# Capítulo 2

# Análise Combinatória Simples.

Análise combinatória é parte antiga, e digamos, hoje, elementar, de uma teoria Matemática chamada `combinatória`. A combinatória se preocupa com os possíveis agrupamentos que um conjunto de objetos possa ter e com as estruturas Matemáticas que se possam descobrir para tais agrupamentos. Discutir poliedros e suas deformações é um assunto da combinatória, discutir "quantas" diagonais pode ter um determinado polígono, também é da `combinatória` porém faz parte de sua parte elementar que é `análise combinatória simples`. O assunto deste capítulo é este último.

## 2.1 Que é Análise Combinatória

A `analise combinatória` é a parte elementar da `combinatória` onde *contamos* o número de formas diferentes que um agrupamento de objetos pode assumir. Exemplos falam mais do que mil palavras:

**Exemplo 7** *Arranjo das letras* $\{a, e, i, o, u\}$.

*A palavra* `arranjo` *é uma palavra técnica da teoria e logo vamos voltar a falar dela. De imediato vamos tratar do assunto informalmente, sem nos preocuparmos com o detalhamento técnico.*

*O que queremos exemplificar é: "de quantas maneiras diferentes podemos retirar três letras do conjunto das vogais". Se você estiver lendo atentamente, reagirá dizendo:* depende, com repetição ou sem repetição. *Claro, muda tudo se for de uma forma ou da outra. Nas placas dos carros os arranjos de três letras admitem repetição e nós podemos nos perguntar quantas placas diferentes os arranjos de três letras permitem produzir. Vamos deixar o cálculo para depois.*

**Exemplo 8** *Outro arranjo das letras* $\{a, e, i, o, u\}$.

*Mas, agora, suponha que as vogais representem, sob forma de código, os nomes de cinco candidatos. Nós queremos determinar quantas chapas diferentes, compostas de três candidatos, poderemos compor. Observe que não tem mais sentido pensar em* <u>*aae*</u>*, pois o candidato* <u>*a*</u>*, não pode aparecer duas vezes na mesma chapa. Quer dizer, estamos procurando os arranjos sem repetição.*

**Exemplo 9** *Arranjos em que a ordem importa.*

*A complicação*[1] *deste exemplo ainda pode ser maior! Para compor a chapa, precisamos de*

- *um* `presidente`*,*
- *um* `vice-presidente` *e*
- *um* `tesoureiro`*,*

*e digamos que seja esta a ordem hierárquica. Isto quer dizer que a chapa* <u>*aei*</u> *é diferente da chapa* <u>*aie*</u> *porque de uma para outra trocamos* `vice` *e* `tesoureiro`*.*

Poderiamos seguir dando exemplos que mostrem como criar tipos diferentes de `arranjos`, mas assim passariamos do escopo de uma introdução.

**Observação 7** *Informalmente: que síο arranjos ?*

*Vamos apresentar uma definição formal de arranjos mais a frente.*

- <u>*Quando importa a repetição*</u> *Como no caso das placas de um carro, em que podemos ter* **AAH***, temos* **arranjos com repetição** *de $n$ elementos. Neste caso $n = 3$.*

  <u>*Símbolo*</u>
  $$\mathcal{A}_{26}^{3}$$
  *porque existem 26 letras no alfabeto e estamos considerando 3 de cada vez. Mais genericamente:*
  $$\mathcal{A}_{n}^{p}$$
  *quando estivermos arranjando os $n$ elementos de um conjunto em "pacotes" de $p$ elementos.*

- <u>*Quando a repetição não é possível*</u> *Como no caso dos códigos representando os canditados, então* **AAH** *não é permitido, temos* **arranjos sem repetição** *de $n$ elementos. Neste caso $n = 3$. Dizemos ainda* **arranjos simples** *de $n$ elementos.*

  <u>*Símbolo*</u>
  $$A_{26}^{3}$$
  *porque existem 26 letras no alfabeto e estamos considerando 3 de cada vez. Mais genericamente:*
  $$A_{n}^{p}$$
  *quando estivermos arranjando os $n$ elementos de um conjunto em "pacotes" de $p$ elementos.*

- *Logo falaremos de subconjuntos com $p$ elementos tirados de um* universo *com $n$ elementos. Neste caso usaremos o símbolo*
  $$\mathcal{C}_{n}^{p}$$
  *para representar o número de subconjuntos com $p$ elementos que podemos extrair do universo.*

---

[1] Discutiremos muitas coisas complicadas em Matemática, complicadas sim, mas não impossíveis de se as entender. Dizer que a Matemá tica é fácil é uma mentira grosseira.

Para terminar a introdução, deixe-nos dizer que vamos apresentar a teoria de modo pouco habitual, **vamos usar** a teoria dos conjuntos que desenvolvemos no primeiro capítulo.

De qualquer forma é este o assunto deste capítulo, queremos *contar* de quantas maneiras diferentes podemos agrupar elementos de um dado *conjunto universo*, ou *contar* quantos subconjuntos tem o *conjunto universo* de uma determinada natureza. A palavra chave, neste capítulo, é *contar*.

## 2.2 Conjunto das partes.

No primeiro capítulo estudamos o conjunto $\mathbf{P}(A)$ cujos elementos eram os subconjuntos de $A$. Um dos instrumentos que surgiram foi o `triângulo de Pascal` que faz uma descrição detalhada de todos os elementos de $\mathbf{P}(A)$. Vamos relembrar estes fatos com os olhos voltados para os nossos interesses combinatórios.

Inicialmente vamos estudar subconjuntos de um conjunto universo. Vamos usar as duas notações

$$C_n^p = \binom{n}{p}$$

para indicar quantos subconjuntos com $p$ elementos podemos tirar de um conjunto $A$ que tem $n$ elementos. Observe que em $\binom{n}{p}$ a posição dos números $p, n$ é invertida, relativamente a outra notação.

Depois vamos estudar as *partições* de um conjunto que é uma coleção de subconjuntos de $A$ selecionando *todos* os elementos de $A$.

Uma pergunta: Para que servem as combinações e as partições? Uma resposta rápida para esta pergunta seria: são essenciais para qualquer estudo estatístico de uma população. Ao estudar uma grande população de indiví duos, é impossível perguntar a todos os indivíduos qual é sua opinião ou sua classe social. Mas se classificados adequadamente, é possível fazer uma inferência bastante precisa do ponto de vista quantitativo e percentual de alguma questão envolvendo os indiví duos da população. Neste capítulo não discutiremos métodos estatísticos, mas os assuntos aqui tratados são básicos para estudos de estatística.

Relembrando, e resolvendo o exercicio (ex., 10) na página 19, para construir o `triângulo de Pascal`, consideramos uma sucessão de conjuntos com número crescente de elementos,

$$A \in \{\{\}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}.$$

Quer dizer que $A$ pode ser o vazio, $\{\}$ ou $A$ pode ser um conjunto unitário $A = \{1\}$, e assim por diante.

Analisamos então qual era a *estrutura* de $\mathbf{P}(A)$ em cada caso.

- Se $A = \{\} = \emptyset$. Então

  $$\mathbf{P}(A) = \{A\}. \qquad\qquad 1$$

  Observe o que já discutimos anteriormente, a questão da *hierarquia*. O *operador* $\mathbf{P}$ cria um novo conjunto diferente de $A$ de tal forma que $A \in \mathbf{P}(A)$. Neste primeiro caso,

  $$\mathbf{P}(A) = \{A\}.$$

  **Se o conjunto $A = \emptyset$, for vazio, então $\mathbf{P}(A) = \{\emptyset\}$ vai ser unitário.**

- Se $A = \{1\}$. Então
$$\mathbf{P}(A) = \{A, \emptyset\}; \qquad 1\ 1$$
O conjunto das partes tem dois elementos, o conjunto vazio e um conjunto unitário. Observe novamente a questão da *hierarquia*:
$$A \in \mathbf{P}(A) = \{A, \emptyset\}.$$
Agora como $A$ tem um elemento, $\mathbf{P}(A)$ tem dois elementos, um deles é o próprio conjunto $A$.

- Se $A = \{1, 2\}$. Então
$$\mathbf{P}(A) = \{A, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}; \qquad 1\ 2\ 1$$
Novamente $A \in \mathbf{P}(A)$.

- Se $A = \{1, 2, 3\}$. Então
$$\mathbf{P}(A) = \{A, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}; \qquad 1\ 3\ 3\ 1$$
Agora começa a se delinear a estrutura de $\mathbf{P}(A)$. O vazio e $A$ estão sempre presentes, (no primeiro caso se confundiram...). Depois tem todos os conjunto unitários, (vamos usar uma nova *linguagem*), vamos dizer "1 a 1". Depois vem todos os conjuntos "2 a 2". Os números nas linhas do `triângulo de Pascal` descrevem isto.
  - Há 1 conjunto "0 a 0" que é o vazio.
  - Há 3 conjuntos "1 a 1", são os subconjuntos unitários de $A$.
  - Há 3 conjuntos "2 a 2", são os subconjuntos com dois elementos de $A$.
  - Há 1 conjunto "3 a 3" que é próprio $A$.

As experiências feitas com o exercício 10, página 19, mostraram a matriz

| **As 7 primeiras linhas do Triângulo de Pascal** |
|---|
| 1 |
| 1 1 |
| 1 2 1 |
| 1 3 3 1 |
| 1 4 6 4 1 |
| 1 5 10 10 5 1 |
| 1 6 15 20 15 6 1 |
| 1 7 21 35 35 21 7 1 |

Assim nos poderiamos prosseguir indefinidamente, mas desta forma o processo é lento. Vamos dar um salto: vamos provar que a linha de ordem $n$ do `triângulo de Pascal` de fato representa a distribuição dos subconjuntos de $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ sendo $A$ um conjunto com $n$ elementos.

Para prová-lo, primeiro que tudo observemos o resultado é independente do *tipo* de dados do conjunto $A$. Interessa apenas o fato de o conjunto $A$ tenha $n$ elementos para que os seus subconjuntos fiquem descritos pela linha ordem $n$ do `triângulo`. Quer dizer que o raciocínio sobre $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ serve para todos os casos.

## Indução finita.

Vamos usar uma técnica chamada[2] `indução finita`

A indução finita consiste numa comparação com os números naturais

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

que sabemos ser um conjunto infinito de tal forma que, se

$$x \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x + 1 \in \mathbf{N}$$

é verdadeiro. $x + 1$ é chamado no conjunto dos axiomas de Peano de *sucessor* de $x$. O conjunto $\mathbf{N}$ contém todos os sucessores de todos os seus elementos.

**Exemplo 10** *Válidade de uma fórmula*

*A soma dos $n$ primeiros números naturais é*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$$

*e nós podemos prová-lo usndo* `indução finita`*.*

*Vamos chamar esta identidade de $P(n)$, isto é, uma* proposição *que de depende de $n$.*

- *<u>Primeiro passo</u>*

  *Vamos verificar que a fórmula vale para um valor inicial de $n$, por exemplo para $n = 2$.*

  $$1 + 2 = \frac{2+1}{2}2 = 3$$

  $\boxed{\textit{é verdadeiro!}}$

- *<u>Hipótese de indução</u>*

  *Vamos supor que a fórmula seja então verdeira para um valor arbitrário de $n; n > 2$ :*

  $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n$$

  *é verdade.*

- *<u>O passo final</u>*

  *Vamos usar a hipótese de indução e assim mostrar que a mesma fórmula vale para $n{+}1$. Se conseguirmos fazer esta demonstração, então teremos demonstrado a fórmula para qualquer $n > 2$.*

  *Quer dizer, vamos calcular:*

  $$1 + 2 + \cdots + n + n + 1$$

  *usando a hipótese de indução, então:*

  $$\begin{gathered} 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \\ = (1 + 2 + \cdots + n) + n + 1 = \\ = \tfrac{n+1}{2}n + n + 1 = \\ = (n+1)(\tfrac{n}{2} + 1) = \\ = (n+1)\tfrac{n+2}{2} = \\ = \tfrac{n+1+1}{2}(n+1) = P(n+1) \end{gathered}$$

---

[2] Deveriamos demonstrar que esta té cnica é verdadeira não vamos fazê-lo aqui, entretanto. Observe num livro de Álgebra, por exemplo [5].

*Portanto* $\boxed{P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \text{ é verdadeiro!}}$

*Confirmamos a fórmula, pois obtivemos novamente "o primeiro mais o ú ltimo, dividido por 2, veze o número de termos".*

*Fica assim demonstrada a fórmula*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2} n \ ; \quad \textit{para todo } n > 2.$$

O que fizemos pode ser sintetizado no teorema:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **4** *da indução finita*

- *Verifica-se que* $P(n_0)$ *é verdadeiro, para um valor inicial* $n_0$ *do índice.*
- *Suposemos, hipótese de indução que, para um valor arbitrário de* $n > n_0$ *a fórmula fosse verdadeira.*
- *Tentamos obter a fó rmula,* $P(n+1)$*, usando a hipótese de indução, com sucesso, então provamos que*

$$\boxed{P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \text{ é verdadeiro!}}$$

*Logo,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n > n_0$.

**Exemplo 11** *Soma dos termos de uma p.a.*

*Queremos mostrar que se dada uma p.a.*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

*então*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \boxed{S_n = \tfrac{a_1 + a_n}{2} n}$$

*Devemos então verificar se a fórmula vale para os dois primeiros termos:*

$$a_1 + a_2 = \frac{2a_1 + 2a_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} 2$$

$$\boxed{P(2) \text{ é verdadeiro!}}$$

*Agora vamos supor válida a fórmula para um valor genérico n de termos e verificar se a fórmula se mantém no passo seguinte:*

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \\
= S_n + a_{n+1} = \\
= \frac{a_1 + a_n}{2} n + a_{n+1} = \\
= \frac{a_1 + a_n}{2} n + \boxed{a_{n+1}} = \\
= \frac{a_1 + a_n}{2} n + \boxed{a_n + r} = \\
= \frac{a_1 + a_n}{2} n + \boxed{\tfrac{2a_n + 2r}{2}} = \\
= \frac{na_1 + na_n + 2a_n + 2r}{2} = \\
= \frac{na_1 + n(a_1 + (n-1)r) + 2(a_1 + (n-1)r) + 2r}{2} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2n+2)a_1 + [n((n-1)) + 2(n-1) + 2]r}{2} = \\
&= \frac{2(n+1)a_1 + [n(n-1) + 2n]r}{2} = \\
&= \frac{(n+1)a_1 + (n+1)a_1 + n(n+1)r}{2} = \\
&= \frac{(n+1)(a_1 + a_1 + nr)}{2} = \\
&= \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2} = \\
&= S_{n+1}
\end{aligned}
$$

*e confirmamos a fórmula $S_{n+1}$ como consequência da hipótese, logo mostramos que*

$$\boxed{P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \text{ é verdadeiro!}}$$

*portanto $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n$.*

Este encadeamento sucessivo existe em muitas relações. Se pudermos provar que ele existe na relação $P(n)$, teremos provado, usando **indução finita**, que esta relação $P$ vale para todo $n \in \mathbf{N}$.

**Exercícios 9** *Indução finita*

1. *Prove, para a soma dos quadrados, que*

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. *Prove que* $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

3. *Prove que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

4. *Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

5. *Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

Ver algumas soluções no fim deste capítulo.

Vamos usar o *método da Indução finita*, para mostrar que, para todo $n$, a linha de ordem $n$ do **triângulo de Pascal**[3] descreve a distribuição, por elementos, dos subconjuntos de $A = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Para prosseguir precisamos encontrar uma expressão formal para representar a hipótese de indução. Vamos começar criando uma notação para os elementos da linha $n$ do **triângulo de Pascal**. Como eles representam a quantidade de conjuntos com $p$, ( $p$ *a* $p$ ), tirados de um universo que tem $n$ elementos, vamos chamar esta quantidade

$$C_n^p.$$

[3] Certas denominações são injustas, há historiadores que encontraram o chamado *triângulo de Pascal* entre documentos da Matemática chinesa milênios antes dos gregos.

Esta notação é tradicional e o $C$ que aparece é a primeira letra da palavra `combinação`, mas você pode ler "conjunto" como fizemos até agora.

Nós estamos construindo as combinações via conjuntos.

- Na linha de ordem 3 Correspondente ao conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, ou a qualquer outro conjunto com 3 elementos, temos:

$$\begin{array}{cccc} C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \tag{2.1}$$

- Na linha de ordem 2 Correspondente ao conjunto $A = \{1, 2\}$, ou a qualquer outro conjunto com 2 elementos, temos:

$$\begin{array}{ccc} C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \tag{2.2}$$

- Na linha de ordem 1 Correspondente ao conjunto $A = \{1\}$, ou a qualquer outro conjunto com 1 elemento, temos:

$$\begin{array}{cc} C_1^0 & C_1^1 \\ 1 & 1 \end{array} \tag{2.3}$$

- Na linha de ordem 0 Correspondente ao conjunto $A = \{\}$ temos:

$$\begin{array}{c} C_0^0 \\ 1 \end{array} \tag{2.4}$$

Algumas propriedades se podem imediatamente enunciar e que não precisarão de ser demonstradas por indução. Usaremos `dedução lógica` para demonstrá-las.

**Observação 8** *Dedução lógica.*

`Dedução lógica` *é método de demonstração que consiste em aplicar as regras da lógica formal a um conjunto de* teoremas *ou* postulados *para assim deduzir um novo* teorema.

**Teorema 5** *Na fórmula $C_n^p$ sempre $p \leq n$.*

**Dem**:

*Porque não será possível extrair de um conjunto com $n$ elementos um subconjunto $p$ a $p$ com $p > n$, pela própria natureza do conceito de "subconjunto".*

**q.e.d .**

**Teorema 6** $C_n^n = 1,\ C_n^0 = 1.$

**Dem**:

*$C_n^n = 1$ porque em um conjunto $A$ com $n$ elementos só há um subconjunto com $n$ elementos que é o próprio conjunto $A$. $C_n^0 = 1$ porque o conjunto vazio é único.*

**q.e.d .**

**Teorema 7** $C_n^1 = n.$

**Dem**:

*Porque no conjunto $A = \{1, \cdots, n\}$ existem $n$ conjuntos 1 a 1.*

**q.e.d .**

**Teorema** **8** $C_n^{n-1} = n$.

**Dem** :

*Porque para construir um cojunto $(n-1)$ a $(n-1)$ temos que tirar um elemento de $A = \{1, \cdots, n\}$ e isto pode ser feito de $n$ maneiras diferentes, são as diferenças $A - \{i\}$ para cada $i \in A$.*

**q.e.d .**

Estes teoremas reforçam a a simétria que podemos observar no `triângulo de Pascal`. Veja, no *índice remissivo alfabético*, onde se encontra o "triângulo", no livro, e verifique a simetria de que estamos falando: os números equidistantes dos extremos são iguais. Portanto,

**Teorema** **9** $C_n^p = C_n^{n-p}$

Vamos analisar agora o número $C_n^2$ dos conjuntos 2 *a* 2 que podemos encontrar em $A = \{1, \cdots, n\}$. Para isto poderiamos considerar os $n$ conjuntos unitários e ver de quantas maneiras poderiamos completá-los para obter os conjuntos 2 *a* 2.

Consideremos o conjunto $\{i\}$ formado pelo elemento $i \in A$. Podemos acrescentar todos os outros elementos, exceto o próprio $i$, logo com $\{i\}$ poderemos fazer $n-1$ novos conjuntos. Isto é, com cada um dos $n$ conjuntos unitários podemos construir outros $n-1$ conjuntos, por exemplo

$$\{i, 1\}, \{i, 2\}, \{i, 3\}, \cdots \{i, n-1\}$$

no caso em que $i = n$.

Como há $n$ elementos, <u>parece</u> que podemos construir

$$n(n-1)$$

novos conjuntos a partir dos $n$ conjuntos unitários e assim (*erradamente*)

$$C_n^2 = n(n-1).$$

Entretanto cada conjunto estaria aparecendo duas vezes, porque

- ao acrescentarmos $j$ ao conjunto $\{i\}$ teremos o conjunto $\{i, j\}$
- mas depois iremos acrescentar $i$ ao conjunto $\{j\}$ para obter o conjunto $\{j, i\} = \{i, j\}$.
- Portanto
$$\frac{n(n-1)}{2}$$
é o número de conjuntos 2 *a* 2 que podemos obter.

**Teorema** **10** $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^{n-2}$.

O último raciocínio feito se aplica imediatamente aos números $C_n^p$ e $C_n^{n-p}$ que ficam equidistantes das extremidades da linha de ordem $n$ do `triângulo de Pascal`.

A quantidade de subconjuntos $p$ *a* $p$ é mesma quantidade de subconjuntos $(n-p)$ *a* $(n-p)$, porque, para obter um conjunto $(n-p)$ $a(n-p)$ temos que tirar de $A$ um subconjunto com $p$ elementos e isto pode ser feito de $C_n^p$ maneiras diferentes:

**Teorema** **11** $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Claro, apenas não sabemos ainda calcular $C_n^p$.

**Exercícios 10** *Fórmulas arredondadas...*

1. *Verifique que*
$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

2. *Verifique que*
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{6(n-3)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

**Observação 9** *Fatorial.*

*O símbolo*
$$n!$$
*representa os produtos de todos os números naturais positivos desde 1 até $n$.*
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n,$$
*leitura: $n!$ "fatorial de $n$".*

*Por convenção, e esta convenção é muito natural, como veremos logo em seguida, se acrescenta*
$$0! = 1,$$
*o fatorial de 0 é 1.*

*Não duvide, aquilo que erroneamente se chama de "genialidade", é, com grande frequência, obra do acaso. Observe aqui um destes exemplos: $2 = 2!$ Esta casualidade nos permite escreve a fómula $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ de maneira mais "elegante" mas na verdade sugerindo a fórmula genérica que logo vamos obter.*

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **12** $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = C_n^{n-2}$.

Já poderiamos observar que
$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!}\ ; C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!}\ ;\ C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$
que nos deixa antever a fórmula geral

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **13**
$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Sabemos que $C_n^p = C_n^{n-p}$, mas não sabemos ainda calcular $C_n^p$. É o que veremos agora.

Queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos tirar um conjunto $p$ *a* $p$ de $A = \{1, \cdots, n\}$. O método que vamos usar se assemelha ao que usamos para obter os conjuntos 2 a 2, vimos de quantas maneiras podiamos completar um conjunto unitário para obter conjuntos 2 a 2 e depois discutimos as repetições assim introduzidas.

Vamos supor que já saibamos quanto vale $C_n^{p-1}$, a quantidade de conjuntos $p-1$ *a* $p-1$.

Para obter um conjunto com $p$ elementos a partir de um conjunto $B$ com $p-1$ elementos basta acrescentar ao conjunto $B$ um elemento $x$; $x \notin B$.

Isto pode ser feito de $n-(p-1)$ maneiras diferentes, porque:

- $n$ é o número de elementos do *universo*;
- $p-1$ é o número de elementos de $B$ que não podem ser reutilizados;
- sobram $n-(p-1)$ que podemos acrescentar ao conjunto $B$ para fazer um novo conjunto $p$ a $p$.

Em outras palavras, *a partir de* $B$ podemos construir $n-(p-1)$ conjuntos diferentes cada um com $p$ elementos.

Logo, em princípio, (e erradamente), teriamos

$$C_n^p = (n-(p-1))C_n^{p-1}$$

novos conjuntos construidos a partir dos $C_n^{p-1}$ anteriores.

*Erradamente* porque há repetições de conjuntos como observamos no cálculo de $C_n^2$.

Depois que fizermos todos os conjuntos desta maneira, muitos estarão repetidos.

Para entender o número de repetições, vamos ver quantas vezes, um mesmo conjunto, pode ser construido desta forma. Suponhamos que o conjunto seja

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\}$$
$$B' = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\} \leftarrow a_p$$

e o elemento $a_p$ esteja sendo acrescentado ao conjunto $B$ produzindo o conjunto $B'$.

O resultado seria o mesmo que se tivessemos o conjunto

$$B'' = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-2}, a_p\}$$
$$B' = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-2}, a_p\} \leftarrow a_{p-1}$$

e tivessemos acrescentando ao conjunto $B''$ o elemento $a_{p-1}$ obtendo o mesmo conjunto $B'$.

Poderiamos repetir este processo para $a_{p-2}, \dots, a_1$, cada um ficando na posição $\leftarrow a_i$ no sistema de equações acima. Assim o conjunto

$$B' = \{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p\}$$

vai aparecer $p$ vezes.

Vemos que

$$C_n^p = \frac{(n-(p-1))C_n^{p-1}}{p}$$

isto é, para cada conjunto $(p-1)$ *a* $(p-1)$ podemos fazer $n-(p-1)$ novos conjuntos, mas cada um desses conjuntos aparecerá repetido $p$ vezes portanto temos que

dividir $(n-(p-1))C_n^{p-1}$ por $p$

para eliminar as repetições.

Estes cálculos mostram que podemos obter $C_n^p$ do valor de $C_n^{p-1}$.

Vamos agora *explicitar* o valor de $C_n^p$ em termos de $n, p$, determinando uma fórmula.

Na sucessão de equações abaixo estamos fazendo isto, completando produtos no numerador e no denominador. Para isto iremos sucessivamente substituir $C_n^{p-1}$ por $C_n^{p-2}$ até chegar em $C_n^0 = 1$ :

$$C_n^p = \tfrac{(n-(p-1))C_n^{p-1}}{p} =$$
$$= \tfrac{(n-(p-1))[(n-(p-2))C_n^{p-2}]}{p[p-1]}$$

$$= \frac{(n-(p-1))[(n-(p-2))(n-(p-3))C_n^{p-3}]}{p[(p-1)(p-2)]}$$

$$\dots$$

$$= \frac{(n-(p-1))[\dots(n-(p-p))C_n^{p-p}]}{p[(p-1)\dots 1]}$$

$$= \frac{(n-(p-1))[(n-(p-2))\dots(n-0)C_n^{0}]}{p!}$$

$$= \frac{(n-(p-1))\dots(n-0)\cdot 1}{p!}$$

$$= \frac{(n-(p-1))\dots n}{p!}$$

A cada passagem de linha, substituimos $C_n^k$ por $C_n^{k-1}$ usando a fórmula obtida acima:

$$C_n^k = \frac{n-(k-1)C_n^{k-1}}{k}$$

e consequentemente aparece um fator maior no numerador e um menor no denominador a cada nova substituição

Seguindo com este método chegamos

- ao produto $p(p-1)\dots 1 = p!$ no denominador, e
- ao produto $(n-(p-1))\dots n$ no numerador.

Observe agora que o produto $(n-(p-1))\dots n$ pode ser completado para transformar-se em $n!$ se acrescentarmos os fatores

$$n(n-1)\cdots(n-p)\ ;\ p < n$$

e que uma fração não se altera se lhe acrescentarmos os mesmos fatores tanto no numerador quanto no denominador.

Observe as transformações aritméticas:

$$C_n^p = \frac{(n-(p-1))\dots n}{p!} =$$

$$= \frac{[1\dots(n-(p+1))(n-p)](n-(p-1))\dots n}{[1\dots(n-(p+1))(n-p)]p!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Surgiu, finalmente, uma expressão envolvendo $n, p$ :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

que vamos considerar *verdadeira* <u>como</u> *hipótese de indução.* Vamos calcular o valor de $C_n^{p+1}$.

| |
|---|
| Preste atenção: não consideramos todo o trabalho feito acima uma demontração, foram apenas experimentos para descobrimos uma hipótese, a *hipótese de indução.* |

Como

$$C_n^p = \frac{n-(p-1)C_n^{p-1}}{p}$$

então

$$
\begin{aligned}
C_n^{p+1} &= \tfrac{n-(p+1-1)}{p+1} C_n^p = \\
&= \tfrac{(n-p)}{p+1} C_n^p = \\
&= \tfrac{(n-p)}{(p+1)} \tfrac{n!}{p!(n-p)!} = \\
&= \tfrac{(n-p)\ n!}{(p+1)\ p!\ (n-p)!} = \\
&\tfrac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!}
\end{aligned}
$$

Conseguimos assim:

- confirmar a fórmula que haviamos achado para $C_n^p$;
- obtivemos a nova fórmula como consequência da anterior.

Estes são as etapas de uma demonstração por indução, logo concluimos que

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **14** *Fórmula do número de conjuntos p a p.*

$$(\forall\ p)\ (C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}).$$

Os números $C_n^p$, que ainda se escrevem $\binom{n}{p}$, se chamam `números combinatórios.`

Como descrevemos cada linha do `triângulo de Pascal` formada pelos números $C_n^p$, e estes descrevem a quantidade de conjuntos p a p de um conjunto universo com $n$ elementos, então temos como subproduto o teorema:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **15** *Número de elementos de* $\mathbf{P}(A)$.
*Se $A$ for um conjunto com $n$ elementos, então*

$$n(\mathbf{P}(A)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^p$$

Vamos ver que a soma expressa no teorema 15 é uma potência de dois.

Por razões histó ricas, porque a teoria dos conjuntos só deixou de ser uma brincadeira da mente de Cantor no início deste século, primeiro surgiu o problema de determinação dos conjuntos *p a p*. E ainda assim não se usava esta linguagem, mas se dizia "determinação das combinações de $n$ elementos tomados *p a p*."

Resta-nos aqui apenas escrever oficialmente uma definição:

**Definição 7** *Combinação p a p de n elementos.*
*Uma combinação "p a p" de "n" elementos é conjunto com p elementos dentre os n elementos considerados.*

Como uma `combinação` é um conjunto, não há repetição de elementos. Tão pouco tem sentido considerar como diferentes duas combinações em que apenas os elementos se encontrem permutados, porque, como conjuntos, são iguais.

**Exemplo 12** *Combinações*

1. <u>*Repetição proibida, ordem irrelevante*</u> *Quantas saladas contendo exatamente 3 frutas podemos formar se dispusermos de 8 frutas diferentes?*

   **<u>Solução:</u>**

   *Uma salada é um "arranjo" da forma*

$$\{f_1, f_2, f_3\}$$

   *em que $f_i$ é uma das oito frutas. Observe entretanto que as duas saladas*

$$\{f_1, f_2, f_3\}, \{f_3, f_2, f_1\}$$

   *são iguais porque não interessa, na salada, se estou comendo "um pedaço de banana mais um pedaço de laranja", ou "um pedaço de laranja mais um pedaço de banana".*

   *É o conjunto de frutas que estou comendo que interessa, então estamos procurando os subconjuntos com 3 elementos das oito frutas que tenho a minha disposição:*

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-5)!3!} = 56$$

2. <u>*Produto de escolhas independentes*</u> *Uma comissão, formada por 3 homes e 3 mulheres, deve escolhida de um grupo de 8 homes e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas ?*

   **<u>Solução:</u>** *Aqui temos um problema misto em que a escolha de homens e mulheres para a comissão é independente, quer dizer, a cada escolha do "arranjo" de homens se "combina" com qualquer um dos "arranjos" de mulheres, para formar uma nova comissão, portanto o número total de arranjos é o produto do número dos possíveis arranjos de homens vezes o número dos possíveis arranjos de mulheres.*

   *A escolha dos homens ou das mulheres é feita de forma semelhante ao exemplo anterior, não interessa a ordem, e sim o conjunto de indivíduos escolhidos, e a repetição é "proibida". Assim o número total é o produto*

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{(8-5)!3!} \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

### 2.2.1 Partições de um conjunto.

Uma outra forma de selecionar subconjuntos de um conjunto $A$ consiste em *fazer uma partição* de $A$

Uma partição de $A$ é uma divisão deste conjunto em subconjuntos cuja união recomponham $A$. Observe a definição escrita formalmente:

**Definição 8** *Partição de um conjunto.*

*Uma partição de um conjunto $A$ é um sub-conjunto de $\mathbf{P}(A)$ formado de conjuntos disjuntos e cuja união é $A$.*

**<u>notação</u>**

$\Pi(A) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ *tal que*
*se* $i \neq j$ *então* $A_i \cap A_j = \{\}$ *e*
$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$.

`Particionar` significa *classificar* os elementos de um conjunto porque

- Todos os elementos são utilizados; a união das partes reproduz o universo.
- Não há elemento que pertença simultaneamente a dois dos subconjuntos escolhidos.

**Exemplo 13** *Partição da cidade em bairros*

*Este exemplo na prática funciona mal porque sempre acontece de haver pessoas que tem casas distintas em bairros diferentes...um homem casado com duas ou tres mulheres ou vice-versa. Mas estes casos são isolados a ponto de não destruir o exemplo, vamos ignorá-los.*

*Os bairros de uma cidade formam uma partição da mesma. São conjuntos disjuntos cuja reunião recompõe a cidade.*

*Há outro problema que deixa este exemplo complicado, nem sempre sabemos exatamente onde começa um bairro e onde termina o outro. Limites* difusos *dizemos.*

*Há várias situações deste tipo que colocam a Matemática sob pressão...*

*Mas os estatísticos consideram os bairros uma partição legal da cidade para fazer os seus levantamentos e quando eles não funcionam, absolutamente não é por causa dos* limites difusos*, são outras razões muito menos* difusas *que atrapalham a veracidade estatística.*

Voltaremos no capítulo 3 a discutir este assunto quando tratarmos de *relações*. Aqui a maneira de ver é da combinatória. Mas vamos logo introduzir a palavra `classe`:

**Definição 9** *Classes de uma partição.*

*Dada uma partição* $\Pi(A)$ *do conjunto* $A$*, os elementos de* $\Pi(A)$ *se chamam* `classes` *de* $A$.

As partições de um conjunto podem ser classificadas e ordenadas. Vejamos alguns exemplos para adquirir alguma intuição a respeito do assunto.

**Exemplo 14** *A partição mais fina e mais grossa de* $A$.

*Considere o conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Dentre todas as partições* $\Pi(A)$ *existe uma que é a mais fina:*

$$\Pi_1(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}\}$$

*que é formada de todos os subconjuntos unitários de* $A$.

*Oposta à partição mais fina está a mais grossa que é*

$$\Pi_2(A) = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\} = \{A\}$$

*Observe que é verdade: toda classe de* $\Pi_1$ *está contida em alguma classe de* $\Pi_2$.

Observe agora a definição de “fino” e “grosso”, as duas definições se assemelham aos nomes que os pedreiros dão as peneiras com que filtram a áreia para construção:

**Definição 10** *Partição mais fina.*

*Dadas duas partições* $\Pi_1(A), \Pi_2(A)$ *dizemos que* $\Pi_1 << \Pi_2$*, leia-se “*$<< =$ *mais fina que”, se toda classe de* $\Pi_1$ *estiver contida em alguma classe de* $\Pi_2$.

Quer dizer que os "buracos" de $\Pi_1$ são menores.

A definição de "mais grossa" se obtem invertendo as desigualdades, escreva-a você mesmo.

Podemos fazer *operações* com duas partições para obter uma terceira, (eventualmente idêntica a uma das existentes...).

**Definição 11** *Cruzamento de partições. Considere duas partições*

$$\Pi_1(A), \Pi_2(A)$$

*de A. O conjunto de todas as interseções de uma classe de* $\Pi_1(A)$ *com uma classe de* $\Pi_2(A)$ *é uma nova partição de A chamada* $\Pi_1 \wedge \Pi_2(A)$.

A palavra *cruzar* é muito usada nos meios de comunicação, com o mesmo sentido usado acima. Quando se *cruzam* informações o que se está fazendo é *calculando as interseções* das classes que cada um tipo de informação produz.

**Exercícios 11** *Partições*

1. *Verifique que* $\Pi_1 \wedge \Pi_2(A) \neq \Pi_1(A) \cap \Pi_2(A)$ *em que à direita se encontra o conjunto das* partes *comuns a* $\Pi_1(A)$ *e* $\Pi_2(A)$.
2. *Verifique que* $\Pi_1 \wedge \Pi_2(A) << \Pi_1(A)$
3. *Verifique que* $\Pi_1 \wedge \Pi_2(A) << \Pi_2(A)$
4. *ordem parcial Mostre, com um exemplo, que dadas duas partições de A elas podem ser incomparáveis com a relação* mais fino *(ou* mais grossa*). Dizemos que estas relações são uma ordem parcial no conjunto das partições.*
5. *difícil ? O conceito de partição pode ser usado em estaística para caracterizar uma classificação dos elementos de um certo universo. Explique isto e dê um exemplo de duas partições que não sejam comparáveis (nenhuma das duas é mais fina que a outra).*
6. *difícil ? Retome a questão anterior, qual o significado de* $\Pi_1 \wedge \Pi_2(A)$ *naquele contexto.*

O cruzamento de duas partições produz uma partição "mais fina" que as duas iniciais. A relação "mais fina" é uma relação larga no sentido que

$$\Pi(A) << \Pi(A).$$

Toda partição é mais fina que do que ela própria. Se não fosse assim o cruzamento das partições do exemplo 14 não funcionaria porque o resultado do cruzamento é a própria partição $\Pi_1$.

**Exemplo 15** *Aplicação.*

*Uma aplicação de partição de um conjunto se encontra em pesquisas estatísticas, por exemplo, pesquisa de opinião. As pesquisas de opinião são particularmente difíceis porque envolvem a psicologia dos indivíduos, (de quem pesquisa e de quem é pesquisado). Uma consequência disto é que as respostas tem que ser filtradas para limpar as influências perturbadoras. Se quisermos fazer uma pesquisa envolvendo assuntos "quentes" como fumo, por exemplo, onde vamos encontrar "fumantes" e "não fumantes" apaixonados, é preciso criar duas ou mais partições para serem posteriormente* *cruzadas afim de* diminuir *os efeitos subjetivos. A palavra chave aqui é* cruzamento de informações.

*Quando isto é feito na "prática" não aparecem subconjuntos escritos entre chaves...mas sim perguntas que classificam as pessoas inquiridas sob dintintos aspectos. Vejamos o caso do "fumo". Montam-se questionários contendo perguntas de assuntos diferentes do que basicamente interessa:*

- *Você gosta de fumar "depois", em alguns momentos especiais?*
- *Apesar de ser fumante, o fumo de outras pessoas o aborrece?*
- *Você prefere fumar ao ar livre ou em ambientes fechados?*
- *Estabeleça ligações entre fumar e outras atividades, marcando com "x" no espaço adequado:*
  - *( ) estudar.*
  - *( ) dirigir.*
  - *( ) conversar.*
  - *( ) discutir.*
  - *( ) jogar xadrez.*
  - $\vdots$
  - *( ) ter relações sexuais.*

*Este questionário feito por um "não fumante apaixonado" e teria que ser criticado, (particionado), com auxílio de um "fumante apaixonado" para se tornar efetivo. Mesmo tendo sido feito por alguém marcado por uma tendência, observe que o questionário classifica as pessoas inquiridas entre:*

1. *jogadores de xadrez e*
2. *não jogadores de xadrez;*
3. *guiadores de veículos e*
4. *não motoristas;*
5. *estudantes;*
6. *políticos;*
7. *fumantes que gostem de fumar ao livre, em baixo de árvores, no jardim, ou*
8. *aqueles que adoram aquele ambiente cheio de fumaça de um bar a portas fechadas, (observe o matiz apaixonado da frase...).*

*Como você vê, na prática não aparecem explicitamente os subconjuntos de A até mesmo porque o conjunto A é "difuso", é o conjunto das pessoas a quem vai ser aplicado o questionário que muitas vezes fica sigiloso.*

**Observação 10** *Teoria e prática.*

*Sirva este exemplo para reforçar outra observação: o fosso que existe entre a teoria e a prática. Não existe uma ligação imediata e óbvia entre estas duas atividades intelectuais,* prática *e* teoria. *É preciso entender bem os conceitos e depois criar a ponte para construir o modelo prático.*

As partições voltarão a ser discutidas com mais detalhes no capítulo 3, também com outro enfoque.

**Exercício 2** *Conjunto das partes e números combinatórios.*

1. *Considere as partições seguintes de* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*:*

$$\Pi_1(A) = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}\} \ ;$$

$$\Pi_2(A) = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7, 8, 9\}\}$$

   *Calcule o cruzamento destas partições. Verifique que a substituição de "interseção por "união" na definição de cruzamento de partições não produz uma partição.*

2. *Qual é partição mais fina: (1) da população particionada por estados; (2) da população particionada por municípios. O cruzamento destas partições produz uma partição nova?*

3. *Você tem nove objetos, oito dos quais tem exatamente o mesmo peso e um mais pesado do que os demais. Determine o número mínimo de pesagens, com uma balança de dois pratos que possam determinar qual é o mais pesado.*

4. *Você tem treze objetos, doze dos quais tem exatamente o mesmo peso e um mais pesado do que os demais. Determine o número mínimo de pesagens, com uma balança de dois pratos que possam determinar qual é o mais pesado.*

5. *Um partido tem 35 membros aprovados na convenção para se candidatarem às eleições e resolve fazer uma simulação para analisar as chances melhores de vitória nas urnas. Quantas chapas pode o partido criar com os 35 candidatos, se quiser apresentar tres candidatos a cada cargo parlamentar: vereador, deputado estadual, deputado federal e senador, um titular e um vice aos cargos de prefeito, governador e presidente.*

6. *Quantas diagonais tem um polígono de 5 lados.*

7. *Analise, para estabelecer uma fórmula, o número de diagonais de um polígono com* $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ *lados. Você poderia estabelecer o número de diagonais de um polígono com n lados?*

8. (a) *A câmara de Vereadores de uma cidade tem 13 membros e quer distribuí-los em comissões de 4 vereadores para estudar os diversos projetos que a* câmara *recebe para consideração. Quantas comissões poderão ser formadas, se o presidente fica excluido de todas as comissões e nenhum vereador pode participar de mais de uma comissão?*

   (b) *Considere que o Prefeito da cidade envia a câmara de vereado-res, em mé dia, 1 projeto por dia e que além disto os próprios vereadores apresentam 4 projetos por semana. Os vereadores se reunem apenas terças, quartas e quintas, mas o executivo funciona cinco dias por semana. Calcule quantos dias pode ficar um projeto, para receber parecer em uma comissão, no máximo, para que a câmara esgote a pauta semanalmente.*

9. *partição de um conjunto*

   (a) *Constrúa duas partições de* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *cujos membros não possum mais de 3 elementos.*

   (b) *Constrúa duas partições de* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *cujos membros não possum menos de 3 elementos.*

10. *A câmara de Vereadores de uma cidade tem 11 membros e quer distribuí-los em comissões de até 3 vereadores para estudar os diversos projetos que a câmara recebe para consideração. Quantas comissões poderão ser formadas, se a mesa diretora decidiu que nenhum vereador pode participar de mais de uma comissão nem pode haver comissões com um único vereador? Tem mais de uma solução o problema?*

## 2.3 O binômio de Newton.

Existe uma fórmula interessante para obter potências de expressões algébricas, chamada de `binômio de Newton`. Vamos chegar até esta fórmula a partir de um exemplo bem particular.

A construção que faremos ligará diretamente esta fórmula ao `triângulo de Pascal`.

Calcule as potências sucessivas de 11 e compare com as linhas do `triângulo de Pascal`.

- $11^0 = 1$.
- $11^1 = 1\ 1$.
- $11^2 = 1\ 2\ 1$.
- $11^3 = 1\ 3\ 3\ 1$.
- $11^4 = 1\ 4\ 6\ 4\ 1$.
- $11^5 = 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1$.

A conclusão é que os números que aparecem na linha de ordem $n$ do triângulo de Pascal, concatenados, produzem a $n - esima$ potência de 11.

Isto vale mesmo para a última linha acima se fizermos uma adequada interpretação. Nela aparece 10 que não é um algarismo, logo temos que lhe aplicar a regra de “passar para a próxima casa”.

Deixamos o zero e levamos o 1 para a aproxima casa:

$$11^5 = 1\ 5\ 11\ 0\ 5\ 1$$

Agora temos o “algarismo” 11 ao qual novamente temos que aplicar a mesma regra para obtermos finalmente:

$$1\ 6\ 1\ 0\ 5\ 1 \rightarrow 161051 = 11^5$$

Não se trata de nenhuma casualidade, apenas escolhemos o exemplo certo: $11 = 10 + 1$. Se calcularmos as potências de $(x + 1)$ vamos ver uma repetição do que se passou acima.

- $(x + 1)^0 = 1$.
- $(x + 1)^1 = x + 1$.
- $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
- $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.
- $(x + 1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.
- $(x + 1)^4 = C_4^0 + C_4^1 x + C_4^2 x^2 + C_4^3 x^3 + C_4^4 x^4$.

Como o `triângulo de Pascal` é simétrico a partir das extremidades, podemos escrever todas as linhas revertidas como fizemos com linha de ordem 4. A linha de ordem 4 nos oferece uma hipótese de indução que vamos redigir assim:

**Hipótese 1** *do binômio.*

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Usando a hipótese de indução no cálculo de $(x+1)^{n+1}$ :

$$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1) = x(x+1)^n + (x+1)^n = \tag{2.5}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \tag{2.7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} = \tag{2.8}$$

$$= C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{k+1} + C_n^n x^{n+1} = \tag{2.9}$$

$$C_{n+1}^0 + \sum_{k=0}^{n-1} [C_n^{k+1} + C_n^k] x^{k+1} + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} \tag{2.10}$$

$$\tag{2.11}$$

Podemos agora "sincronizar" os índices das somas na penúltima equação quebrando o somatório em dois:

$$C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k + C_n^n x^{n+1}$$

fazendo com que a última equação agora fique assim:

$$C_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^{n} [C_n^k + C_n^{k-1}] x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$$

Nesta última equação usamos os teoremas que garantem que valores extremos de qualquer linha do `triângulo de Pascal` valem sempre 1 e subsituimos assim $C_n^0$ por $C_{n+1}^0$ e $C_n^n$ por $C_{n+1}^{n+1}$.

Calculando

$$[C_n^k + C_n^{k-1}] = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$$

Assim temos

$$(x+1)^{n+1} = C_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k$$

que confirma a hipótese de indução para $n+1$. Mostramos assim que:

**Teorema** **16** *do binômio de Newton-caso particular.*
*Para todo* $n \in \mathbf{N}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Observe uma outra demonstração, menos formal:

**Dem** :

Suponha que (hipótese de induç ao) que $(x+1)^k$ tenha os coeficientes

$$C_k^0, C_k^1 \ldots, C_k^{k-1}, C_k^k$$

Quando multiplicarmos $(x+1)^k(x+1)$, pela propriedade distributiva, temos

$$(x+1)^k x \tag{2.12}$$
$$(x+1)^k 1 = (x+1)^k \tag{2.13}$$

Na primeira linha teremos uma expressão parecida com $(x+1)^k$ porém com todas as potências aumentadas de uma unidade. Na outra linha teremos exatamente $(x+1)^k$. Para somar o que deveremos fazer é

- colocar os coeficientes em duas linhas
- deslocar para a direita os coeficientes de $(x+1)^k x$
- somar coluna por coluna

Portanto iremos somar $C_k^p + C_k^{p+1}$ que é a relação que gera os elementos da linha seguinte do *Triângulo de Pascal* portanto os coeficientes de $(x+1)^{k+1}$ serão

$$C_{k+1}^0, C_{k+1}^1 \ldots, C_{k+1}^k, C_{k+1}^{k+1}$$

**q.e.d .**

Para deduzir desta *forma particular* a expressão geral do teorema,

$$(a+b)^n,$$

podemos fazer as seguintes transformações algébricas:

$$(a+b)^n = [b(\frac{a}{b}+1)]^n = b^n(\frac{a}{b}+1)^n$$

e agora identificar $\frac{a}{b} = x$. Podemos agora aplicar o que obtivemos anteriormente:

$$(a+b)^n = b^n(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\tfrac{a}{b})^k) = \tag{2.14}$$
$$b^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \tfrac{a^k}{b^k} = \tag{2.15}$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \tfrac{a^k b^n}{b^k} = \tag{2.16}$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{2.17}$$

**Teorema** **17** *do binômio de Newton.*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

**Exemplo 16** *Número de elementos de um conjuntos*

*Vamos aplicar a fórmula do binômio num caso particular:*

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{2.18}$$

$$a = 1 \ ; \ b = 1 \tag{2.19}$$

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \tag{2.20}$$

$$\tag{2.21}$$

*é a soma dos números combinatórios ou ainda a soma da linha de ordem $n$ do triângulo de Pascal. Vamos salientar estas duas conclusões:*

- *<u>A soma dos elementos</u> da linha de ordem $n$ do triângulo de Pascal é*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

- *<u>O número</u> de subconjuntos de um conjunto*

$$\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

  *com $n$ elementos, é $2^n$.*

**Exercícios 12** *Operações com expressões algébricas*

1. *Calcule $(a+b)(c+d)$ justificando todas as passagens.*
2. *Calcule o valor de $x$ nas equações seguintes justificando todas as passagens:*

$$\begin{array}{ccc} a)\ \frac{x}{2} - 2 = \frac{1}{5} & b)\ 3x + 4 = 1 & c)\ \frac{x+3}{2} = 7 \\ d)\ 3x - 4 = x - 3 & e) 2x - 7 = 5 - x & f) x + 4 = \frac{2x=1}{3} \end{array}$$

3. *Calcule*

$$\begin{array}{ccc} a)(1+x)(1+x) & b)(x+y)(1+x) & c)(x+y)(x-y) \\ d)(x+y)(x+y)e)(1+x)(1+x) & f)(1+x)(1-x) & \end{array}$$

4. *Calcule*
   (a) $(a+b)^2 \ ; \ (1+x)^2$
   (b) $(a-b)^2 \ ; \ (1-x)^2$
   (c) $(a+b)^3 \ ; \ (1-x)^3$
   (d) $(1+0.1)^3 \ ; \ (3.1)^3$
   (e) $(5.3)^4 \ ; \ (12.11)^4$
5. *Se a inflação for 1% ao mez, como insinua o governo, quanto haverá de inflação acumulada ao final de 12 mezes.*
6. *Calcule, usando* binômio de Newton, *a soma dos $n$ primeiros números naturais.*

**Observação 11** *Cálculo de juros sem calculadora*

*Você não precisa mais de uma calculadora para fazer cálculo de juros compostos.*

*Se tiver tomado emprestado um capital $C$ a uma taxa de juros $j$ isto significa que mez a mez você deve pagar $j$ por cento ao* sacado *o que dá:*

$$C + jC = C(1 + j)$$

*ao fim do primeiro mez e sucessivamente:*

$$C + jC = C(1 + j)\ ; C(1 + j)^2\ ; \ldots ; C(1 + j)^{n-1}$$

*Use a linha de ordem $n-1$ do triângulo para calcular $(1+j)^{n-1}$ e depois multiplique por $C$, para descobrir sua dívida após n mezes. Por exemplo, o Brasil "devia" cerca de 300 bilhões de dólares no início do ano 2000. Para calcular a taxa de reajuste da dívida (o chamado "serviço"), temos que usar a linha de ordem 11 do triangulo de Pascal,*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *11* | *55* | *165* | *330* | *462* | *462* | *330* | *165* | *55* | *11* | *1* |
| *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* |

*que são os números combinatórios $C_{11}^p$ corespondentes às potência 11 em $(a + b)^{11}$. Tabulados acima você vê na primeira linha os números combinatórios $C_n^p$, os elementos da linha de ordem 11 do* triângulo de Pascal, *e na segunda linha as correspondentes potências de $a$ em $(a + b)^{11}$.*

*Mesmo que a taxa de juros internacionais fosse "uns suaves" 1%, ao fim de um ano a dívida seria reajustada com a taxa*

$$(1.01)^{11} = 1 + 11 * j^1 + 55 * j^2 + 165 * j^3 + 330 * j^4 + 462 * j^5 + \tag{2.22}$$

$$+462 * j^6 + 330 * j^7 + 165 * j^8 + 55 * j^9 + 11 * j^{10} + 1 * j^{11} = \tag{2.23}$$

$$= 1 + 0.11 + 0.0055 + 0.000165 + 0.000003300000000 + 0.0000000462 + \tag{2.24}$$

$$0.000000000462 + 0.0000000000033 + 0.0000000000000165 + \tag{2.25}$$

$$0.000000000000000055 + 0.0000000000000000000011 + 0.000000000000000000000001 = \tag{2.26}$$

$$1.11567296653165551001 \approx 1.116 \tag{2.27}$$

*Portanto a dívida, submetida a juros "suaves" de 1%a.m. sofreria um reajuste de* 1.1156683466653165651 1 *ao final de um ano, quer dizer, passaria de 300 bi para* $300bi * 1.11566834666531656511 = 334.700503999594966533303bi$. *isto é sofrendo um "leve"reajuste de 34.700503999594966533303 bi em um ano, ou melhor de* 34.700.503.999, 59 *dólares.*

*Só para efeito de comparação, o orçamento do Ministério da Educação fica por volta de 10 bi de reais, logo o reajuste da dívida equivale a 9 anos e meio do orçamento brasileiro para Educação.*

*Infelizmente os juros dos agiotas internacionais não é tão suave... Voce pode procurar nos jornais o valor exato dos juros que nos cobram e corrigir os cálculos acima e deduzir quanto tempo ficaremos com a Educação, a Saúde prejudicadas para satisfazer a ganância dos que já são muito ricos.*

## 2.4 Arranjos simples e com repetição..

### 2.4.1 Arranjos com repetição.

Um exemplo de arranjo com repetição é o “agregado” de três letras que se usa nas placas dos carros: “IIL 4331”. Outro exemplo é o “agregado” de quatro algarismos que completa a placa. São dois exemplos diferentes e tem que ser tratados separadamente.

A definição de “arranjo” é:

**Definição 12** *Arranjos dos elementos de A.*

*Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos. O produto cartesiano $A \ \mathrm{x} \ \cdots \ \mathrm{x} \ A$ de $p$ cópias do conjunto $A$ é o conjunto dos arranjos com repetição $p$ a $p$ dos elementos de $A$.*

Na maioria dos textos sobre análise combinatória o conjunto dos arranjos é despresado se passando direto à quantidade dos arranjos com $n$ elementos dados. Preferimos começar apresentando o conjunto dos arranjos, depois vamos calcular quantos eles são.

**Exemplo 17** *Arranjos 4 a 4 dos algarismos.*

*É este o arranjo que se encontra presente nas placas dos carros, a parte “numérica”. Pela definição estamos nos referindo ao conjunto*

$$A \ \mathrm{x} \ A \ \mathrm{x} \ A \ \mathrm{x} \ A = A^4 = \{(x,y,z,w) \ ; \ x,y,z,w \in \{0,1,\cdots,9\}\}$$

*Habitualmente não se escrevem “vírgulas” se nenhum tipo de confusão se pode estabelecer. Nas placas de carro aparecem “coisas” como 1334 que corresponde na notação da definição a (1,3,3,4).*

Vamos a quantidade dos arranjos com repetição $A^p$ em que o conjunto $A$ tem $n$ elementos. Queremos saber quantos objetos do tipo $(x_1,\cdots,x_p)$ podemos construir. Um instrumento muito útil na construção de arranjos são as *árvores de possibilidades*, veja a (fig. 2.1) na página 55. Uma árvore de possibilidades consiste dum gráfico formado de feixe de segmentos de reta saindo de um ponto dado, (uma das possibilidades) ligando-o a diversos outros pontos, (as outras possibilidades). Na figura (fig. 2.1) você pode ver exemplificada a construção dos arranjos 121,122,120

Como estamos construindo arranjos com repetições, para cada coordenada que se oferece em 10 possibilidades, existem outras 10 possibilidades de escolha das outras coordenadas. O resultado é que podemos construir $10 \ \mathrm{x} \ 10 \ \mathrm{x} \ \cdots \ \mathrm{x} \ 10 = 10^p$. Quer dizer que no caso das placas de carro, em que $p = 4$ podemos ter $10^4 = 10.000$ possilidades diferentes na parte “numérica” da placa, para cada escolha feita na parte “literal”.

E quantas possibilidades existem na parte literal?

Aqui temos novamente um arranjo com repetição das 25 letras do alfabeto, logo temos $25 \ \mathrm{x} \ 25 \ \mathrm{x} \ 25 = 25^3 = 15625$ Quer dizer que o número total de placas diferentes que podemos ter para carros no Brasil é: $15625 \ \mathrm{x} \ 10000 = 156.250.000$ que neste momento é do tamanho da própria população brasileira, e como, *ox alá*, nunca chegaremos a que cada indivíduo venha a sair de casa no seu próprio carro, este número de placas chega para identificar todos os carros rodando nas estradas e cidades do país.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **18** *do número de arranjos.*

*O número de arranjos com repetição de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ é*

$$\mathcal{A}_n^p = n^p.$$

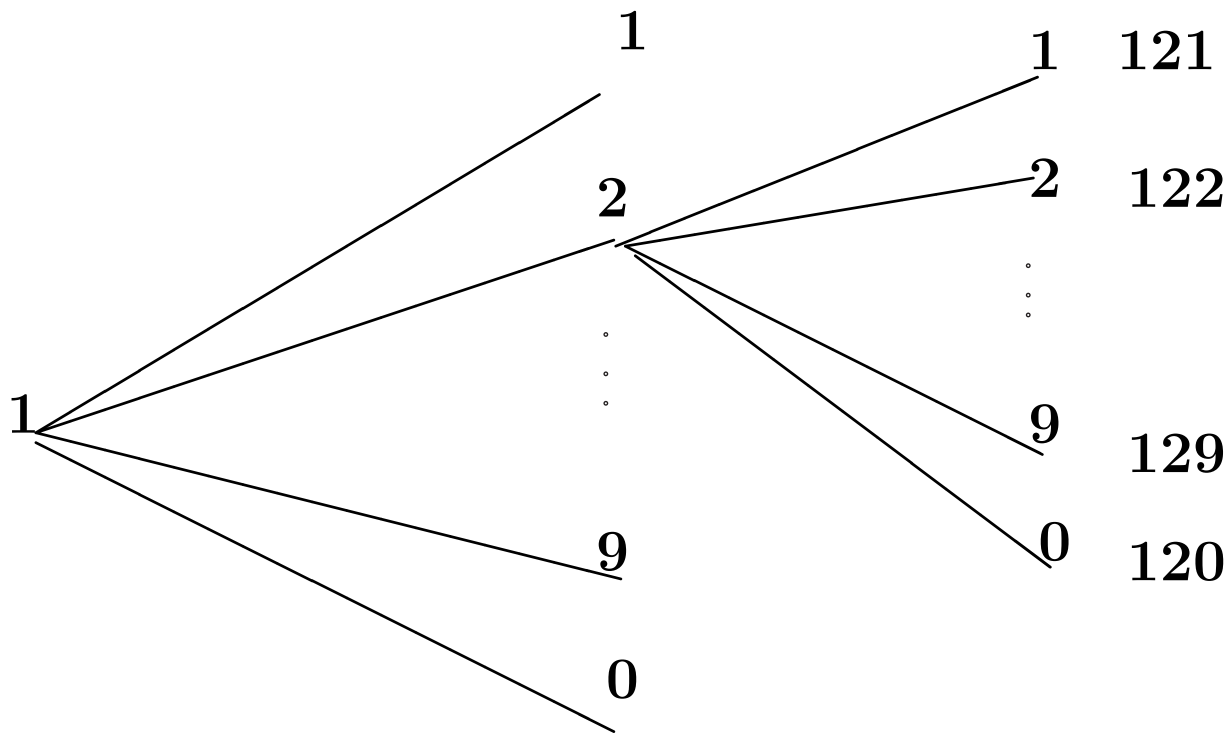


Figura 2.1: Árvore de possibilidades.

**Exercícios 13** *1. Um produtor de TV deseja fazer um show composto de clips de teatro, música e jornalismo. A duração do show é de 2 horas. Mostre as combinações possíveis de composição do show com cada seção durando 15 minutos admitindo-se que no máximo duas seções durem meia hora.*

*2. Componha o horário de uma turma vespertina que tem 4 disciplinas A,B,C,D de modo que todas as disciplinas tenham uma carga igual de 4 horas semanais, exceto a disciplina D que tem 5 horas semanais, com a restrição de que no máximo duas horas seguidas sejam admitidas por dia de aula.*

### 2.4.2 Arranjos simples.

Os `arranjos simples` diferem dos anteriores pela proibição de que seus elementos se repitam.

Usamos *arranjos simiples* sempre que os objetos tiverem individualidade e não puderem aparecer mais de uma vez em conjunto.

**Exemplo 18** *uso de arranjos simples.*

1. *Ao iniciarmos o capítulo usamos como exemplo de combinações uma chapa eleitoral com tres membros. Combinações são* conjuntos *e os dois conjuntos*

$$\{a, e, i\}, \{a, i, e\}$$

*são iguais. Mas os dois arranjos representados acima são diferentes. Podemos resolver melhor a questão que exemplificamos anteriormente, no caso de chapa eleitoral, com arranjos, porque as duas chapas "aei" e "aie" são diferentes se considerarmos que a ordem dos elementos na chapa indica o cargo de cada elemento:* presidente, vice-presidente, tesoureiro.

*Todos os arranjos dos tres elementos* $\{a, e, i\}$ *correponderiam a todas as possibilidades de chapas e seriam uma proposta melhor na convenção do partido onde é bem conhecida a propriedade* ser ladrão *do elemento "i", mas que, notoriamente ativo e dinâmico, poderia ser aceito para a primeira posição, de presidente, conquanto que o elemento "a", notariamente* austero *ficando com a tesouraria garantiria, aos olhos da comunidade do partido, uma melhor saída. Se considerados conjuntos, em que a comunidade partidaria não pudesse decidir que cargo ficaria em que mãos, dificultaria a* ética *partidaria de agir, uma vez que* $\{a, e, i\} = \{i, e, a\}$.

2. *Suponha que cinco pessoas devam assumir a organização de um escritório, mas que se revesem para que o serviço fique aberto 24 horas. Duas pessoas é o suficiente para executar as funções do escritório, e para que a atividade fique mais agradável elas se revezam nos dois tipos de ofícios: atendimento interno e atendimento externo. Vamos chamar estas pessoas de* $a, e, i, o, u$. *A tabela de escalas seria então:*

$$ae, ai, ao, au, ea, ei, eo, eu, \ldots, ua, ue, ui, uo$$

*Observe que a pessoa* $\underline{a}$ *irá trabalhar externamente 4 escalas e 4 escalas no serviço interno, ficando de folga nas escalas restantes. Quantas são todas as escalas?*

*O método de cálculo agora vai considerar um possibilidade a menos para cada escolha inicial feita:* $5 \text{ x } 4$ *Podemos escolher 5 pessoas diferentes para colocar no atendimento externo, e para cada uma dessas escolhas podemos escolher 4 pessoas para o atendimento interno. Isto quer dizer que* $\underline{a}$ *trabalha em oito escalas e folga 12 escalas.*

3. *Podiamos alterar o exemplo anterior considerando um serviço mais complexo que possuisse 4 classes diferentes de tarefas e portanto que fosse necessário ter 4 pessoas presentes em cada escala. Alguns exemplos de escala seriam*

$$aeio, eioa, ioae, oaei, ueio, eiou, ioue, ouei$$

*em que* $\underline{a}$ *trabalha em 4 escalas em ofícios diferentes.*

*Mas quantas seriam todas as escalas: Para a primeira posição temos 5 escolhas diferentes disponíveis, mas para a segunda já só teremos 4, para a terceira 3, para a quarta 2. Portanto o número de escalas será:*

$$A_5^4 = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 = 120.$$

*Se precisassemos das 5 pessoas presentes, mudariam as escalas, mas não a quantidade delas:*

$$A_5^5 = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 120 = 5!$$

*Seria possível ter 6 pessoas presentes ao serviço? a resposta é* **não**, *porque pessoas não podem aparecer repetidas, quer dizer que chegamos no exemplo de cinco pessoas presentes ao limite de cálculo. No caso das placas de carros podemos trocar a quantidade de algarismos presentes de 4 para 6 ou 10 ou 20, porque eles podem ser repetidos.*

Com estas observações estamos preparados para obter a fórmula para o cálculo da quantidade dos arranjos.

Primeiro uma notação: $A_n^p$ para representar a quantidade de *arranjos sem repetição de* $n$ *elementos tomados* $p$ *a* $p$.

Como as possibilidades vão diminuindo à medida que aumentamos o número de coordenadas presentes, vemos que este número tem como primeiro fator $n$ pois a escolha da primeira coordenada é feita com liberdade completa, sem restrições. Mas para escolher a segunda coordenada, temos a restrição de que primeira já não poderá ser selecionada, logo temos apenas $n-1$ possibilidades de escolha. Assim por diante vão diminuindo as possibilidades de *um em um*:

**Teorema 19** *do número de arranjos simples de* $n$, $p$ *a* $p$.

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p\ fatores} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Os arranjos simples ou com repetição são muito usados: número de telefone, placa de carro, a grande maioria dos códigos, por exemplo o CPF, CNPJ.

Os problemas envolvendo o cálculo da quantidade de arranjos pode ficar mais complicado pelo envolvimento de restrições diversas. O exemplo da placa de carros é típico, se tratam de dois tipos de arranjos combinados em *paralelo*, quer dizer que um não restringe a quantidade de elementos do outro e a quantidade de arranjos resultante é o produto das quantidades de um e do outro, como vimos. Estas considerações nos levam a enunciar um princípio de contagem que nada tem de extraordinário mas guarda a idéia intuitiva que com frequência temos que ter para resolver problema de contagem. Vamos enunciá-lo sob a forma de teorema, sem demonstrá-lo:

**Teorema 20** *Princípio de contagem. Se tivermos* $1, 2, \ldots, p$ *situações* `independentes` *e cada uma dessas situações puder se realizar de* $s_1, s_2 \ldots, s_p$ *modos diferentes, o número de modos diferentes de realizar todas estas situações será o produto dos* $p$ *fatores* $s_1$ x $s_2$ x ... x $s_p$.

A observação sobre `independência` das situações é crucial.

**Exemplo 19** *Arranjos e Princípio da contagem*

1. *Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **Solução:** *Note que escolhendo 4 dos 6 algarismos, por exemplo, 1234 é diferente de escolher 1342. Trata-se de um problema de arranjos, em que a ordem dos elementos importa. Assim pelo teorema 19, temos:*
$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 45 \cdot 35 \cdot 25 \cdot 1}{25 \cdot 1} = 360$$

2. *Doze estudantes, 4 cearenses, 4 pernambucanos 4 baianos, disputam uma olimpiada de Matemática. Serão premiados, conforme o regulamento das* olimpiadas *os cinco primeiros colocados. Qual é o número de maneiras de fazer a premiação sendo o único cearense classificado o primeiro lugar ?* **Solução:** *Temos 4 possibilidades de escolher o primeiro colocado. Restam, portanto, 8 competidores para concorrer aos demais colocações. Já que não há outro cearense classificado, temos:*
$$4A_8^4 = 4 \cdot \frac{8!}{(8-4)!} = 6720$$

3. *Princípio da contagem*

   *Doze estudantes, 4 cearenses, 4 pernambucanos 4 baianos, disputam uma olimpiada de Matemática. Serão premiados, conforme o regulamento das* olimpiadas *os cinco primeiros colocados. Qual é o número de maneiras de fazer a premiação.*

   **Solução:**

   *Tudo que temos que fazer é selecionar cinco vencedores dentre os 12 competidores:* $A_{12}^{5} = \frac{12!}{7!} = 95040$

4. *Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras.*

   **Solução:**

   *Pelo teorema do Princípio da Contagem, 20, temos*

   $$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$$

5. *Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão sem nenhuma escolha qualificada das alternativas ?*

   **Solução:**

   *Um gabarito é um arranjo com repetição das alternativas*

   $$a, b, c, d, e$$

   *quer dizer que um gabarito pode ser*

   **a a a a a a a a a a**

   *Então, pelo teorema do Princípio da Contagem, 20,*

   $$cal A_5^{10}$$

### 2.4.3 Permutações.

Um tipo particular de arranjo é aquele em que todos os objetos do grupo são utilizados ao mesmo tempo, veja o exemplo 3 página 56, em usamos as 5 pessoas disponíveis ao mesmo tempo.

Quando isto acontece a fórmula $A_n^n = n!$ se reduz ao fatorial do número de elementos do conjunto de onde se vão tirar os arranjos. Este caso particular recebe o nome de `permutação`. Uma notação particular é também usada para este tipo de arranjo:

**notação**: $A_n^n = P_n = n!$

Se formos usar a fórmula dos arranjos 19 neste caso, seremos levados a escrever:

$$A_n^n = P_n = \frac{n!}{0!}$$

e aí vemos que a convenção de que já falamos anteriormente é importante: $0! = 1$.

**Exercício 3** *Arranjos, permutações, combinações*

1. *Um CPF inteligente.* *Em um determinado paí s, os seis primeiros "dígitos" do CPF dos habitantes se compõe da data de nascimento no formato ano-mes-dia, e mais 4 dígitos escolhidos por ordem de nascimento do cidadão que está entrando no sistema. Quantas pessoas se estima nascer por dia naquele pais?*

2. *No sistema telefônico de uma cidade, existem 10 centrais numeradas de* 00 *a* 09 *e há uma previsão de* 10.000 *linhas telefônicas a serem atendidas por cada uma destas centrais. Qual é o formato mínimo, (com menor número de dígitos) dos números de telefone da cidade.*

3. *O sistema de cadastro de produtos industriais classificou os produtos produzidos ou comercializados no país em 87 classes distintas reservando para cada classe uma sub-classificação que comporte 1000 produtos. Qual é o formato mínimo que o código dos produtos industriais deve ter, deixando inclusive uma margem para expansão da classe de produtos.*

4. *Um grande "shopping" tem nas várias entradas uma caixa de sugestões e os consumidores são convidados a nela informarem dados sobre os produtos que esperam encontrar ou que compram com frquência nas diversas lojas. Os consumidores também são convidados a indicar seu nível de renda e local de residência. Com base nestes dados os técnicos do "shopping" periodicamente fazem análises do comportamento de compras dos fregueses classificando-os segundo:*

    - *bairros onde residem;*
    - *itens frequentes nas listas de compra;*
    - *marcas preferidas para determinados itens;*
    - *faixas de preços dos itens mais procurados;*

    *Desta forma se obtém as seguintes partições do conjunto dos consumidores identificados de alguma forma:*

    - $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$
    - $I = \{I_1, \ldots, I_m\}$
    - $M = \{M_1, \ldots, M_p\}$
    - $P = \{P_1, \ldots, P_q\}$

    *Que informação se pode tirar do cruzamento das partições*

    (a) $B$ e $I$ ?
    (b) $B$ e $P$ ?
    (c) $P$ e $M$ ?
    (d) $P$ e $I$ ?

5. <u>*segurança no trânsito*</u>

    (a) *A guarda de tránsito, em seu afã de cuidadosamente pesquisar o comportamento do motorista no trânsito para descobirir as falhas do sistema, definiu 6 locais* $l_1, \ldots, l_6$ *em que deveria fazer "batidas de trânsito". Mas a guarda tem apenas 3 equipes devidamente preparadas para fazer tais inspeções simultaneamente. Quantos dias levará guarda de trânsito para cobrir todos os pontos da cidade fazendo 4 fiscalizações por dia?*

    (b) *O coronel comandante da guarda de trânsito, para evitar que os motoristas descubram um forma de saber onde vai haver fiscalização nas imediações por onde passam, tem o cuidado de alterar o quadro de "batidas de trânsito" construido na questão anterior. De quantas maneiras pode fazê-lo?*

6. *Temos 10 pessoas e uma mesa rigorosamente circular com 10 cadeiras. De quantas formas diferentes podem as 10 pessoas sentar-se a mesa?*

7. *Um vendedor vai telefonar para 9 fregueses, mas chama 5 no primeiro dia e 4 no segundo dia. De quantas maneiras pode fazê-lo?*

8. *Um vendedor tem quatro produtos de uma empresa e 5 de outra empresa que ele deve apresentar aos clientes de uma cidade. De quantas formas ele pode arranjar suas apresentações. Como fica este número se os produtos de uma empresa não devem ser apresentados junto com os da outra?*

9. *Tendo que se acomodar as pessoas $A, B, C, D, E, F$ em torno de uma mesa circular, de quantas maneiras isto pode ser feito se*

   - *sempre $C, D$ devem sentar juntos.*
   - *nunca $C, D$ devem sentar juntos.*
   - *há três casais que sempre vão querer estar lado a lado.*

10. *As pessoas se classificam, quanto a tipo sanguíneo como $Rh^+, Rh^-$, conforme haja presença ou ausência do Rh e A, B, AB, dependendo da presença destes antígenos no sangue, no caso do O, ausência destes. Faça um diagrama de Venn ilustrando todas estas possibilidades.*

## 2.5 Número de elementos da união de conjuntos.

Nas seções anteriores nos dedicamos a calcular o número de elementos de conjuntos, mas não claramento com este objetivo.
Começaremos com uma fórmula para calcular o número de elementos de

$$A \cup B \cup C.$$

Entre os problemas de contagem um dos mais interessantes consiste de determinar quantos elementos existem em um determinado universo, consideradas restrições sobre os elementos.

As restrições podem ser interpretadas como as interseções entre estes conjuntos. Por exemplo

**Exemplo 20** *Fumantes e jogadores de baralho.*

*Nem todo jogador de baralho é fumante, mas há os que são, e uma sala de jogos de um bar tem que levar isto em consideração para evitar atritos. Claro, tem gente que fuma e não joga baralho.*

*Vamos designar por $F$ e $B$ os dois conjuntos. Então temos tres grupos de pessoas a quem o dono do bar deve servir:*

$$F - B \ ; \ B - F \ ; \ F \cap B.$$

*Se ele quiser num determinado momento contar o número de pessoas que se encontram no bar, basta contar o número de elementos de cada um dos conjuntos acima, porque eles são disjuntos:*

$$n(F \cup B) = n(F - B) + n(B - F) + n(F \cap B) \tag{2.28}$$

*como $F-B$ e $F\cap B$ são disjuntos e além do mais $(F-B)\ \cup\ (F\cap B)=F$ então $n(F-B)+n(F\cap B)=n(F)$ e assim:*

$$n(F\cup B)=n(F)+n(B-F) \tag{2.29}$$

*Mas $n(B-F)=n(B)-n(F\cap B)$ e aí a fórmula acima fica:*

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ ***21*** *do número de elementos da união.*

$$n(F\cup B)=n(F)+n(B)-n(F\cap B)$$

*porque $n(F\cap B)$ entra duas vezes na contagem quando somarmos $n(F)+n(B)$.*

Na figura **??** temos a representação de tres conjuntos $A, B, C$ que se interceptam dois a dois e cuja interceção total é  também não vazia. Um raciocínio semelhante ao que fizemos no exemplo do bar pode ser feito aqui para uma obter uma fórmula para $n(A\ \cup\ B\ \cup C)$. Mas vamos usar um outro caminho que nos vai permitir uma generalização dos resultados usando `indução finita`.

Queremos encontrar uma fórmula para

$$n(A\ \cup[B\ \cup C])=n(A\ \cup[D]) \tag{2.30}$$

e nó s já encontramos uma fórmula para a união de dois conjuntos que vamos usar:

$$n[D]=n[B\ \cup C]=n(B)+n(C)-n(B\cap C). \tag{2.31}$$

Se juntarmos as fórmulas temos:

$$n(A\cup D)=n(A)+n(D)-n(A\cap D)= \tag{2.32}$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(A\cap D)= \tag{2.33}$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(A\cap(B\cup C))= \tag{2.34}$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n((A\cap B)\ \cup\ (A\cap C))= \tag{2.35}$$
$$\tag{2.36}$$

em que apenas expandimos a expressão da primeira equação sucessivamente, sendo que da penúltima equação para a última usamos a distribuitividade da "interseção" relativamente a "união". Escrevendo separado o valor de

$$n((A\cap B)\ \cup\ (A\cap C))=$$
$$n((A\cap B)+n(A\cap C))-n((A\cap B)\cap(A\cap C))$$

usando a fórmula 21 aplicada a $A\cap B\ A\cap C$. As propriedades associativa e comutativa da interseção nos permite simplificar a última expressão de 2.37:

$$(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\ \cap\ B\ \cap C$$

de modo a equação (eq. ,2.37) agora fica

$$n((A\cap B)\ \cup\ (A\cap C))=$$
$$n((A\cap B)+n(A\cap C))-n(A\cap B\cap C)$$

que substituida na equação 2.36 nos dá:

$$n(A \cup \ B \cup C) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) +$$
$$+(A \cap B \cap C)$$

Aa figura (fig. 2.2) página 62, mostra a união dos tres conjuntos $A, B, C$.

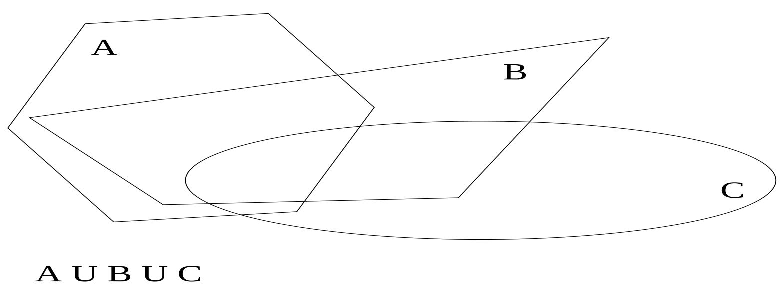


Figura 2.2: $A \ \cup \ B \cup C$

Com esta última fó rmula se esboça uma *hipótese de indução.* Vemos que primeiso somamos os números de elementos dos conjuntos 1 *a* 1, depois subtraimos o número das interseções consideradas 2 *a* 2, depois somamos o número de elementos da interseção 3 *a* 3 dos conjuntos.

**Exercício 4** *Número de elementos da união de quatro conjuntos.*
*Tome uma folha de papel, e se prepare para escrever no sentido do comprimento, em vez da largura... Calcule* $n(A \cup [B \cup (C \cup D)])$*, que você deve desenvolver de dentro para fora usando as fórmulas já estabelecidas acima.*

hipótese de indução nos diz que q

$$n(A_1 \ \cup \ \cdots \ \cup \ A_n)$$

vai ser dada pelas somas e diferenças se alternando dos números de elementos das interseções $i$ $a\imath$ em que $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Observe que aqui uma *generalização da linguagem* em que estamos chamando de $A_j$ uma interseção 1 *a* 1, depois $A_i \cap A_j$ é uma interseção 2 *a* 2, etc...

É mais fácil expressar o resultado com palavras como fizemos acima, do que escrever uma fórmula para sua expressão...mas se você quiser tentar:

**Exercício 5** *Número de elementos da união de conjuntos.*

1. *** Expresse* $n(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ *em termos dos números de elementos dos conjuntos* $A_1, \cdots, A_n$ *e dos números de elementos das interseções destes conjuntos entre si.*

   *Na figura (fig. 2.3) página 63, você representados os conjuntos* $A, B, C, D$.

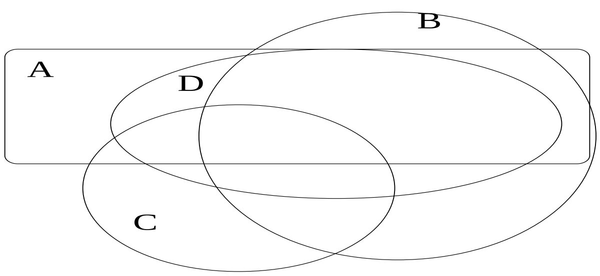


Figura 2.3: $n(A \cup B \cup C \cup D)$

2. *Numa pesquisa de geoló gica sobre produção de petróleo se consideraram tres amostras todas com o mesmo número de poç os, 100, se verificando:*

   - *Dos poços perfurados sem informações sobre dados sismológicos da região,* 30% *produz óleo.*
   - *A metade dos poços em que os testes sismológicos revelaram uma estrutrutura geológica subterânea favorável, são secos.*
   - 5/6 *daqueles que os testes revelaram ausência de estrutura geolócia subterrânea favorável, são secos.*

   *Encontre*

   (a) *Qual é o percentual de poços em que os testes reveleram estrutura geológica subterrânea favorável e que produzem óleo*

   (b) *Qual é o percentual de poços em que os testes reveleram ausência de estrutura geológica subterrânea favorável mas que produzem óleo*

(c) *Quantos poços são produtivos?*

3. *Uma livaria que mantém um* clube de leitura por correspondência*, fez um levantamento preliminar sobre a participação no clube em cima do seu cadastro de clientes tendo como resposta que* 35% *dos entrevistados participariam do clube no ano seguinte. Revendo os resultados posteriormente, a livraria observou que*

   - 80% *dos que estavam participando haviam dito preliminarmente que ficariam ativos no clube;*
   - 20% *dos que não participaram se encontravam entre os que disseram que iam participar.*

   (a) *Qual foi o percentual dos clientes cadastrados que participou do cluble?*

   (b) *Qual foi o percentual que não correspondeu a sua própria expectativa?*

4. *Num vôo internacional se encontram 10 rapazes, 5 crianças brasileiras, 10 homens, 7 rapazes americanos, 15 brasileiros, 7 adultos brasileiros, 9 mulheres americanas. Quantos passageiros havia neste vôo?* `Resp 34`

## 2.6 Número de elementos no produto cartesiano.

Quando estudamos os **`arranjos com repetição`** vimos que o conjunto destes arranjos era o produto cartesiano $A^p$ em que $A$ é o conjunto de onde são tirados os objetos que se quer *arranjar*, e $p$ é quantidade que se toma para cada arranjo.
Em algumas ocasiões interessa discutir o número de elementos de $A \text{ x } B$, o produto cartesianos de conjuntos distintos, é o caso das placas dos carros.

Um exemplo mostra o método de trabalho.

**Exemplo 21** *Os pares para dança.*
*Numa danç a de quadrilha existem 15 rapazes e 11 moças inscritos, e se fez uma acerto que a cada música todos os rapazes danç ariam com todas as moç as. Como cada dança demora 3 minutos, quanto tempo durou a festa se todas as moç as dançaram com todos os rapazes.*

*Do número de elementos do produto cartesiano,* $15 \text{ x } 11$ *deduzimos quanto tempo duraria a dança, porque em cada momento haveria 11 pares dançando:* $\frac{15 \text{ X } 11}{11} = 15 \text{ x } 3$ *minutos.*

*Para que ningué m reclamasse que deixou de dançar com alguém, o organizador da festa, que era um professor de matematica, colocou as 11 moças em fileira e na perpendicular a esta colocou os 15 rapazes pedindo depois que as moças ocupassem a diagonal do retângulo* $11 \text{ x } 11$ *e cada uma se dirigissem ao rapaz que estivesse a sua frente. Termninada a dança, com todos de volta aos seus lugares, ele pedia aos rapazes que se permutassem circularmente, quer dizer o primeiro da fila passava para o último lugar e os demais davam um passa para o lado fechando o lugar do primeiro, e novamente se repetia o processo de escolha, na diagonal, do rapaz, atéque o primeiro retornasse ao seu lugar.*

*Mas o números de pares feitos foram* $15 \text{ x } 11$ *e em cada momento dançavam 11, portanto foram precisos 15 momentos de 3 minutos logo 45 minutos para cada música.*

*A festa durou* $5 \text{ x } (45$ *minutos*$)$.

A lição que se tira deste exemplo é que usamos o produto cartesiano como um modelo para determinar como seria resolvido o problema.

**Teorema 22** *Número elementos do produto cartesiano*
*O número de elementos de* $A \;\text{x}\; B$ *é* $n(A) \;\text{x}\; n(B)$, *o produto dos números de elementos de cada conjunto:*

**Exercícios 14** *Número de elementos de um conjunto*

1. *Se* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{a, e, i, o, u\}$
   (a) *represente graficamente* $(A - B) \;\text{x}\; C$ *e calcule o número de elementos deste conjunto.*
   (b) *represente graficamente* $A \;\text{x}\; C - B \;\text{x}\; C$ *e calculo o número de elementos deste conjunto.*
   (c) *Um* elemento-diagonal *de um produto cartesiano é todo elemento que tiver pelo menos duas coordenadas iguais. Calcule o número de* elementos diagonais *de* $A \;\text{x}\; A \;\text{x}\; A$.
2. *Na classificação do sangue, as pessoas são analisadas quanto åpresença dos antígenos* $A, B, Rh$ *em que se usa a terminologia* $Rh^+$ *ou* $Rh^-$ *conforme este antígeno esteja presente e* $O$ *se nenhum dos antígenos* $A, B$ *esteja presente. Represente, com um produto cartesiano, todas as classes de doadores.*
3. *Se* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *represente graficamente o conjunto* $A \;\text{x}\; A$
4. *Numa pesquisa envolvendo 1000 famílias, encomendada pelos editores das revistas A,B,C teve a seguinte resposta:*

| *A* | *B* | *C A e B* | *A e C* | *B e C* | *todas* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *28%* | *30%* | *42%* | *8* | *10* | *5* | *3* |

- *Quantos dos entrevistados não lê nenhuma das revistas?*
- *Quantas liam apenas a revista A?*
- *Podemos concluir que A leitura de B implica na leitura de C para alguns dos entrevistados?*