Capítulo 2

Sistemas de equações lineares I

Um bom exemplo do que é uma matriz surge quando representamos a multiplicação complexa como uma transformação do plano:

$$u = (a, b) \equiv a + bi \tag{2.1}$$
$$z = x_1 + x_2 \mapsto uz = (a + bi)(x_1 + x_2 i) = y_1 + y_2 i = w \tag{2.2}$$
$$\mathbf{C} \ni z = x_1 + x_2 i \Rightarrow y_1 + y_2 i = w \in \mathbf{C} \tag{2.3}$$

vista agora como

$$(x_1, x_2) \mapsto A\binom{x_1}{x_2} = (y_1, y_2) \tag{2.4}$$
$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.5}$$

No primeiro caso, de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$ bastam-nos dois números $\underline{a, b}$ para caracterizar a operação. No segundo caso precisamos dos quatro números $\underline{a, -b, a, b}$ como coeficientes da transformação do plano no plano dispostos no formato retângular

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

A é a *matriz* dos coeficientes da transformação do plano representando o produto de números complexos.
Neste capítulo vamos trabalhar com as matrizes e as funções que ela *representam*, as *funções lineares*.

2.1 Matrizes

O ponto inicial vai ser a "tradução algébrica" de uma "questão geométrica". Aliás, esta disciplina que recém começamos neste capítulo, se encontra no seio de quase todos os processos importantes de *codificação* (e naturalmente de *decodificação*) necessários às nossas comunicações ou a simples guarda de dados.

Neste momento esta afirmação poderá lhe parecer *pedante* uma vez que não temos condições de nos explicar melhor[1] esta questão. Mas esperamos que até a metade do livro você já consiga ver claramente esta verdade e nós lhe pediremos que volte a refletir sobr ela, prometemos.

2.1.1 Um exemplo algébrico

Uma *conta* com números complexos,

$$(a + bi)(x + yi)$$

corresponde a um esquema de quatro números

$$a, b, x, y$$

que representa esta *conta* como uma transformação do *plano no plano*:

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{C} \ni (x, y) \mapsto (a + bi)(x + yi) = (ax + by) + (ay + bx)i \in \mathbf{C} \tag{2.8}$$

Uma questão *geométrica* representada por um *cálculo algébrico*.

A multiplicação de um número complexo

$$z = x + yi$$

por outro

$$u = a + bi$$

pode ser vista como duas operações geométricas (lembre-se da fórmula de *Abel-Euler*)

$\underline{u = a + bi}$

- uma rotação $e^{i\theta}$
- uma homotetia $\rho \in \mathbf{R}^+$
- $u = \rho e^{i\theta}$

$\underline{z = x + yi}$

- uma rotação $e^{i\alpha}$
- uma homotetia $r \in \mathbf{R}^+$
- $z = re^{i\alpha}$

[1] e você poderia nos perguntar: e porque não falar depois ?

$$uz = (a+bi)(x+yi) = ax - by + (ay + bx)i = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$uz = \rho e^{i\theta}(x+yi) \tag{2.11}$$

$$uz = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))(x+yi) \tag{2.12}$$

$$\rho e^{i\theta} r e^{i\alpha} = (\rho r) e^{i(\theta+\alpha)} \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \tag{2.14}$$

$$\begin{pmatrix} \rho cos(\theta) & -\rho sen(\theta) \\ \rho sen(\theta) & \rho cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r cos(\alpha) \\ r sen(\alpha) \end{pmatrix} = \tag{2.15}$$

$$\begin{pmatrix} \rho r(cos(\theta)cos(\alpha) - sen(\theta)sen(\alpha) \\ \rho r(cos(\theta)sen(\alpha) + sen(\theta)cos(\alpha)) \end{pmatrix} = \tag{2.16}$$

$$\begin{pmatrix} \rho r cos(\theta+\alpha) \\ \rho r sen(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = (\rho r) e^{i(\theta+\alpha)} \tag{2.17}$$

Deixamos que você gaste algum tempo para analisar cada uma das passagens feitas no bloco de equações acima. Tivemos o cuidado de descrever todas as "traduções" possíveis, mas é preciso uma análise cuidadosa para fechar todas as questões que elas envolvem. Considere isto um exercício.

Veja que as equações (eq. 9) ... (eq. 17) são um primeiro exemplo de *codificação-decodificação* que nos referimos no início do capítulo.

- Codificamos $z = (x, y)$ como $re^{i\alpha}$
- lhe aplicamos uma "portadora" $u = \rho e^{i\theta}$
- para obter uma imagem $uz = \rho r e^{(\theta+\alpha)}$

e inclusive sabemos como reverter esta transformação para recuperar o "sinal" inicial.

Usamos, propositadamente, uma linguagem importada das "comunicações" porque em algum momento futuro pretendemos mostrar-lhe que esta é uma *aplicação* da Álgebra Linear.

As equações (eq. 9) ... (eq. 17) mostram que que podemos associar a um número complexo $u = a + bi$ uma *portadora* para transformar outros números complexos e que esta *portadora* define uma matriz de um tipo especial

$$u = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$u = \rho e^{i\theta} \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \ ; \ theta = atan(\frac{b}{a}) \quad \Leftarrow \quad a \neq 0 \tag{2.19}$$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = |b|; \theta = \tfrac{\pi}{2} \tag{2.20}$$

Não consideramos o caso $(a, b) = (0, 0)$ porque ele não representaria nenhuma "*comunicação*" interessante, anularia qualquer dado ao qual fosse aplicado.

Vamos usar esta notação na próxima lista de exercícios que lhe dá algumas dicas para entender a geometria contida nas equações (eq. 9) . . . (eq. 17), usando `scilab` e `gnuplot`.

Exercícios 2 *Cálculos usando* `scilab`

1. *Considere* $a = 3, b = 2$ *e defina a portadora correspondente ao número complexo* $u = a + bi$ *e calcule as imagens (transformações) de*

$$v \in \{1; 1 + i; i; -1 + i; -1; -1 - i; -i; 1 - i; 2 + 3i\}$$

2. *Faça os gráficos de veuv em alguns dos casos acima.*

3. *Calcule a forma polar dos vetores*

$$v \in \{1; 1 + i; i; -1 + i; -1; -1 - i; -i; 1 - i; 2 + 3i\}$$

4. *Calcule uv usando a forma polar (fórmula de Abel-Euler) para cada valor de* $\underline{v}$

Solução de alguns exercicios

1. Usando `scilab`, e omitindo as respostas.

```
-->a=3
-->b=2
-->A = [a,-b;b,a]
-->rho = sqrt(a**2 + b**2)
-->theta = atan(b/a)
-->v1 = [1;0]
-->A*v1
 ans  =

    3.
    2.
```

2. Usando `scilab` e fazendo gráficos com `gnuplot`

```
set xrange [-10:10]
set yrange [-10:10]
set polar
set title "vetores e suas transformadas por A = [2,3;-3,2]  v1 = (1,0)"
a=1;b=0
c=3;d=2
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
```

```
pause -1
unset arrow

set title "v = (1,1); Av = (1,5) "
a=1;b=1
c=1
d=5
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (0,1); Av = (-2,3) "
a=0;b=1
c=-2;d=3
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (-1 ,1); Av = (-5,1) "
a=-1;b=1
c=-5;d=1
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (-1 ,0); Av = (-3,-2) "
a=-1;b=0
c=-3;d=-2
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow


set title "v = (-1 ,-1); Av = (-1,-5) "
a=-1;b=-1
c=-1;d=-5
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
```

```
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (0 ,-1); Av = (2,-3) "
a=0;b=-1
c=2;d=-3
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (1 ,-1); Av = (5,-1) "
a=1;b=-1
c=5;d=-1
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (2 ,1); Av = (4,7) "
a=2;b=1
c=4;d=7
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
```

se esta sucessão de comandos estiver no arquivo "vetores.gnuplot" você pode ver o resultado digitando

`gnuplot vetores.gnuplot`

e cada vez que acionar `enter`, com o cursor na shell onde você chamou `gnuplot`, um novo par v, Av será apresentado.

Justificando os comandos do `gnuplot`[2] usados acima:

- `set xrange, yrange` para estabelecer o domínio retângular da tela. Em geral é desnecessário, `gnuplot` calcula o tamanho da tela em função dos objetos gráficos chamados por `plot`;
- `set polar` liga o modo de coordenadas polares;
- `set title` para colocar um título na janela gráfica;

[2] ver [3]

- `a=3;b=5` dá valores para as variáveis;
- `set arrow from a,b to c,d` desenha uma segmento de reta do ponto (a, b) até o ponto (c, d);

  É este o efeito do `pause -2` em `gnuplot`, aguarda `enter`. O comando

  ```
  plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
  ```

  (quando acionado o modo `polar`), desenha um círculo com raio variável no presente caso o raio é constante, e faz o comando `arrow` que estiver na memória do `gnuplot`, e o comando `unset arrow` limpa a memória.

3. A forma polar do número complexo $v = (x, y)$ é

$$\rho e^{i\theta} \ ; \ \rho = sqrtx^2 + y^2 \ ; \ \theta = atan(\frac{y}{x})$$

quando a função `atan` estiver definida. Quando um número complexo for imaginário puro, e diferente de zero, a função $atan(\frac{y}{x})$ não está definida e definimos o argumento deste número complexo como sendo $\frac{\pi}{2}$.

2.1.2 Significado geométrico da multiplicação

No estudo dos números complexos se conclue que estes números podem ser escritos com a fórmula de Abel-Euler

$$u = a + bi \tag{2.21}$$

$$u = \rho e^{i\alpha} \tag{2.22}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \ ; \ \alpha = acos(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})\alpha = atan(\frac{b}{a}) \tag{2.23}$$

sempre que

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0.$$

Se $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ por definição consideraremos

$$0 = 0e^{i0}.$$

Nas contas que fizemos na seqüência de equações (eq. 2.9) ...(eq. 2.17) estamos mostrando que na multiplicação o ângulo θ é o "índice" de rotação e o módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o "fator" de homotetia.

Observação 1 *O argumento nulo Entre os* mitos e preconceitos *mais comuns envolvendo a Matemática, se encontra um que diz que* a Matemática é perfeita, sem erros, absolutamente lógica.

Além de ser mito, *porque afinal a Matemática é um produto de seres humanos, e consequentemente sujeita às falhas dos seus criadores, este* preconceito *é o responsável pela grande dificuldade que as pessoas tem em aprender Matemática, porque elas se defrontam com os* erros, *com as* incongruências, *que povoam a disciplina, e projetam em si mesmas a dificuldade pensando que elas é que tem um* raciocínio deficiente *que as impede de compreender a disciplina.*

Um vetor de argumento zero é um desses exemplos de buraco lógico. Qual séria o argumento do vetor zero?

É uma pergunta sem resposta.

Algumas vezes se diz que qualquer argumento serve, o que torna pior a situação. A resposta melhor seria que o vetor zero não tem argumento.

Mas observe,

$$0e^{i\theta} = 0 = 0e^{i(\theta+0)}$$

sugerindo que 0 *se encontre na direção de* $e^{i\theta}$ *e poristo se diz que o vetor* 0 *tem qualquer argumento, ou tem qualquer direção. Como as retas* representam *as direções, e em qualquer reta podemos* representar *os números reais, esta alternativa é que adotada.*

Esta caracterizada a dubiedade da Matemática... o que não reduz em nada a sua importância, porque, conquanto dúbia, funciona com perfeição e serve para colocar satélites em órbita quando os programadores não cometerem[3] *erros de cálculos...*

2.1.3 As matrizes

Dos exercícios feitos acima, com números complexos, nos interessa o esquema

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

que chamamos *matriz*, e as propriedades que tais esquemas possam ter de forma independente.

Vamos estudar as matrizes e este estudo vai ter duas componentes distintas que posteriormente uniremos numa só teoria:

1. as propriedades de uma matriz como função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$;

2. as propriedades do conjunto de todas as matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Observe que o nosso exemplo inicial produziu uma matriz de um tipo muito especial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

que representa um número complexo. Interessam-nos as matrizes que tenham entradas distintas, em geral, mas veremos que casos particulares, como este, serão importantes dentro da teoria.

2.1.4 O contôrno inicial da teoria

Iremos posteriormente generalizar os limites estreitos em que estamos colocando o problema para trabalhar com espaços mais gerais, mas o leitor verá que o trabalho posterior, será, em muitos casos, uma simples ampliação do que estudarmos neste capítulo. Em alguns casos, entretanto, esta generalização produzirá efeitos espetaculares e inexperados.

[3] referência ao satélite francês que caiu com um minuto de vôo

2.1.5 Matrizes, a notação

As matrizes são esquemas retângulares de números

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Neste exemplo usamos tres letras, a, b, c para representar cada uma das *linhas* da matriz A. Se a matriz tiver muitas linhas isto ficaria complicado, e sobretudo ficaria dificil para automatizar o processo de representação de matrizes.

Estaremos sempre pensando, neste livro, em processos automáticos em que programas de computador devem representar uma ferramenta essencial para agilizar os cálculos.

Por esta razão complicaremos um pouquinho mais a notação para poder atingir um melhor nível de formalização que será imprescindível quando precisarmos escrever programas de computação com matrizes ou formalizar demonstrações em que uma lista de letras seria um complicador. Em vez de usarmos tres letras, como acima, representaremos todas as linhas com uma única letra indexada:

$$a_1 := a \ ; \ a_2 := b \ ; \ a_3 := c$$

ficando a matriz agora escrita assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Estamos usando um sistema de índices duplos em que o primeiro índice se refere à linha e o segundo se refere à coluna. Este sistema de indexação é designado por "*lico*" quando for necessário indicar qual é a ordem de uso dos índices. LICO
Quando nada for dito a este respeito se considera que o método é o "*lico*".

As matrizes de que vamos tratar neste capítulo são de duas linhas e duas colunas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

e obviamente também trataremos de matrizes com uma linha e duas colunas ou Vetores
matrizes com duas linhas e uma coluna. Em geral daremos o nome de *vetores* a estas matrizes em que o número de linhas ou de colunas é 1 por uma razão que aos poucos ficará aparente.

2.1.6 A parte computacional da álgebra

Da mesma forma como o simples trabalho operatório com os números pode ser agilizado com auxílio de máquinas de calcular, também as contas com as matrizes podem ser feitas de forma menos penosa com a ajuda de programas de computador. Faremos uso destes programas aqui.

Há diversos pacotes computacionais que podemos usar. Entre os muitos que existem, há pacotes de qualidade muito boa em *domínio público* aos quais daremos evidência. Dois deles serão indicados aqui, mas sugerimos que o leitor adote apenas um deles:

- `gnu_octave` em geral designado apenas por *octave*, é um pacote computacional basicamente construído por professores da Universidade Wiscosin, USA, e distribuido sob o GPL;
- `scilab` é um pacote produzido por uma das unidades do INRIA, um instituto francês de pesquisa e também distribuido sob o GPL.

Ambos, `octave` ou `scilab`, usam uma estrutura de dados também usada por pacotes comerciais e são, em muitos aspectos, semelhantes. Use o que estiver ao seu alcance. Quando dissermos, "*usando scilab podemos definir...*" em geral você poderá substituir por "*usando octave podemos definir...*" sem maiores problemas. Em Linux, para usar `octave` ou `scilab` basta digitar o nome do pacote numa [4]*área de trabalho*, ou, como em qualquer outro *sistema operacional*, clicando com o *rato* em um menu adequado, no nome de um destes programas. Em `LinuX` você deve procurar, no sistema de menus, o item *matemática*, possivelmente em inglês, *mathematics*, onde deve encontrar um desses programas. Não encontrando, peça a alguém que instale um deles no computador em que você trabalha, se você não souber ou não puder fazê-lo.

Para simplificar a questão, adotaremos `scilab` oficiosamente no texto e possivelmente apenas citaremos este pacote, sem com isto indicar qualquer menosprezo por `octave`.

Veja, por exemplo, o que produzimos na tela do computador, e tente repetir você mesmo, enquanto lê. Os números que aparecem antes de cada cálculo foram acrescentados por nós para facilitar os comentários que faremos em seguida. `scilab` não numera as linhas.

```
>$ scilab

                    ==========
                    scilab-2.7
        Copyright (C) 1989-2003 INRIA/ENPC
                    ==========



Startup execution:
  loading initial environment

1)-->a = [1,2,3;-1,-2,0;3,-1,4]
 a  =
```

[4] é quase certo que você encontra um ícone, "tipo uma *televisão*", na barra de ferramentas do sistema, clique neste ícone e, na tela que surgir, digite `scilab`, <enter>

```
!   1.    2.    3. !
! - 1.  - 2.    0. !
!   3.  - 1.    4. !

2)-->a(2,3)
 ans  =
     0.
3)-->a(3,2)
 ans  =
   - 1.
4)-->ans + 4
 ans  =
    3.
5)-->a(3,2)
 ans  =
    - 1.
6)-->ans = ans + 6
 ans  =
    5.
7)-->a(3,1) + 4
 ans  =
    7.
```

Os comentários

A linha

```
1)--> a = [1,2,3;-1,-2,0;3,-1,4]
```

foi executada dentro do *scilab* para definir uma matriz com tres linhas e tres colunas. Cada linha fica separada por "ponto e virgula" e dentro das linhas os elementos são separados por "vírgula" e `scilab` apresenta a matriz como um esquema retângular.

Observe `scilab` não numera as linhas, nós editamos o resultado para facilitar a nossa conversa com você, e continuaremso fazendo isto, de forma consistente, no futuro, mas sem chamar sua atenção, porque ao rodar `scilab` você verá a diferença.

As linhas seguintes do *scilab* exemplificam o uso dos índices.

A linha "3)$--$ $>$" responde que $a_{32} = -1$.

Observe que temos que aprender a nos comunicar com um programa de computador. Em Matemática escrevemos

$$a_{32} = -1$$

dentro do programa de computador, no caso o *scilab*, escrevemos

$$a(3, 2)$$

o que produziu a resposta do programa na linha seguinte

$$ans = -1.$$

"*ans*" é uma variável criada pelo programa para guardar a resposta[5]. *scilab* nos permite fazer contas com *ans* como você pode ver nas linhas seguintes.

Este exemplo deve justificar porque precisamos da notação formal a_{ij} que *scilab* entende como $a(i,j)$). Com ela podemos fazer referência aos elementos de uma matriz. Observe que o resultado da linha "$7) -- >$", nela, em vez de usar a variável *ans* usamos diretamente o "endereço" da entrada da matriz, $a(3,1)$ para fazer uma nova operação. É um outro caminho válido.

O pacote *sabe* fazer contas com matrizes e podemos fazer um cálculo relembrando os números complexos.

```
1)--> A = [2,-3;3,2]
A =

   2  -3
   3   2

2)--> z = [1,2]
z =

  1  2

3)--> A*z'
ans =

  -4
   7
4)--> (A*z')'
ans =

  -4   7

5)-->
```

Depois de terminar qualquer cálculo, `scilab` se dispõe, gentilmente para fazer mais cálculos com o indicativo

```
 -->
```

[5]da palavra inglesa *answer* que signfica *resposta*

Ensinando `scilab` a operar com números complexos

`scilab` sabe fazer contas com matrizes, e nós usamos sua capacidade de operar com matrizes para multiplicar os números complexos

$$(2+3i)(1+2i) = 2-6+(4+3)i = -4+7i.$$

veja a (eq 2.10) em que mostramos a identidade

$$(a+bi) \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

na qual o número complexo $(a+bi)$ fica representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2.1.7 A multiplicação de matrizes não é comutativa

Na linha (3), da sessão de cálculos com `scilab`, escrevemos

$$A * z'$$

e precisamos explicar o que fizemos. Não podiamos "multiplicar" a matriz

$$A$$

pelo vetor $z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. O produto de matrizes tem regras de "dimensão". Uma matriz de duas linhas e duas colunas, dizemos 2 x 2, lemos "dois por dois", pode ser multiplicada à direita por uma matriz 2 x 1. Ela pode ser multiplicada a à esquerda por uma matriz 1 x 2,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

mas não é possível multiplicar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Experimente fazer a conta errada para ver que não funciona:

$$A * z \ ; \ z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

O método da multiplicação combina cada elemento das linhas da matriz à esquerda, com os elementos das colunas da matriz à direita. Assim podemos multiplicar

$$u = (x_1, x_2) \tag{2.32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \equiv \tag{2.33}$$

$$\equiv A * u' \tag{2.34}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{21} \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} \end{pmatrix} \equiv \tag{2.35}$$

$$\equiv u * A \tag{2.36}$$

e observe que o resultado das duas operações é diferente. Mas não é este exemplo que caracteriza que o produto de matrizes não é comutativo, porque $u \neq u'$. Se você não tiver experimentado fazer a conta *impossível* com `scilab`, faça-o agora para ver os comentários do programa.

Laboratório 4 *Produto de matrizes*

1. *Descreva, com palavras, quando é que a matriz $\mathcal{A}$ pode ser multiplicada pela matriz $\mathcal{B}$.*

2. *Descreva, com suas palavras, porque as multiplicações abaixo não podem ser efetuadas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3; 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. *Indique qual é a operação que pode ser feita, com cada um dos vetores, na questão anterior.*

4. *Descreva, usando as palavras* linha, coluna *os produtos*

$$\mathcal{AB} \ ; \ \mathcal{BA}$$

5. *Verifique que a função*

$$z \mapsto iz$$

produz uma rotação no vetor $z \in \mathbf{C}$. Determine o ângulo desta rotação, e a matriz que a produz, quando aplicada ao vetor

$$z = \begin{pmatrix} x; y \end{pmatrix}$$

6. *Encontre a matriz de rotação da função*

$$\begin{pmatrix} x; y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x; -y \end{pmatrix}$$

2.1.8 Matriz transposta

Mas ainda falta justificar uma notação que tivemos de usar no `scilab`[6]. Observe que uma das equações foi escrita com a notação

$$A * u'$$

enquanto que a outra foi escrita assim

$$u * A.$$

Os dois vetores u' e u são diferentes. Um tem duas linhas e o outro tem duas colunas. O vetor u' se chama de `transposto` do vetor u. São dois vetores diferentes como as operações que fizemos acima o indicam, apesar de terem propriedades comuns. A `transposição` é uma operação muito usada na álgebra das matrizes e se define pela troca dos índices:

Definição 8 *Matriz transposta*

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{ij}$. Sua transposta é a matriz $A' = (a_{ji})_{ij}$ obtida pela troca de todas as linhas em colunas.

Quando escrevemos manualmente, muitas vezes usamos a notação A^t para indicar a transposta da matriz A. As linguagens de programação usam A' em vez de A^t.

Voltando a última sessão de contas que fizemos com *scilab*, veja que podemos pedir que o programa responda com um vetor (tem gente que fala *matriz linha*), fizemos isto na linha 4) $--> (A * z')'$, veja o resultado.

Observação 2 *Matrizes linha ou coluna*

Existe uma notação que iremos evitar neste livro, matriz-linha *e* matriz-coluna*, as matrizes que tiverem apenas uma linha ou uma coluna.*

Chamaremos as matrizes-linha de vetores *e faremos o mesmo com as matrizes coluna, a não ser que precisemos distinguir umas das outras.*

A transposição *é a operação que associa uma matriz com outra que tem linhas e colunas intercambiadas, a notação é*

$$\mathcal{A}^t \text{ ou } \mathcal{A}'$$

é a transposta de $\mathcal{A}$. A transposta de um vetor é uma matriz-coluna.

Laboratório 5 *Matrizes e números complexos*

1. *Encontre a matriz que representa a função*

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

para cada uma das equações definidas de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$:

a) $z \mapsto iz$	*b)* $z \mapsto -iz$	*c)*$z \mapsto (1+i)z$	*d)* $z \mapsto (1-i)z$
e) $z \mapsto 2z$	*f)* $z \mapsto 3z$	*g)* $z \mapsto 0.5z$	*h)* $z \mapsto \frac{i}{2}z$

[6] ou no `octave`...

2. *Encontre a matriz que produz uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ nos vetores do plano. Sugestão, procure o número complexo que efetua esta operação geométrica.*

3. *Encontre a matriz que produz uma rotação de $\frac{3\pi}{4}$, e uma homotetia de módulo 2 nos vetores do plano Sugestão, procure o número complexo que efetua esta operação geométrica.*

4. *Multiplicação não comutativa*

   (a) *Use* scilab *para multiplicar as duas matrizes*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

   Há duas maneiras de multiplicá-las,

   $$A * B, B * A$$

   uma delas inválida, e scilab *lho irá dizer, experimente.*

   (b) *Use* scilab *para multiplicar as duas matrizes*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

   Há duas maneiras de multiplicá-las,

   $$A * B, B * A$$

   todas duas válidas, mas o resultado é diferente em cada caso, experimente.

5. *Tente justificar porque, em um dos casos acima, a multiplicação é inválida e no outro, todas duas multiplicações são válidas.*

6. *Defina em* `scilab` *uma matriz $\mathcal{A}, 4 \ \text{x} \ 3$ e uma matriz $\mathcal{B}, 3 \ \text{x} \ 4$ e efetue as contas*

   $$\mathcal{A} * \mathcal{B} \ ; \ \mathcal{B} * \mathcal{A}.$$

7. *Qual é a dimensão de $\mathcal{A} * \mathcal{B}$.*

8. *Qual é a dimensão de $\mathcal{B} * \mathcal{A}$.*

9. *Definidas duas matrizes $\mathcal{A}, n \ \text{x} \ m$ e $\mathcal{B}, m \ \text{x} \ q$ indique a alternativa correta abaixo:*

   (a) *Qualquer dos produtos $\mathcal{A} * \mathcal{B}; \mathcal{B} * \mathcal{A}$ pode ser efutado;*

   (b) *Apenas o produto $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão $m \ \text{x} \ q$.*

(c) *Apenas o produto $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão n x q.*

(d) *Apenas o produto $\mathcal{B} * \mathcal{A}$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão q x q.*

Resposta: *A alternativa correta é (c).*

10. *Fazendo contas com* `scilab`

(a) *Escreva o sistema de equações*

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = -9 \\ 9y + 7z & = 0 \\ 3x - y - z & = -1 \end{cases} \qquad (2.39)$$

como um produto de matrizes.

(b) *Teste se o vetor* $\begin{pmatrix} 1.4444 \\ -18.66666 \\ 24 \end{pmatrix}$ *é solução do sistema de equações.*

Solução

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & z \\ 0 & 9 & 7 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
-->A
 A  =

  !   3.    2.     1. !
  !   0.    9.     7. !
  !   3.  - 1.   - 1. !

 ans  =

  !   1.4444444 !
  ! - 18.666667 ! =  (x,y,z)
  !   24.       !

-->A*ans
 ans  =

  ! - 9.        !
  ! - 1.066E-14 !
  ! - 1.        !
```

——————————————————

Observe o resultado do último experimento no laboratório, em que `scilab` encontra o vetor

$$(-9., -1.066E - 14, -1.)$$

quando "nos esperavamos" que ele encontrasse

$$(-9, 0, -1).$$

`scilab` é um programa de computador e tem limitações. Os números racionais são objetos de "natureza infinita" que apenas a mente humana consegue dar-lhes, algumas vezes, uma roupagem finita. Nós, os humanos, conseguimos escrever 0 onde `scilab` somente consegue escrever $1.066E - 14$, na verdade, internamente, na máquina, é

$$0.00000000000001066 = 1066 * 10^{-17} = 1.066 * 10^{-14}$$

2.2 Matrizes como funções do $\mathbf{R}^2$

> Já vimos que as matrizes representam operações geométricas no plano. Vamos estudar as propriedades destas operações.

2.2.1 As matrizes 2 x 2

Como algumas matrizes 2 x 2 representam a multiplicação dos números complexos, vemos que elas generalizam a multiplicação dos números para os vetores.

É uma classe de matrizes, apenas, que representam os números complexos, as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Aqui vamos nos libertar desta restrição e considerar *todas as matrizes* 2 x 2 e, consequentemente, vamos perder a companhia *exclusiva* dos números complexos, ampliando o conjunto de matrizes com que iremos trabalhar.

Dissemos que as matrizes generalizam a multiplicação. Isto quer dizer: dada uma matriz $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

podemos com ela multiplicar qualquer vetor do $\mathbf{R}^2$ à direita ou à esquerda (com resultados diferentes).

De início esta maneira de falar tem aspectos estranhos: estamos "multiplicando" elementos de tipos diferentes coisa que a Matemática não ensina. É assim, ao abrir caminhos novos temos que romper com as estruturas estabelecidas, mas veremos, depois do terremoto, que as coisas voltarão a se encaixar. Quando discutirmos, de forma mais ampla, as matrizes, teremos regras apropriadas para a "multiplicação de matrizes".

2.2.2 Matrizes generalizam a multiplicação

Vamos usar a multiplicação matricial para *generalizar* a função real de variável real

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} \ ; \ x \mapsto ax$$

Se escrevermos a definição acima, num programa, ele possivelmente emitirá uma mensagem de erro, porque não definimos $\underline{a}$.

Experimente com *scilab*

```
scilab:1> function y = f(x)
> y = a*x
> endfunction
scilab:2> f(3)
```

que irá resultar numa mensagem de erro dizendo que a operação na linha 2 não é possível (porque $\underline{a}$ não está definido). Experimente agora

```
-->function y = f(x)
-->a=3
-->y = a*x
-->endfunction
Warning :redefining function: f
-->f(2)
 ans  =
    6.

-->f(5)
 ans  =
     15.
```

O que mudou?

A diferença agora é que demos um valor para $\underline{a = 3}$ e *scilab* sabe usar a função f corretamente.

Com este exemplo fizemos duas coisas:

1. lhe mostramos como definir funções no *scilab*;
2. definimos a função $x \mapsto ax \ ; \ a = 3$

Usaremos a mesma expressão, com algumas modificações, e uma interpretação distinta:

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \ ; \ (x, y) \mapsto A(x, y)'$$

e vamos definir esta função também no *scilab* até mesmo porque as contas agora serão muito mais complicadas para que as façamos manualmente.

```
-->function u = f(x,y)
```

```
--> A = [2,-3;3,2]
-->u = A*[x;y]
-->endfunction


-->u = f(2,3)
 u  =

! - 5.  !
!   12. !
```

Observe, *en passant*, que $f(2,3)$, casualmente, é o quadrado do número complexo $2+3i$ porque a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ representa este número complexo. Veja os resultados seguintes que são nossos conhecidos de outras conversas sobre números complexos

```
-->f(1,0)
 ans  =

!   2. !
!   3. !
```

porque $(1,0) = 1 + 0i$ é a unidade e assim $f(1,0)$ reproduz o número complexo $2+3i$, representado pela matriz A.

```
-->f(0,1)
 ans  =

! - 3. !
!   2. !
```

é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ de $2+3i$ porque $(0,1) = i$ e o número complexo i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em qualquer número multiplicado por ele. Veja na figura (fig. 2.1) página 45,

A próxima lista de exercícios é um laboratório em que vamos praticar os conceitos e programas apresentados. Desta prática tiraremos alguns aspectos teóricos em seguida.

Laboratório 6 *Matrizes e rotações*

1. *Rotação de $\frac{\pi}{2}$*

   (a) *Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para descobrir qual é a matriz $\mathcal{A}$ que produz uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em todo vetor (x,y) multiplicado por ela. Defina a função linear $f(x,y) = \mathcal{A}(x,y)^t$ que faz esta rotação.*

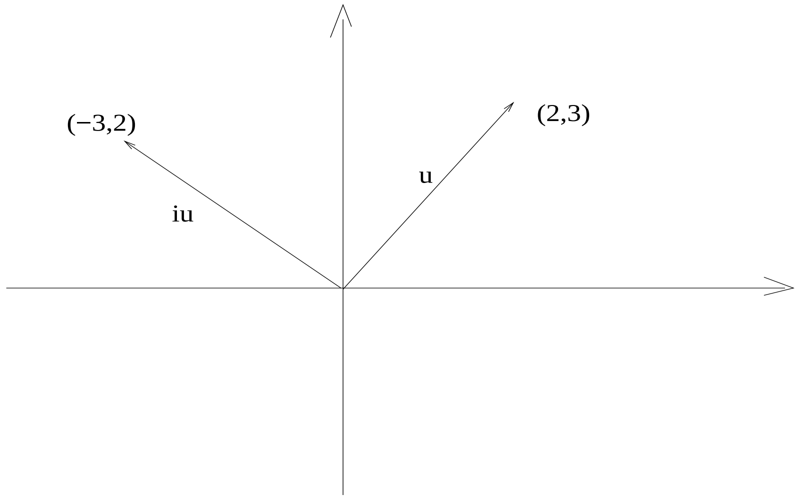

Figura 2.1: Multiplicação por i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$

(b) *Prove, usando semelhança de triângulos, que*

$$f(x,y) \perp (x,y)$$

em que f é a função definida no item anterior.

(c) *Escreva a definição computacional de f em* scilab *e faça alguns experimentos, escolha alguns valores para (x,y) e calcule $f(x,y)$.*

2. *Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para descobrir qual é a matriz $\mathcal{A}$ que produz uma rotação de θ em todo vetor (x,y) multiplicado por ela. Defina a função linear $f(x,y) = \mathcal{A}(x,y)^t$ que faz esta rotação.*

3. *Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para encontrar a matriz que produza uma rotação de ângulo θ e uma deformação (homotetia) de 3 unidades no vetor $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Defina a função linear f que executa este processo sobre qualquer em qualquer vetor (x,y) em que seja aplicada.*

4. *Rotações com* scilab *Agora que você sabe qual é a matriz que produz rotações no plano, escreva uma função em* scilab *para fazer rotações de ângulo θ. Mas observe, se* scilab *não souber quem é θ vai reclamar...*

5. *distributividade do produto relativamente à adição Considere os vetores*

$$u = (m,n)\ ,\ \ v = (p,q), u + v = (m+p, n+q)$$

Prove que $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *multiplicada por*

$$u + v = (m+p, n+q)$$

se distribue, relativamente a adição:

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$$

6. *Propriedades da multiplicação por um escalar* *Considere*

$$u = (m,n) \in \mathbf{R}^2,\ \ \lambda \in \mathbf{R}, \lambda u = (\lambda m, \lambda n) \in \mathbf{R}^2$$

e uma matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   (a) *associatividade com produto por escalares*
   Prove que para uma matriz $\mathcal{A}$ *vale a associtividade na multiplicação por escalares:*
   $$\mathcal{A}(\lambda u) = (\mathcal{A}\lambda)u$$

   (b) *comutatividade* *Prove que*
   $$(\mathcal{A}\lambda) = (\lambda\mathcal{A})$$

   (c) *Prove finalmente que*
   $$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda(\mathcal{A}u)$$

7. *Linearidade*
Use os passos anteriores para mostrar que dada uma matriz $\mathcal{A}$ *qualquer é verdade que*

$$\mathcal{A}(\lambda u + \gamma v) = \lambda\mathcal{A}u + \gamma\mathcal{A}v \lambda, \gamma \in \mathbf{R}\ ;\ u, v \in \mathbf{R}^2$$

Expressões como

$$\lambda u + \gamma v$$

aparecem com grande frequência em muitas situações e porisso recebem um nome:

Definição 9 *Combinações lineares*
Dados dois vetores u, v *e dois escalares* λ, γ *podemos calcular jm novo vetor*

$$\lambda u + \gamma v.$$

A expressao $\lambda u + \gamma v$ *se chama* combinação linear dos vetores u, v com os escalares λ, γ.

Usando esta linguagem, demonstramos, nos exercícios acima que

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **4** *Função linear Uma função linear transforma* combinações lineares *em* combinações lineares *respeitando os coeficientes escalares.*

Observação 3 *Combinações lineares*

- <u>*Média aritmética*</u> *Um exemplo comum de* combinação linear *é uma média aritmética ponderada. Neste caso os escalares se chamam* pesos *e tem uma propriedade extra:*

$$\lambda + \gamma = 1 \; ; \lambda, \gamma \geq 0$$

- <u>*Combinação linear convexa*</u>

  As médias aritméticas ponderadas também se chamam combinações lineares convexas *porque o vetor $\lambda u + \gamma v$ se eoncontra sobre o segmento de reta determinado pelos vetores u, v.*

- <u>*Função linear nula*</u> *...os casos degenerados*

  Precisamos ter largueza de espirito, veja que a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *define uma função linear também, entretanto o seguimento de reta em que ela vai transformar qualquer outro segmento de reta, colapsa para um ponto... Se não considerarmos "pontos" como segmentos de reta (e podemos anexar o adjetivo "degenerados" para apaziguar os nossos preconceitos), perderiamos toda a teoria. Há várias situações em Matemática em que temos que admitir* extensões *de conceitos para que as coisas terminem funcionando, por exemplo o fatorial de zero, $0! = 1$ a definição $a^0 = 1$. Sem estes acréscimos na teoria, a teoria geral deixaria de funcionar.*

Um corolário simples do teorema anterior é

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **5** *Função linear e convexidade*

Uma função linear transforma um segmento de reta n'outro segmento de reta. $\boxed{\textbf{Dem}}$*:*

Como funções lineares transformam combinações lineares *em* combinações lineares *respeitando os coeficientes escalares, então transformam* médias aritméticas *em* médias aritméticas*. Como os pontos de um segmento de reta são as médias aritméticas (ponderadas) dos extremos, então a imagem de um segmento de reta, por uma função linear, de qualquer ponto de um segmento de reta, será a média (com os mesmos pesos) das imagens dos extremos, logo um segmento de reta.*

É preciso agora provar que todo ponto do segmento de reta imagem *vem de algum ponto do* segmento de reta pré-imagem*. O raciocínio acima se aplica reversamente, uma vez que todo ponto do* segmento de reta imagem *é media aritmética ponderado das imagens dos extremos e aos pesos que o geraram corresponde um ponto do* segmento de reta pré-imagem*, e eles estão em correspondência pelo teorema anterior.*

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Este teorema nos oferece um meio, um algoritmo, para encontrar a imagem de um segmento de reta:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **6** *Imagem de um segmento de reta*

Se f for uma função linear, então para determinar a imagem de um segmento de reta basta encontrar a imagem dos extremos e uní-los com um segmento de reta.

Laboratório 7 *Transformações lineares*

1. *A imagem de uma segmento de reta*

   (a) *Considere a matriz*

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   i. *Defina a função linear*

   $$f(x,y) = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   em scilab *e calcule a imagem do segmento*

   $$\overline{PQ}\ ; P = (1,2), Q = (2,1)$$

   por f.

   ii. *Cacule a imagem do segmento*

   $$\overline{MN}\ ; M = (-3,2), N = (3,-2)$$

   por f. Analise o resultado e deduza qual é a imagem por f da reta $y = -\frac{2}{3}x$

   iii. *Encontre uma relação da reta $y = -\frac{2}{3}x$ com a função f.*

   iv. *Prove que uma função linear transforma uma triângulo n'outro triângulo. O triângulo pode ser degenerado? Encontre um triângulo cuja imagem por f seja um triângulo degenerado.*

   (b) *imagem de polígonos*

   i. *Considere a matriz*

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   A. *Defina a função linear*

   $$f(x,y) = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   em scilab *e calcule a imagem do segmento*

   $$\overline{PQ}\ ; P = (1,2), Q = (2,1)$$

   por f.

B. Encontre a imagem do triângulo de vértices

$$(1,3),(3,7),(0,7)$$

pela matriz $\mathcal{A}$.

ii. Cacule a imagem do segmento

$$\overline{MN}\ ; M=(-3,2), N=(3,-2)$$

por f. Analise o resultado e deduza qual é a imagem por f da reta $y=-\frac{2}{3}x$

iii. Encontre uma relação da reta $y=-\frac{2}{3}x$ com a função f.

iv. Prove que uma função linear transforma uma triângulo n'outro triângulo. O triângulo pode ser degenerado? Encontre um triângulo cuja imagem por f seja um triângulo degenerado.

2. <u>*preservação dos ângulos*</u>

   Triângulos semelhantes diferem entre si apenas (possivelmente) pelo tamanho. Prove que as transformações lineares do tipo

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   transformam triângulos *em* triângulos semelhantes.

3. *Prove que uma função linear transforma um polígono de n lados n'outro polígono n lados, (possivelmente degenerado). Encontre quais são as funções lineares que transformam polígonos em* polígonos semelhantes.

4. <u>*preservação da área*</u> *Descubra quais são as funções lineares que preservam a área dos poligonos por elas transformados. Associe estas transformações lineares com um subconjunto de* $\mathbf{C}$.

5. <u>*Números complexos e transformações do plano*</u>

   Escreva uma pequena teoria que mostre o significado dos números complexos (e consequentemente as matrizes que eles representam) para as transformações do plano.

O último exercício do bloco acima tem uma resposta simplista que não é o que se espera que o leitor escreva. Se espera que o leitor use os fatos anteriores para chegar, dentro de uma pequena dissertação, ao resultado:

Teorema 7 *Um tipo de transformação rígida do plano*

As matrizes que representam transformações rígidas do plano são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \equiv (cos(\theta)+isin(\theta))$$

Como estas matrizes representam os números complexos unitários, elas são chamadas *matrizes unitárias*. Mas a dissertação solicitada no exercício pode ir um pouco mais além das *matrizes unitárias*. Quando uma matriz representar um número complexo não unitário, ela ainda transforma polígonos em polígonos semelhantes. Então a dissertação solicitada deve concluir que as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \equiv (a+bi)$$

são as matrizes que preservam a semelhança de polígonos, quando $(a+bi) \neq 0$.

Esta é a solução resumida do exercício.

Em resumo, as funções lineares são aquelas da forma

$$f(X) = \mathcal{A}X$$

em que a multiplicação é consistente. Se X for um número $\mathcal{A}$ pode ser um número ou uma matriz. Se X for um vetor, $\mathcal{A}$ deverá ser uma matriz que possa ser multiplicada por X à direita.
Neste parágrafo nos limitamos às funções lineares definidas em $\mathbf{R}^2$ e tomando valores em $\mathbf{R}^2$ e neste caso $\mathcal{A}$ é uma matriz 2 x 2.
Cabe menção especial às matrizes que representam os números complexos, as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \equiv (a+bi)$$

porque elas transformam as figuras planas em figuras planas semelhantes, quando $a+bi \neq 0$. Em particular as transformações unitárias preservam a medida das figuras planas e representam os números complexos de módulo 1.

2.3 Funções lineares afins

Aqui vamos avançar um pouquinho mais em nossa generalização para tratar de funções cuja equação é da forma

$$f(x,y) = \mathcal{A}\binom{x}{y} + \mathcal{B}$$

Vamos, construtivamente, descobrir que tipo de objeto pode ser $\mathcal{B}$.
Estas funções generalizam as funções reais de valor real da forma

$$f(x) = ax + b \ ; \ a, b, x \in \mathbf{R}$$

que se chamam de *lineares afins*.

Queremos discutir que funções podem ter o formato

$$f(X) = \mathcal{A}X + \mathcal{B}$$

para generalizar as funções numéricas do tipo

$$f(x) = ax + b.$$

Se $\mathcal{A}$ for uma matriz 2 x 2, como até agora estivemos admitindo, o produto $\mathcal{A}\binom{x}{y}$ resulta num vetor, uma matriz 2 x 1 o que força $\mathcal{B}$ a ter esta mesma *estrutura* para que possamos efetuar a soma.

Então, dadas duas matrizex $\mathcal{A}, 2$ x 2 e $\mathcal{B}, 2$ x 1 podemos definir a função

$$f(x,y) = \mathcal{A}\binom{x}{y} + \mathcal{B}.$$

Exemplo 2 *Um exemplo feito no* scilab

Verifique a definição a seguir, e se convença de todos os seus detalhes, em particular, o uso da tranposição.

```
-->function u = f(x,y)
-->u = [4,-3;3,4]*[x,y]' + [3,2]'
-->endfunction

-->f(4,2)
 ans  =

!   13. !
!   22. !
```

Claro, scilab *já verificou que estava tudo correto, caso contrário teria reclamado e tirado do bolso uma mensagem de erro adequada.*

Usamos uma matriz $\mathcal{A}$ que representa o número complexo $4+3i$ e isto significa que uma parte da operação de f consiste de rodar e produzir um esticamento, (rotação e homotetia).

E qual é o papel de $B = \binom{2}{3}$?

Veja o resultado aplicado em dois vetores (que determinam um segmento de reta), na figura (fig. 2.2) página 52. Primeiro vamos pedir que scilab *calcule tudo. Observe que editamos o resultado obtido por* scilab *para incluir as expressões $f(P), f(O), R, Q$.*

```
-->f(4,2) = f(P)
 ans  = R

!   13. !
!   22. !
```

```
-->f(1,4) = f(O)
 ans  = Q

! - 5.  !
!   21. !
```

Portanto o gráfico deve nos apresentar o segmento de reta determinado pelos pontos $P = (4,2), O = (1.4)$ *e o segmento de reta determinado pelos pontos* $R = (13,22), Q = (-5,21)$.

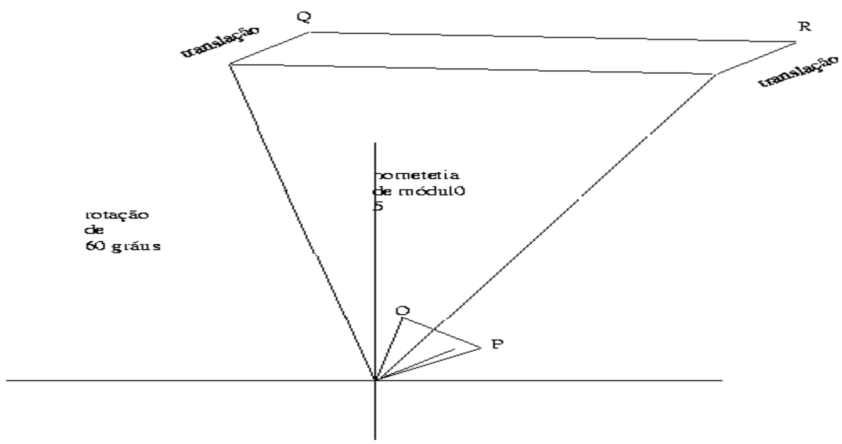

Figura 2.2: Rotação e homotetia seguidas de uma translação

Você pode identificar na (fig. 2.2) todas as etapas geométricas do processamento que f *faz sobre o segmento de reta* $\overline{OP}$. *Aqui escolhemos desenhar, nesta ordem:*

- *a rotação de ângulo* $36.8^o \approx acos(4/5)$*;*
- *a homotetia de módulo* $\sqrt{16+9} = 5$ *de fato*

$$5 * |OP| = 5 * \sqrt{13} = \sqrt{25 * 13} = \sqrt{325} = |QR|$$

- *a translação evidenciada pelo paralelograma cujos lados são paralelos ao vetor* $(3,2)$

A imagem de O *é* $f(O) = Q$ *e a imagem de* P *é* $f(P) = R$.

Laboratório 8 *Função linear afim*
Ver solução na última parte do livro.

1. *Propriedades das funções lineares afins Com base nas propriedades das funções lineares, liste as propriedades que sejam verdadeiras para as funções lineares afins.*
2. *A imagem do zero Prove que se f for uma função linear então a imagem do zero é zero, (falamos do vetor zero).*
3. *A imagem do zero Se numa função linear afim a imagem do zero for zero, então o termo independente é zero.*
4. *imagem de polígonos planos e função linear afim A imagem de um polígono regular convexo, por uma função linear afim, é um polígono regular convexo.*
5. *semelhança de polígonos preservada Uma função linear afim transforma polígonos em polígonos semelhantes se e somente se a função linear associada o fizer.*
6. *rotações*
   (a) *Use* `scilab` *para verificar que*
   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   representa uma rotação do plano.
   (b) *Verfifique que, use* `scilab`*, que*
   $$(x, y) \mapsto \mathcal{A}\binom{x}{y} + \binom{5}{3}$$
   é uma rotação seguida de uma translação.

2.4 Sistemas lineares

Vimos que as matrizes servem para definir a equação de um tipo particular de funções que chamamos lineares.

Quando estudamos as funções polinômiais, dedicamos especial atenção às *equações polinômiais*. Como ficaria a solução das equações lineares? o que é uma equação linear?

2.4.1 Equações lineares

Em nossos primeiros estudos de Matemática, passamos pela equação do primeiro gráu, que tem uma solução do tipo

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

se o número $\underline{a}$ for diferente de zero. É natural nos perguntarmos se podemos fazer o mesmo com uma equação matricial.

Infelizmente as matrizes nem sempre tem inversas, de modo que, em geral não podemos resolver, de forma tão simples, uma equação matricial. O caminho mais curto para entender a solução deste problema passa por retornar um pouco do formalismo que acabamos de adotar e voltar a ver uma equação matricial como *um sistema de equações do primeiro grau*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = c_2 \end{cases} \tag{2.43}$$

cuja solução, por substituição, nos leva às expressões

$$x_1 = \tfrac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2.44}$$

$$x_2 = \tfrac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2.45}$$

em que nós identificamos os determinantes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{bmatrix} ; \tag{2.46}$$

e podemos voltar a escrever as soluções com esta nova notação

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \ ; \ x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \tag{2.47}$$

Entretanto esta volta ao passado não se deve prolongar muito, porque é extremamente difícil refazer a teoria usando os métodos artesanais com que os nossos antepassados a fizeram. *Subindo nos seus ombros, usando o que fizeram, podemos nos alçar a um vôo mais alto.* O próximo conjunto de exercícios é um laboratório em que iremos buscar a inspiração para a teoria que precisaremos.

O título da próxima lista de exercícios merece uma observação. Embora toda matriz tenha um determinante, na verdade um mesmo determinante corresponde a várias matrizes e portanto o título deveria ser *determinantes e suas matrizes...*

Laboratório 9 *Matrizes e seus determinantes*

1. *Cálcule os determinantes das matrizes (não precisa fazer todos, quando você descobrir o que está acontecendo, pare.)*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *j)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

2. *Resolva os sistemas de equações*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. *Você pode usar* scilab *para corrigir os resultados dos exercicícios. Veja a solução, comentada, do item (a) e resolva você mesmo os outros. Editamos o texto do* scilab *explicando o que fizemos em cada linha (quase cada linha...).*

```
-->:1> a = [3,2;1,-2]   ## a matriz do sistema
a =

   3   2
   1  -2

-->:2> b = [1,3]'   ## a matriz dos dados, transposta, naturalmente
b =

  1
  3

-->:3> x = a \ b  ## metodo do scilab para dividir matrizes
x =

   1
  -1

-->:4> ##  a resposta x = (1,-1)
```

Siga os passos acima e verifique as suas respostas para a primeira questão.

4. *Resolva manualmente o sistem*

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z & = 7 \\ 2x + 3y + 5z & = 2 \\ x + 2y + 3z & = 5 \end{cases} \tag{2.48}$$

e verifique sua resposta usando scilab

Resposta: $(x_1, x_2, x_3) = (-7.0000, 12.0000, -4.0000)$

5. *determinante* scilab *sabe calcular determinantes, veja como:*

```
-->:6> a = [3,4,5;2,3,5;1,2,3]
a =

  3  4  5
  2  3  5
  1  2  3

-->:7> det(a)
ans = -2
```

Use a função `det()` *do* scilab *para calcular os determinantes que foram solicitados mas que você deve ter calculado manualmente primeiro.*

6. *Encontre uma relação entre det*$(\mathcal{A})$ *com*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e o módulo de $z = a + bi$*.*

Observação 4 *Uso de computador versus saber fazer as coisas*

Tem sentido usarmos computadores ou máquinas de calcular, se soubermos o que estamos fazendo. Estes instrumentos vêm para agilizar o nosso trabalho e não para substituir o nosso pensamento. Não se engane, portanto, em apenas calcular com scilab *ou qualquer outro programa de computador, sem saber primeiro fazer as contas com seus dedos.*

Resolver sistemas 2 por 2 ou o cálculo de um determinantes de uma matriz 2 por 2, deve ser feito à mão, primeiro. Aqui lhe apresentamos um programa de computador para que você possa testar suas respostas. Ninguém, nenum professor, vai resolver um sistema de 10 equações a 20 incógnitas a mão, seria absurdo. Para isto temos pacotes computacionais, ou sabemos fazer os pacotes computacionais. E você um dia deverá saber fazer ou melhorar um pacote computacional, se souber o que está fazendo.

Alguns dos exercícios do bloco acima sugerem que as equações lineares da forma

$$AX' = 0$$

tem sempre a solução $X = 0$ Esta verdade é parcial, a verdade toda é que pode haver soluções diferentes de 0.

Mas já podemos enunciar um teorema bem geral e prová-lo. Primeiro uma notação que importante pelo uso prático:

Definição 10 *Sistemas homogêneos*
Um sistema de equações da forma

$$AX' = 0$$

se designa por sistema de equações homogêneo.

Você não precisa decorar nomes, com o uso, esta denominação fará, naturalmente, parte integrante do seu vocabulário. O adjetivo *homogêneo* é difícil de ser explicado e tem vieses psicológicos. Mas é assim que nos referimos a uma equação linear em que a *matriz dos dados* é nula.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **8** *Sistemas homogêneos I Todo sistema de equações lineares homogêneos tem pelos menos uma solução, o zero.* $\boxed{\textbf{Dem}}$:
Porque, se uma matriz, de qualquer dimensão, for multiplicada, à direita por um vetor coluna nulo (ou à esquerda por um vetor linha nulo), o resultado do produto será um vetor nulo. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Este resultado simples é de grande importância e vai ser a chave de muita demonstração, posteriormente.

Está no exato momento para generalizarmos o resultado anterior. A lista de exercícios seguinte irá treiná-lo para entender os teoremas que enunciaremos em seguida.

Laboratório 10 *Sistemas homogêneos*

1. *sistema indeterminado*
   (a) *resolvendo um sistema de equações*
      i. *Verifique que, no sistema* $\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 6x + 4y + 8z & = 0 \\ 2x + 4y + 5z & = 0 \end{cases}$ *há duas equações idênticas;*
      ii. *reduza o sistema a duas equações apenas;*
      iii. *elimine a variável y, explicite x em função de z e finalmente verifique que também é possível explicitar y em função de z.*

   (b) *Resolva (manualmente) o sistema homogêneo* $\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 6x + 4y + 8z & = 0 \\ 2x + 4y + 5z & = 0 \end{cases}$

   (c) *Verifique que as soluções seguintes todas servem para o sistema:*

   $$(-6, -7, 8), (0, 0, 0), (-3/4, -7/8, 1), (3/4, 7/8, -1)$$

   portanto o sistema é possível, mas tem muitas soluções sendo indeterminado.

   (d) *Defina uma função linear em* scilab *com a matriz do sistema para verificar que as soluções propostas o são de fato.*

(e) *Encontre* <u>*uma*</u> *equação paramétrica para a solução.*
<u>*resposta:*</u> $(-\frac{3z}{4}, -\frac{7z}{8}, z)$

O seguinte código *scilab* resolve a penúltima questão do *laboratório* acima.

```
-->:1> function f(x,y,z)
> [3,2,4;6,4,8;2,4,5]*[x,y,z]'
> endfunction
-->:2> f(-6,-7,8)
ans =

  0
  0
  0
```

No laboratório em que você deve ter acabado de se treinar, vimos que os vetores-solução de um sistema homogêneo dependem todos do parâmetro z. Claro que você pode ter resolvido de forma diferente da sugestão que fizemos e ter concluído que os vetores todos dependem do parâmetro x. O importante é a *quantidade de parâmetros livres* na solução: <u>um</u>.

Vamos entender isto com um exemplo bem simples, fugindo, momentaneamente, do escopo que propusemos para este capítulo: $\mathbf{R}^2$.

Exemplo 3 *Interseção de dois planos segundo uma reta*

Retomaremos, com outro enfoque, uma das questões do laboratório em que você trabalhou acima.

O sistema de equações $\left\{\begin{array}{ll} 3x+2y+4z & =0 \\ 6x+4y+8z & =0 \\ 2x+4y+5z & =0 \end{array}\right.$ *tem duas equações idênticas, (informação repetida pode ser simplesmente ignorada), pelo menos inicialmente. Considerando apenas duas das equações temos as equações de dois planos*

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+2y+4z & =0 \\ 2x+4y+5z & =0 \end{array}\right. \tag{2.49}$$

Como é um sistema homogêneo, $(0,0,0)$ *é uma solução, então os dois planos tem um ponto comum, logo*

1. *ou tem uma reta em comumu;*
2. *ou coïncidem*

Decidindo qual das duas hipóteses, é a que vale.

Escreva o sistema assim:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x,y,z) = 3x+2y+4z & =0 \\ g(x,y,z) = 2x+4y+5z & =0 \end{array}\right.$$

então as derivadas parciais[7]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \ ; \ \frac{\partial g}{\partial x} = 2 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \ ; \ \frac{\partial g}{\partial z} = 5$$

nos dizem que os planos são diferentes logo a verdade é

"os planos são diferentes, mas têm uma reta em comum"

que é a solução do sistema de equações, a reta, cuja equação paramétrica você encontrou no laboratório acima.

Estamos em condições de entender a generalização do teorema anterior. Os sistema homogêneos tem uma solução garantida, o zero. Mas se houver uma solução diferente de zero ela não será 'unica, vai haver *um espaço de soluções*. No presente exemplo uma reta, em que todos os vetores são múltiplos de uma solução qualquer (escolha um verá que as outros são múltiplos dele).

Quer dizer que se $X_0 \neq 0$ for solução do sistema $\mathcal{A}X = 0$ então λX_0 também será solução. Para prová-lo façamos as seguintes contas:

$$\mathcal{A}X_0 = 0 \tag{2.50}$$
$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \ ; \ \lambda(\mathcal{A}X_0) = 0 = A(\lambda X_0) = 0 \tag{2.51}$$

a segunda linha nas contas acima é consequência das propriedades da multiplicação de matrizes que já estudamos. Então λX_0 é solução do sistema homogêneo. Mas

$$\lambda X_0 \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}$$

é a equação paramétrica da reta que contém o vetor $X_0 \neq 0$.

Isto prova que se um sistema homogêneo tiver uma solução diferente de zero, a solução contém a reta cuja equação paramétrica é $\lambda X_0 \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}$.

Demonstramos assim o teorema

Teorema **9** *Sistemas homogêneos II*

Se um sistema homogêneo de equações lineares

$$\mathcal{A}X = 0$$

tiver uma solução $X_0 \neq 0$ então a reta de equação paramétrica

$$\lambda X_0 \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}$$

é solução do sistema também.

Algumas vezes a redação do teorema fica simplificada assim:

Teorema **10** *Sistemas homogêneos II*

Se $X_0 \neq 0$ for solução de $\mathcal{A}X = 0$ então λX_0 é também solução, para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$.

[7] mande e-mail para os autores explicando porque bastava calcular $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \ ; \ \frac{\partial g}{\partial x} = 2$

agora a redação do teorema não está sugerindo que a solução seja somente o zero, mas como vale para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ então vale para $\lambda = 0$ e, portanto, o zero é solução de um *sistema homogêneo.*

Observação 5 *Usando* `scilab`

Se você tiver resolvido o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 0 \\ 6x + 4y + 8z & = 0 \\ 2x + 4y + 5z & = 0 \end{cases}$$

usando o operador "/" do `scilab`*, viu uma observação que precisamos comentar. Vamos fazer isto agora:*

```
-->:1> a = [3,2,4;6,4,8;2,4,5]
a =

  3  2  4
  6  4  8
  2  4  5

-->:2> det(a)
warning: det: matrix singular to machine precision, rcond = 0
ans = 0
-->:3> b = [0,0,0]'
b =

  0
  0
  0

-->:4> a\b
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 0
ans =

  0
  0
  0
```

A observação do `scilab`

warning: matrix singular to machine precision, rcond = 0

fala que a matriz é singular*, do latim* sozinho *que em inglês também significa* solteira *(single).*

`scilab` *também lhe dá um aviso de que o cálculo do "zero"foi feito com a precisão da linguagem, (*`scilab` *também é uma linguagem de programação). Isto significa que você deve tomar as precauções o "zero"que a máquina encontrou...*

Definição 11 *Matriz singular Se chamam* singulares *as matrizes que não têm inversas (ou equivalentemente) cujo determinante é zero.*

Observação 6 *Limitações da computação A solução feita acima do sistema de equações, usando* scilab, *nos permite tirar uma lição sobre as limitações da computação para resolver problemas.*

O programa não foi capaz de fazer o que nós fizemos manualmente, encontrar uma reta contida no espaço solução do sistema.

Um dos autores deste texto tem um programa que consegue fazer um pouco mais do que scilab. *O programa* `sistema.pas`, *que pode ser encontrado no arquivo* `pas.zip` *em [13], quando detecta que o determinante da matriz é zero, calcula uma solução diferente de zero e emite uma mensagem semelhante a esta do* scilab. *Mesmo assim é uma solução limitada, porque, digamos, achou somente uma reta contida na solução e pode haver muito mais do que uma reta.*

Mas nós, os humanos, sabemos fazê-lo e você vai aprender a fazer isto, aqui, com auxílio de um programa de computação para agilizar as contas.

Em resumo, vimos aqui que os determinantes das matrizes de um sistema de equações definem se o sistema tem solução única ou se serão múltiplas as soluções, caso existam.
Os sistemas de equações lineares homogêneos sempre tem pelo menos uma solução, o zero, mas se tiverem solução diferente de zero será, pelo menos, uma reta inteira.
Precisamos de uma conceituação mais ampla para encontrar todas as soluções de um sistema de equações lineares, mas você vai ver que a solução da equação homogênea é um passo decisivo.

2.5 Exercícios: sistemas lineares.

Exercícios 3 *Sistemas lineares*

1. *Momento angular Considere três objetos dos quais, um a massa é conhecida, 2 kg, e desejamos descobrir a massa dos outros dois. Experimentando com uma barra métrica descobrimos o que se pode ver na figura (fig. 2.3) página 62. Escreva o sistema de equações envolvendo as tres massas e calcule as massas desconhecidas.*

2. *Compostos químicos*[8]

   Podemos compor, sob condições controlada, tolueno C_7H_8 *com ácido nítrico* HNO_3 *para produzir trinitrotolueno* $C_7H_5O_6N_3$ *mais água. A proporção da mistura é determinada pelo número de átomos presentes antes da reação*

[8]O exercício não sugere que você lide com compostos químicos, eles podem ser tóxicos. O objetivo é apenas exemplificar o uso de sistemas lineares. ver http://www.atsdr.cdc.gov/es/toxfaqs/es_tfacts56.html

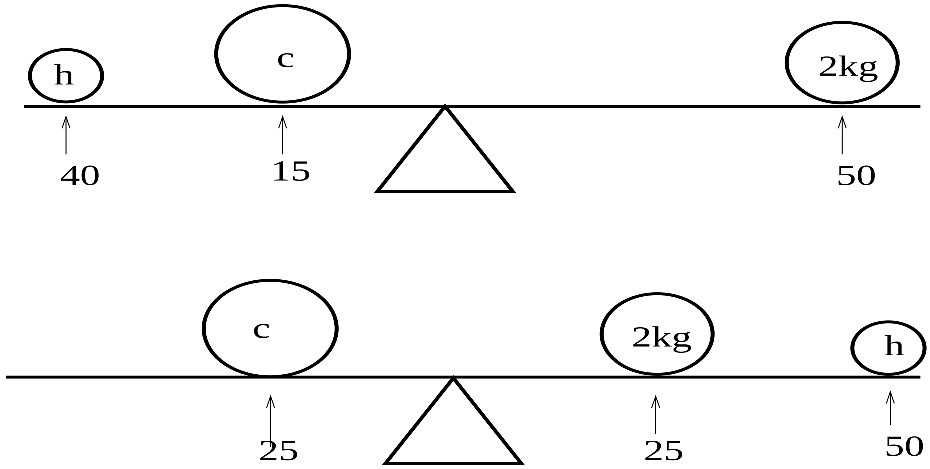

Figura 2.3: Experimentos com massa e momento

química, sendo igual ao número de átomos depois da reação. O número de átomos estão indicados como sub-índices *na fórmula química,*

$$xC_7H_8 + yHNO_3 \longrightarrow zC_7H_5O_6N_3 + wH_2O.$$

Ache o sistema de equações lineares que descreve a quantidade de átomos desta reação química.

3. *combinação linear inteira Um terminal bancário está programado para fornecer cédulas de 10, 20, 50 reais*

   Construa em `scilab` *uma função que estipule a quantidade de cédulas de cada um dos valores que a máquina pode fornecer, para um valor que o usuário deseje. Veja no "help"do* `scilab` *a função "*`fix`". `Na linguagem` $\mathcal{C}$ `esta função equivale a divisão (que é inteira em` $\mathcal{C}$`).`

4. *Discretização de um sistema Numa estrutura metálica, ver figura (fig. 2.4) página 63, se admite que as forças atuem nos seus nós (nas juntas). Na figura considerada existem 8 nós. Suponha que seja uma uma estrutura tri-dimensional e portanto em cada nó consideramos as forças* $(f_{k,x}, f_{k,y}, f_{k,z})$. *Na figura (fig. 2.4) você pode ver algumas dessas forças,* $(f_{3,x}, f_{3,y})$, *representadas.*

   Se interpretarmos

   $$f_{k,x} = \frac{\partial F}{\partial e_k}$$

   podemos dizer que a figura (fig. 2.4) representa a discretização de um sistema, por exemplo da gravidade, obtido com a análise estrutural feita nos 8 nós considerados

   (a) *Escreva a matriz* $\mathcal{A}$, *de dimensão* $8 \text{ x } 3$, *que descreve este sistema.*

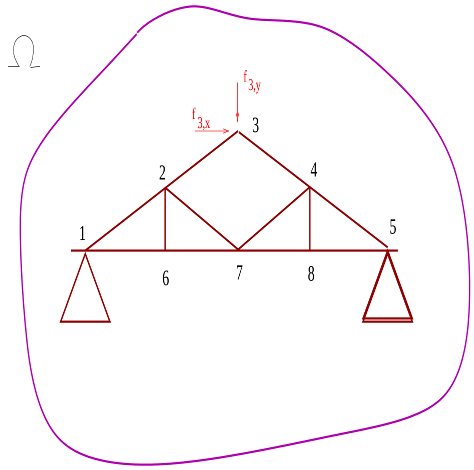

Figura 2.4: Distribuição de forças numa estrutura metálica

(b) Se o sistema for estático (sem movimento) então a resultante é zero. Expresse isto com um sistema linear.

Solução 2 *(a)*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

(b)

———————————————————