ; \; x_0 \in r\}$$

é uma reta paralela à reta r passando pela origem.

5. *Prove que a translação de um plano por um ponto (vetor) é um plano.*

6. *Considere* Π *um plano e* $x_0 \in \Pi$ *um ponto escolhido sobre o mesmo. Se* $x \in \Pi$ *representar um ponto arbitrário sobre o plano, verifique que o conjunto*

$$\{x - x_0 \ ; \ x_0 \in \Pi\}$$

   é um plano paralelo ao plano Π *passando pela origem.*

7. *Encontre as translações* $r + \vec{u}$ *em que* r *é a reta cuja equação se encontra abaixo e o vetor* $\vec{u}$ *se encontra indicado junto com a equação:*

   a) $3x + 4y = 0 \ ; \ \vec{u} = (1, 2)$ *b)* $3x + 4y = 0 \ ; \ \vec{u} = (-4, 3)$
   c)$(t, 2t, 3t) \ ; \ \vec{u} = (2, 3, 4)$ *d)* $(t, 2t, 3t) \ ; \ \vec{u} = (2, 4, 6)$

8. *Encontre as translações* $\Pi + \vec{u}$ *em que* Π *é o plano cuja equação se encontra abaixo e o vetor* $\vec{u}$ *se encontra indicado junto com a equação:*

   a) $3x + 4y + z = 0 \ ; \ \vec{u} = (1, 2, 3)$ *b)* $3x + 4y + z = 0 \ ; \ \vec{u} = (2, 3, -18)$
   c)$(t + s, s - t, t - s) \ ; \ \vec{u} = (2, 3, 4)$ *d)* $(t + s, t - s, s - t) \ ; \ \vec{u} = (2, 0, 0)$

4.1.2 Espaço vetorial afim

Nos exercícios trabalhamos com translações de retas e planos. Uma reta, ou um plano, que passe pela origem é um espaço vetorial. Uma translação de um espaço vetorial que não passe pela origem se chama *espaço vetorial afim.*

Generalizamos esta noção se retirarmos da frase anterior a restrição “não passe na origem” de formas que os espaços vetoriais também possam ser considerados *espaços vetoriais afins.*

Isto nos permite dizer que retas e planos são *espaços vetoriais afins*, simplesmente.

4.2 A solução de uma equação linear

Vamos fazer uma descrição “*abstrata* da solução de uma equação linear. O protótipo do problema é uma transformação linear

$$E \xrightarrow{T} F$$

em que E, F são dois espaços vetoriais. Esta forma de apresentar o problema serve inclusive para a discussão das equações diferenciais lineares, por exemplo. Faremos uso da última lista de exercícios como um laboratório em que o estudante desenvolveu a intuizção necessária à compreensão do problema.

Dada uma função linear $E \xrightarrow{T} F$ definida entre os espaços vetoriais E, F, veja o diagrama de Venn, figura (fig. 4.1), página 109, existe um conjunto que é *efetivo* relativamente à transformação T, a imagem, $Im(T)$ de modo que a equação

$$T(x) = b$$

somente terá solução se $b \in Im(T)$. Este é o primeiro passo na discussão de uma equação linear:

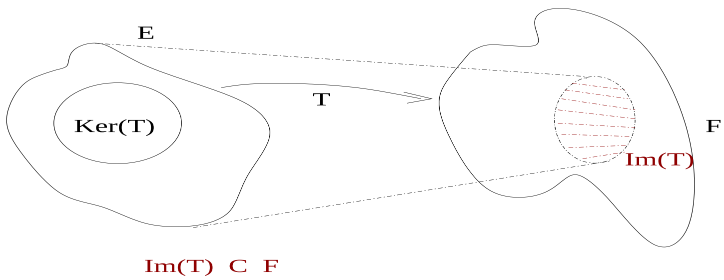

Figura 4.1: . Espaços de saída e de chegada

a verificação de se $$b \in Im(T) \; ; T(x) = b$$ se o vetor de dados está na imagem de T.

Quando consideramos uma *transformação linear*, a linearidade nos leva a um resultado muito especial, consequência direta de um resultado que já estudamos:

A solução de um sistema homogêneo é um espaço vetorial, é $Ker(T)$.

Suponha que conheçamos duas soluções particulares[3], x_1, x_2 de $T(x) = b$

$$T(x_1) = b, T(x_2) = b.$$

Calculando a diferença destas equações

$$T(x_1) - T(x_2) = b - b = 0 = T(x_1 - x_2) \tag{4.4}$$

portanto a diferença de duas *soluções particulares* é solução da equação homogênea.

Como as contas valem para duas soluções quaisquer, vamos escrever as contas novamente assim

$$T(x_0) - T(x) = b - b = 0 = T(x_0 - x) \tag{4.5}$$

cujo significado agora é que nos fixamos em uma solução particular, x_0, que obtivemos de alguma forma, e uma outra solução x, que *deve* existir, se $Ker(T) \neq 0$ (ou equivalentemente $dim(Ker(T)) \geq 1$), discutiremos em seguida o caso em que $dim(Ker(T)) = 0$.

Temos:

$$T(x_0 - x) = 0 \equiv T(x - x_0) = 0 \tag{4.6}$$
$$x - x_0 \in Ker(T) \tag{4.7}$$
$$x \in Ker(T) + x_0 \tag{4.8}$$

e podemos, agora, fazer a conta que podemos traduzir com as palavras "x pertence a uma translação x_0 do núcleo de T. Veja isto expresso na na figura (fig. 4.2) página 112, quando $dim(Ker(T)) = 1$.

Observe que as contas que fizemos assim nada tem de particular, apenas a figura feita sob a hipótese de que $dim(Ker(T)) = 1$ para que obtivessemos um gráfico compreensível.

Numa linguagem algoritmica, o méotodo para resolver equações lineare é

- Considere a equação linear

$$T(x) = b\ ;\ E \xrightarrow{T} F$$

- primeiro passo: Verificamos se $b \in Im(F)$;
- segundo passo: Procuramos uma solução particular x_0 da equação, por exemplo, escalonamos a matriz se tivermos uma equação matricial[4].
- terceiro passo: Procuramos o $Ker(T)$, se a equação for matricial, calculamos o posto da matriz e usando o Teorema do núcleo e da imagem, calculamos a dimensão de $Ker(T)$.

[3]estas palavras soam naturais para quem já estudou equações diferenciais lineares...
[4]equações lineares não precisam ser matriciaias, podem ser equações diferenciais...

- <u>parte final:</u> A solução da equação será

$$Ker(T) + x_0$$

. Na figura (fig. 4.2) a solução é a reta $Ker(T) + x_0$ paralela a $Ker(T)$ passando pelo ponto x_0 que é uma solução particular da equação.

Desta forma provamos o teorema

Teorema 29 *Solução de equações lineares*
Se

$$E \xrightarrow{T} F$$

for uma função linear então a equação linear

$$T(x) = b$$

tem solução somente se

$$b \in Im(T)$$

e neste caso a solução geral será uma translação do núcleo,

$$Ker(T) + x_0,$$

em que x_0 é uma solução particular da equação.

4.2.1 Quando $dim(Ker(T)) = 0$

Se $dim(Ker(T)) = 0$ então $Ker(T)$ é o ponto $\{0\}$, o espaço vetorial trivial. Vale o teorma (Teorema 29) nos mesmos termos como se encontra enunciado, mas neste caso a solução resume a $x0$ que é a translação

$$Ker(T) + x_0 = \{0\} + x_0.$$

Neste caso a solução é 'unica. Se a equação for matricial, então o determinante da matriz é diferente zero e ela poderá ter uma forma triangular equivalente com todos os elementos da diagonal diferentes de zero conduzindo o sistema de equações a uma única solução.

4.3 Independência linear das soluções

Vamos dar mais passo na compreensão dos sistemas de equações lineares e como consequencia final teremos a demonstração *Teorema do Núcleo e da Imagem* que ainda lhe estamos devendo.
Começaremos com um *laboratório* em você vai se treinar com as idéias básicas que precisaremos.

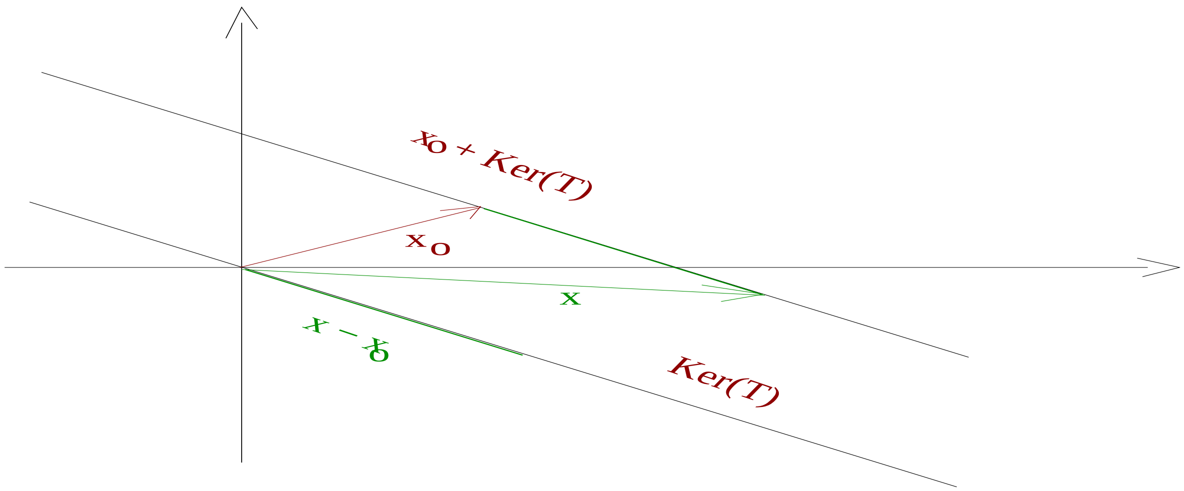

Figura 4.2: Translação do núcleo

Laboratório 14 *Sistemas linear, estrutura da solução*

1.

2.

4.4 Base e matriz

A mudança do referencial no espaço vetorial altera a matriz de uma transformação linear, mas não altera a solução de uma equação linear porque não modifica *o problema* que a matriz representa, *modela*. Em outras palavras, a *matriz* de uma transformação linear é consequência da escolha de uma base, ela é uma forma de *modelagem do problema*.
Veremos mais a frente que isto pode ser usado com o objetivo de encontrarmos uma matriz mais simples para uma determinada transformação ou ainda melhor, podemos procurar a *base* em que uma determinada transformação linear tem uma matriz mais simples.

Em 1985, (a data não é precisa), Ingrid Daubechies encontrou uma *base* adequada às ondas sonoras como elas são percebidas pelo ouvido humano[a] este fato alterou algoritmos até então usados nas telecomunicações: a escolha de uma base adequada. O assunto é *wavelets*, ver [14], onde mais bibliografia pode ser encontrada. Vamos ver a parte elementar deste assunto aqui.

[a] para descrever, ou modelar as ondas sonoras

Já vimos que as colunas de uma matriz $\mathcal{T}$, geram a imagem, $Im(T)$, em que

$$E \xrightarrow{T} F$$

é a transformação linear que $\mathcal{T}$ representa.

Vamos tornar este tópico mais preciso partindo de uma base escolhida para nos espaços E, F.

O cenário que nos interessa aqui é o seguinte:

- Consideramos dois espaços vetoriais E, F de dimensão finita, e neles escolhemos as bases
$$e = \{e_1, \cdots, e_n\} \text{ base de } E$$
$$f = \{f_1, \cdots, f_m\} \text{ base de } F$$
- Consideramos a transformação linear
$$E \xrightarrow{T} F$$

A linearidade de T nos permite, dado um vetor $u \in E$ escrever sucessivamente:

- $$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$
- $$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i)$$
- Mas, para cada i, $T(e_i) \in F$ e portanto pode ser expandido relativamente à base $\underline{f}$ o que nos permite escrever, para cada i
$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j$$
- Se substituirmos esta última soma na soma anterior, vamos obter
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f_j$$
- Mas para cada par de índices (i, j) o produto $\alpha_i \beta_j$ é um número que podemos chamar $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$ e assim encontramos uma matriz que tem $m = dim(F)$ linhas e $n = dim(E)$ colunas, uma matriz m x n

Esta matriz $\mathcal{A} = (a_{ij})$ é a representação matricial da transformação linear T relativamente às bases $\underline{e, f}$ escolhidas para os espaços $\underline{E, F}$.

4.5 Exercícios resolvidos

Um *exercício resolvido* é uma *pequena teória* para a qual os autores não conseguiram encontram local exato no texto, e que ao mesmo tempo consideram que o esforço pessoal do leitor para construí-la é uma contrinuição para o seu desenvolvimento. Você fica, assim, convidado a tentar sempre resolver os exercícios antes de ler a solução e possivelmente não se conformar com a solução aqui apresentada.

Nos exercícios abaixo, a menos que o contrário seja indicado, a base do espaço vetorial $\mathbf{R}^n$ é a *canônica*

$$(1, 0, \cdots 0) \cdots (0, 0, \cdots, 1)$$

Exercícios 6 *Sistemas Lineares*

1. *Compostos químicos, [4]* [5] *Considere a reação química descrita no (ex. 8, página 61). Resolva o sistema linear que rege a reação química que deriva do tolueno C_7H_8 e ácido nítrico HNO_3 o trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ mais água,*

$$xC_7H_8 + yHNO_3 \longrightarrow zC_7H_5O_6N_3 + wH_2O.$$

   e justifique (quimicamente) a multiplicidade de soluções encontradas, se você for estudante de química. Os autores agradecem algum comentário a respeito.

2. *espaço de polinômios. Seja $\mathbf{R}_2[x]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Mostre que a função derivada*

$$F : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x] \; ; \; D(P) = P'$$

   é uma função linear e encontre a matriz $\mathcal{A}$ de D relativamente a base

$$1, t, t^2.$$

   Resposta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

3. *espaço de polinômios. Seja $\mathbf{R}_2[x]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Defina em $\mathbf{R}_2[x]$ a função*

$$F : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x] \; ; \; F(p(t)) = (2t - a)p(t + 1) - t^2 p'(t)$$

   em que $\underline{a}$ é um número real dado.

   (a) *Prove que F é linear.*

[5] Compostos químicos aqui citados são danosos para a saúde, o objetivo é apenas exemplificar o uso de sistemas lineares. ver http://www.atsdr.cdc.gov/es/toxfaqs/es_tfacts56.html

(b) *Encontre a matriz $\mathcal{A}$ de F relativamente à base*

$$1, t, t^2$$

(c) *Calcule $Ker(F)$*

4. *<u>Estocolmo, 13/01/2003</u> Encontre o coseno do ângulo agudo entre a reta de equação*

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, 2)$$

e o plano de equação

$$x = 2 + t + s, y = 3 - t + s, z = 4 + t + 2s$$

Considere no espaço $\mathbf{R}^3$ a base canônica

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

5. *Considere uma sucessão de matrizes definida recursivamente por*

$$A_{n+1} = A_n^2 \; ; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Descubra a expressão geral para a matriz A_n e prove que sua hipótese é correta.

6. *Resolva, o sistema abaixo e discuta sua solução para cada número real <u>a</u>*

$$\begin{cases} x - y + z & = a \\ x + y + 3z & = a + 2 \\ 2x - 2y + (a+1)z = (a+1) & \end{cases}$$

7. *<u>operador diferencial linear</u> Verifique que a equação diferencial*

$$y'' + py' + qy = 0$$

é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} y' = & z \\ z' = & -py' - qy = -pz - qy \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\tag{4.11}$$

e consequentemente pode ser escrita em forma matricial. Obtenha a forma matricial equivalente deste equação.

8. *<u>Discretização de um sistema</u> Considere uma função*

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbf{R}$$

que representa uma força potencial, por exemplo o conjunto das forças atuando sobre um prédio, gravidade, ventos, peso da estrutura. Uma estrutura metálica, ver figura (fig. 2.4) página 63, pode ser concebida como uma discretização da estrutura e podemos modelar a atuação de F a partir das taxas de variação aplicadas nos nós da estrutura metálica (discretização). Na figura considerada existem 8 nós e considere $(\frac{\partial F_k}{\partial e_1}, \frac{\partial F_k}{\partial e_2}, \frac{\partial F_k}{\partial e_3})$ seja estas taxas de variação no nó x_k. Interprete

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

em que as derivadas parciais estão sendo calculadas no ponto (a_1, a_2, a_3) Na figura (fig. 2.4) você pode ver algumas dessas forças, $(f_{3,x}, f_{3,y})$, representadas.

Se interpretarmos

$$f_{k,x} = \frac{\partial F}{\partial e_k}$$

podemos dizer que a figura (fig. 2.4) representa a discretização de um sistema, por exemplo da gravidade, obtido com a análise estrutural feita nos 8 nós considerados

(a) *Escreva a matriz $\mathcal{A}, 8 \ \text{x} \ 3$ que descreve este sistema.*
(b) *Se o sistema for estático (sem movimento) então a resultante é zero. Expresse isto com um sistema linear.*

Solução 3 *(a)*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

(b)

———————————————————

9. *Considere uma matriz da forma*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

em que A_i, B_i, C_i são números[6] *reais (ou complexos). Prove que o sistema*

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem pelo menos uma reta como solução.

[6] e poderiam ser outra coisa ?

Solução 4 *Todo sistema homogêneo (quando a matriz dos dados é nula) tem pelo menos uma solução que é o zero.*

Podemos completar esta matriz com $A_3 = 0, B_3 = 0, C_3 = 0$ sem alterar o significado do problema que ela representa *deixando agora claro que* $\det \mathcal{A} = 0$ *e portanto que núcleo,* $ker(\mathcal{A})$*, tem dimensão maior ou igual a 1.*

Por exemplo se tivermos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

A dimensão do núcleo é 1 quer dizer que as soluções são retas passando por um ponto (solução particular). A dimensão da imagem - o espaço dos dados, é dois, qualquer ponto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ *é um dado válido para este sistema de equações e a solução é reta perpendicular ao plano* XOY *passando pelo ponto* (a, b)*.*

Outro exemplo, considere o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

*** aqui*