Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos.

Na década de 60 se iniciou uma renovação de linguagem em matemática colocando o conceito de conjunto como módulo central de toda a construção matemática.
A razão bem simples para isto se encontra nos seguintes fatos:

1. As operações fundamentais com conjuntos servem de *modelo concreto* para as operações fundamentais da lógica. Em suma, estudar Teoria dos Conjuntos equivale a estudar uma *realização do modelo da lógica formal*.
2. Todas as estruturas matemáticas tem como objeto inicial uma família de conjuntos à qual se associam relações típicas da estrutura. Existem algumas exceções a esta regra, *teoria dos grafos* por exemplo, mas se tratam de autênticas exceções confirmando a regra geral ...

Quer dizer que, estudando conjuntos estamos desenvolvendo a ferramenta básica para produzir matemática, *a lógica formal*, e estamos também produzindo os blocos básicos desta construção.

1.1 O conceito de conjunto.

A grande dificuldade de se iniciar qualquer *conversação* ou explanação teórica reside *na definição das idéias básicas, nas convenções iniciais* que vão servir de alicerce para o resto da construção. No início do século 20 este sentimento se concretizou vindo das dificuldades sentidas pelos nossos predecessores no século 19 e se criou o conceito de *noções básicas* que, junto com os *postulados* formariam, o background da teoria e seria aceitas sem discussão, a menos que outra teoria seja desejada.

Conjunto é, para a Teoria dos Conjuntos, esta *noção primeira*. Os que nos precederam no início do século 20 e escreveram sobre esta teoria, ficaram circulando entre palavras como *agregado*, *lista* ou *conjunto*, tentando com uma, justificar a outra. Depois de algum tempo a frase "conjunto é uma idéia básica, que não iremos definir", começou a prevalecer nos textos.

Não definiremos *conjunto* como ninguém definiu para você as primeiras palavras da lingua que você fala. Diziam-lhe, no começo, que um determinado objeto era uma *cadeira* e que outro era uma *mesa* sem lhe apresentar nenhuma lógica porque uma cadeira não seria uma mesa, ou vice-versa. Somente depois, quando você já havia adquirido algum vocabulário básico é que lhe foi dado o direito de fazer perguntas. Para não agir de forma tão autoritária, daremos alguns exemplos de conjuntos, escreveremos algumas frases iniciais de forma semelhante ao modo como você aprendeu a falar...

Escrevemos:

$$\{a, e, i, o, u\} \text{ é um conjunto,}$$

"a" é um elemento deste conjunto,
e, i, o, u também o são.
Temos uma simbologia para resumir a frase "a é um elemento do conjunto $\{a, e, i, o, u\}$".

- Inicialmente damos um *nome* ao conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ escrevendo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

- Depois diremos $a \in A$, em que o símbolo "$\in$" lê-se "pertence".
- Então as frases $a \in A$, $e \in A$, $i \in A$ são *sentenças verdadeiras.* Da mesma forma as sentenças:

$$b \in A, c \in A$$

  são falsas e a *negação* delas é

$$b \notin A, c \notin A.$$

  em que o símbolo $\notin$ lê-se "não pertence".

Observação 1 *Sintaxe e linguagem*
Não fizemos nenhuma tentativa de definir os símbolos

$$\in, \notin .$$

Tudo que fizemos foi escrever frases para lhe mostrar qual era a sintaxe *do uso destas* palavras*.*

Estamos construindo uma linguagem *e o método se assemelha àquele usado no aprendizado da lingua materna: em lugar de* explicar como são as coisas*, damos* exemplos mostrando como as coisas funcionam*. As linguagens, sejam elas* naturais *ou* linguagens de computador *têm uma semelhança que é preciso salientar:*

- **nomes**

  Há símbolos chamados nomes*, os substantivos, que guardam o significado de objetos com os quais* fazemos algumas *ou que* fazem algumas coisas*. Alguns destes símbolos são chamados* `variáveis`*;*

  A é um nome que guarda o valor $\{a, e, i, o, u\}$. A é uma variável.

  Outros símbolos tem um uso mais estável*, o valor deles é imutável, e eles são chamados* `identificadores`*.*

  cadeira *é um exemplo de* `identificador` *da linguagem brasileira,* coisa *é um exemplo de* `variável` *da linguagem brasileira;*

- **predicativos** *Há palavras que representam a* `ação` *ou a* `qualificação` *a ser exercida sobre as variáveis,* verbos *ou conjuntos de palavras, chamados* predicativos*;*

$$\in, \notin$$

  são predicativos;

- **controle do fluxo lógico** *Há palavras que representam a conexão lógica ou o controle lógico, enfim a decisão nas* bifurcações*,* se, então *controlam o fluxo lógico da linguagem,* são pontos de decisão *do discurso;*

- **operadores lógicos** *A lógica (e consequentemente a teoria dos conjuntos) tem operadores que transformam proposições em outras proposições,*

$$e, ou, \Rightarrow, não$$

são operadores lógicos.

$$e, ou, \Rightarrow$$

são operadores binários, quer dizer que recebem dois parâmetros para modificar criando um terceiro.

não

é um operador unário, quer dizer, recebe um único parâmetro para modificar.

A Matemática, como as linguagens de computador, tem estas características. O que difere a Matemática ou uma linguagem de computador das linguagens naturais *é a ausência de aspectos subjetivos, presentes nas linguagens naturais, que tornam os substantivos multi-valuados. Se espera que a Matemátca ou as linguagens de computador não tenham* semântica*, portanto não tenham ambiguïdades... mas existe também Inteligência Artificial, que é computação e admite ambiguïdades.*

Agora vem a primeira definição. Nela vamos tomar alguns *elementos básicos* e lhes aplicar `operadores lógicos` produzindo um novo *elemento*, ou *conceito*.

Definição 1 *Subconjunto*
Dado um conjunto A diremos que um outro conjunto B é um subconjunto *do primeiro, em símbolos*

$$B \subset A$$

se a frase seguinte for verdadeira

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Para demonstrar que um determinado conjunto é subconjunto de outro, temos que verificar, exaustivamente, a frase

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

para todos os elementos de B ou apresentar uma dedução lógica desta frase.

Por exemplo, o conjunto

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

é um subconjunto de

$$A = \{a, b, c, d, e, f, ..., z\}$$

$$V = \{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, ..., z\} = A.$$

porque $\boxed{\textbf{Dem}}$:

$$V \text{ é um conjunto de vogais} \tag{1.1}$$

$$A \text{ é o conjunto de todas as letras} \tag{1.2}$$

$$x \in V \Rightarrow x \text{ é uma letra} \Rightarrow x \in A \tag{1.3}$$

$$x \in V \Rightarrow x \in A \equiv V \subset A \tag{1.4}$$

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Na demonstração acima fizemos uma dedução lógica da inclusão sem necessitar de fazer uma verificação exaustiva, elemento por elemento, de que os elementos de V também eram elementos de A. Vamos apresentar outro demonstração em que, *exaustivamente*, iremos testar a verdade $V \subset A$. $\boxed{\textbf{Dem}}$:

$$a \in V \text{ e } a \in A \tag{1.5}$$
$$e \in V \text{ e } e \in A \tag{1.6}$$
$$i \in V \text{ e } i \in A \tag{1.7}$$
$$o \in V \text{ e } o \in A \tag{1.8}$$
$$u \in V \text{ e } u \in A \tag{1.9}$$

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$ Observe que um pouco mais acima haviamos escrito

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

e agora usamos $V = \{a, e, i, o, u\}$. Não há nenhum erro nisto, mas obviamente devemos evitar de usar tão seguidamente "valores" diferentes[1] para uma *variável*.

Exercícios 1 *Sintaxe e lógica*

1. *nome, predicado, controle lógico do fluxo, operação*

   Identifique nas frases abaixo o que é nome, predicado, controle de fluxo

   (a) $x \in A$

   (b) A *e* B

   (c) $\not A$ *ou* B

   (d) *Se* $x \in A$ *então* $x \in B$

   (e) *Enquanto* $x \in A$ *escreva* x

   (f) $x \in A \Rightarrow x \in B$

2. *Mostre que* $V = \{0, 2, 4, 6, 8\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = A$ *usando uma dedução lógica, (isto é), sem verificar a veracidade de cada uma das possíveis relações* $x \in V \Rightarrow x \in A$. **Solução:** *Como A é o conjunto de todos as números menores que 10, então para qualquer que seja* $x \in V$, *como x é número par menor do que 10 então* $x \in A$ *isto é*

   $$x \in V \Rightarrow x \in A \iff V \subset A$$

3. *Apresente os elementos dos conjuntos definidos por*

   (a) $\{x \in \mathbf{N}; x < 10\}$

   (b) $\{x \in \mathbf{N}; x > 10\}$

   (c) $\{x \in \mathbf{N}; 3 < x < 10\}$

   (d) $\{x \in \mathbf{N}; 3 \le x < 10\}$

   (e) $\{x \in \mathbf{N}; 3 \le x \le 10\}$

   (f) $\{x \in \mathbf{N}; x < 0\}$

   (g) $\{x \in \mathbf{N}; x \text{ é par}\}$

   (h) $\{x \in \mathbf{N}; x \text{ é impar}\}$

[1] isto é bem natural num programa de computador, mas deve ser evitado num texto para leitura humana

4. *Propriedades, "desigualdade" e "contido"*

   (a) *Se* $P = \{x \in \mathbf{N}; x \text{ é par}\}$ *e* $I = \{x \in \mathbf{N}; x \text{ é impar}\}$ *então é verdade que*

   - $P \subset I$?
   - $I \subset P$?

   (b) *Dados dois números naturais,* $x, y \in \mathbf{N}$ *então é verdade que (*`tricotomia`*)*

   a) $x < y$ *ou;* *b)*$x > y$ *ou;* *c)*$x=y$

   (c) i. *Descreva as propriedades que você conhece de "*$<$*"em* $\mathbf{N}$.

   ii. *Descreva as propriedades que você conhece de "*$\subset$*"entre conjuntos.*

   iii. *Se você fosse aplicar o adjetivo "fraca" a uma das duas relações* $<, \subset$, *qual das duas receberia o adjetivo, a partir do resultado dos dois itens anteriores.*

5. *Quais dos conjuntos seguintes, tomados dois a dois, são diferentes:*

$$, \{\}, \{0\}$$

Solução: *Todos são diferentes:*

- *O conjunto* $\{0\}$ *contém um elemento, o número zero;*
- *O conjunto* $\{\}$ *contém um elemento, o conjnto vázio;*
- *O conjunto é o conjunto vázio, não tem elementos.*

6. *Construa um diagrama representando o conjunto* U, *universo, e mais os conjuntos* A, B, C *tal que*

$$A \not\subset B \ ; \ B \not\subset A \ ; \ C \subset A \ ; \ C \subset B$$

Solução: *Observe na figura (fig. 1.1) página 12, a representação gráfica da solução.*

7. *Considere* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e determine:*

   (a) *O número de subcojuntos de* A.

   (b) *Quantos subconjuntos de* A *possuem 2 elementos.*

   (c) *Quantos subconjuntos de* A *possuem 4 elementos.*

1.2 Conjunto e estrutura.

Você viu um primeiro exemplo de *estrutura* em dos exercícios acima quando lhe pedimos para descrever as propriedades de "$<$" em $\mathbf{N}$ ou as propriedades de "$\subset$" entre conjuntos. Vamos discutir mais a fundo este conceito agora. Lembre-se do método que adotamos, não vamos dizer-lhe tudo, você terá que descobrir os fatos a partir dos exemplos.

Exemplo 1 *Figura plana.*

- *Um triângulo fica bem determinado pelos seus tres vértices.*
- *Um quadrilátero pelos seus quatro vé rtices.*
- *Podemos falar do conjunto* $\mathcal{P}$*de todos os polígonos do plano.*

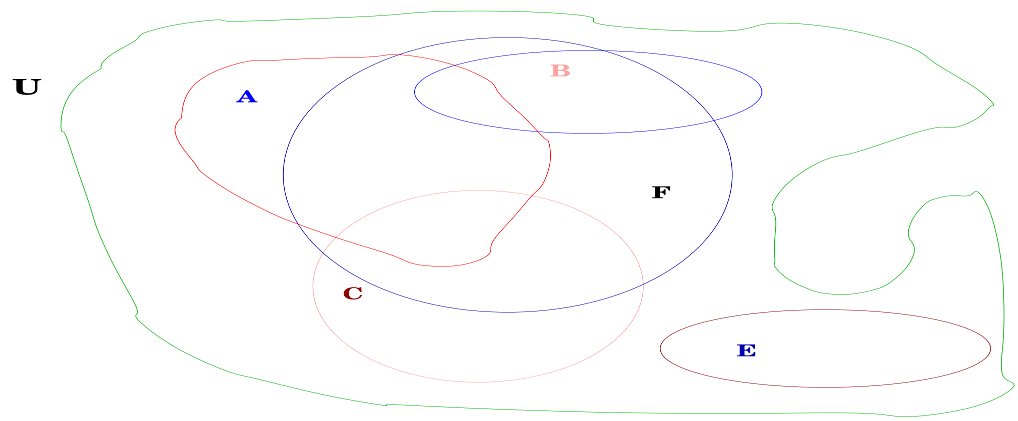

Figura 1.1: O conjunto universo e tres subconjuntos

Outro conceito associado aos polígonos é "área". Podemos criar uma estrutura *associada aos possíveis polígonos determinados por conjuntos finitos de pontos do plano, que vão constituir os vértices dos polígonos. Se aplicarmos o* método *"área" a este conjunto de polígonos, e se designarmos este* método *com a letra A, estamos fazendo referência åestrutura ($\mathcal{P}$,A).*

Exemplo 2 *Grafos*

Um conjunto finito de pontos do plano determina um polígono mas podemos vê-lo sobre outro enfoque.

A figura (fig. 1.2) página 13, contém um exemplo de grafo com vários caminhos tendo como oirgem O. Por exemplo

$$OABCD, OCD, OACD, OED.$$

Observe que as setas indicam o sentido do fluxo.

Um grafo é um método associado a um polígono. Agora, em vez de calcularmos áreas, estamos definindo caminhos possí veis entre os "nós". O resultado é um grafo.

Se designarmos um grafo qualquer com a letra G agora estamos estudando ($\mathcal{P}$,G).

Os grafos são usados para modelar o fluxo do trânsito, ou as rotas de entregas de mercadorias, rotas de linhas aréas, enfim tudo que envolver "caminhos" entre um conjunto de nós dados.

Agora os vértices *se chamam* nós.

Exemplo 3 *Semelhança*

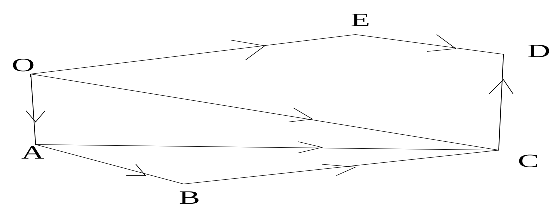

Figura 1.2: Um grafo com 6 nós

Se considerarmos ainda o conjunto de todos os polígonos, podemos identificar, dois a dois, aqueles que sejam semelhantes. *É um outro* método *que podemos associar aos polígonos.*

Podemos designar a semelhança com o símbolo $\approx$ *e neste caso estamos estudando* $(\mathcal{P},\approx)$.

Vejamos um exemplo bem diferente dos anteriores, mas sempre em torno do assunto: conjunto, método, estrutura.

Exemplo 4 *Conjunto dos números naturais*

No conjunto $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ *podemos considerar o método* adição. *Neste caso estamos estamos estudando* $(\mathbf{N},+)$.

Se, ao invés de associarmos aos números naturais o método adição, lhe associarmos o método multiplicação, *estaremos considerando a estrutura* $(\mathbf{N},\cdot)$.

Vamos resumir as idéias contidas nos exemplos acima.

- métodos Associados ao conjunto dos polígonos identificamos acima tres métodos:

  grafo, área, semelhança.

  Associado ao conjunto dos números naturais, identificamos dois métodos:

  adição, multiplicação.

  Observe que esta listagem não é exaustiva.

- estrutura Quando analisamos um conjunto e um método que esteja definido nele, estamos estudando uma estrutura. Se analisarmos mais de um método, estaremos estudando uma estrutura mais complexa. Fomos levados assim a considerar as seguintes estruturas:

1. ($\mathcal{P}$,G), ($\mathcal{P}$,$\approx$), ($\mathcal{P}$,A) ;
2. ($\mathbf{N}$, $+$),($\mathbf{N}$, $\cdot$)

- estruturas mais complexas
  - ($\mathcal{P}$,A,$\approx$)
  - ($\mathbf{N}, +, \cdot$)

Observação 2 *Conjunto finito e conjunto limitado.*

Os dois conceitos, conjunto finito *e* conjunto limitado *são diferentes.*

O conjunto dos pontos do plano limitado pelos lados de um triângulo, é um conjunto limitado *e isto significa que este conjunto pode ser colocado dentro de um círculo. Em outras palavras, o padrão para* limitação *são os círculos.*

Tudo que puder ser colocado dentro de um círculo é limitado.

Conjunto finito é aquele que cujos elementos podem ser contados. Neste caso a frase "o número de elementos do conjunto $\mathcal{A}$ é n" tem um sentido artimético, e $n \in \mathbf{N}$.

O conjunto $\mathbf{N}$ pode ser representado sobre uma reta, neste caso ele aparece como um conjunto de pontos que se "espalham" ao longo da reta a iguais intervalos.

O conjunto $\mathbf{N}$ é um conjunto infinito: nós não podemos colocar o conjunto $\mathbf{N}$, representado na reta numérica, dentro de um círculo. Assim, $\mathbf{N}$ é um conjunto ilimitado, também.

A frase

"o número de elementos do conjunto $\mathbf{N}$ é ∞"

não tem um sentido aritmético. O símbolo ∞ não é aritmético nem é um número, embora se possam fazer algumas extensões dos métodos da aritmética incluindo o seu uso.

Nós não podemos contar os pontos que se encontram dentro de um triângulo, então o conjunto dos pontos limitados pelos lados de um triângulo é infinito. é um conjunto infinito e limitado.

Exercício 1 *No último parágrafo a palavra "*limitado*" foi usada duas vezes com sentidos diferentes. Você conseguiria distinguir estes dois sentidos?*

O simples exemplo de um triângulo já nos permitiu divagar por trê s teorias matemáticas, isto mostra a riqueza do conceito "conjunto" que permite associar, (ou dissociar), formas diferentes de analise dum objeto como um simples triângulo.

O método que utilizamos está ligado ao conceito de *elemento* de um conjunto. Quando olhamos um triângulo como um *conjunto finito*, estamos nele identificando tres elementos apenas, os tres vértices. Quando pensamos na área, na medida, de um triângulo, estamos pensando no conjunto infinito formado por todos os pontos do plano limitado pelos tres lados.

Observe, entretanto, que área nada tem o que ver com a quantidade de pontos do triângulo. A área do triângulo é *finita*, é um número, e um triângulo é um *conjunto infinito de pontos.*

Quando pudermos identificar propriedades associadas aos elementos do conjunto, diremos que temos uma estrutura. Há quem identifique *conjunto* como uma estrutura, seria uma estrutura `zero`, inicial.

Exercícios 2 *Identificação de estruturas*

1. triângulos, área, semelhança

(a) *Especifique uma estrutura usando os conceitos de* triângulo *e* área. *Liste as propriedades.*

(b) *Torne a estrutura anterior mais complexa agregando-lhe o conceito de* semelhança. *Liste as propriedades, (monte alguns exemplos afim de descobrir as propriedades que podem ser listadas).*

2. *Considere o conjunto*

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

(a) *Use o conjunto A para indexar objetos. Dê exemplos.*

(b) *Verifique que não tem sentido a expressão*

$$x, y \in A \Rightarrow x + y \in A.$$

Por que ?

(c) *questão semelhante åanterior Use o conjunto*

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

para contar *objetos. Dê exemplos.*

(d) *Verifique que agora a expressão*

$$x, y \in A \Rightarrow x + y \in A,$$

tem sentido, mas nem sempre é verdadeira. Dê exemplos.

3. *Você tem certeza de que sempre que vir um número, ele de fato é um número?*

4. *Comente a seguinte frase:* o problema detectado nos itens acima se deve a nossa pobreza de linguagem, usamos o conjunto A duas vezes, com sentidos diferentes. *Você conhece outras situações semelhantes a esta? Dê exemplos. Haveria solução para o problema que detectamos?*

5. *conjunto, método, estrutura*

(a) *Monte uma* estrutura *com os conceitos:*

$$\begin{cases} H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ \qquad\qquad\qquad + \end{cases}$$

(b) *Descreva as propriedades da estrutura $(H, +)$.*

(c) *Torne a estrutura anterior mais complexa incluindo mais algum outro método que possa ser aplicado aos elementos do conjunto básico, por exemplo $<$.*

(d) *Verifique se há alguma relação entre os dois (ou mais) métodos que você definiu, se houver faça uma* especificação *detalhada da estrutura.*

6. *Repita o exercício anterior com o conjunto* $\mathbf{N}$ *dos dos números naturais.*

7. *área Qual é a definição de área?*

8. *Faça uma frase com os conceitos "área"e "região".*

Exemplo 5 *Dados estruturados.*

1. *“trê s agregados diferentes”*
   Se olharmos para o “aglomerado” seguinte de números:

   $$1107991334$$

   eles podem nos lembrar muitas coisas. Se perguntassemos a várias pessoas o que eles significavam poderiamos obter muitas respostas.

   Mas se mostrassemos às pessoas os mesmos números assim dispostos:

   $$11/07/99 : 13 : 34,$$

   algumas pessoas, facilmente, identificariam aí uma data, um dia do ano, seguido de uma hora.

   Também poderíamos ter apresentado os algarismos assim:

   $$01107991334$$

   e, ainda com certa hesitação, alguém poderia arriscar: “não seria um número de telefone alí de São Paulo?”

   Pois é, o que mudou nos tres exemplos?

2. *um agregado com regras algébricas. O que torna diferentes*

   $$11/07/99 : 13 : 34 \ e \ \ 01107991334 \quad ?$$

   Claro, um desses agregados representa um “ponto” no tempo em que vivemos. “$11/07/99 : 13 : 34$*” obedece a uma regra algébrica “muito complicada” mas que nós dominamos. Se* 1 *representar “um minuto”, sabemos calcular:*

   $$11/07/99 : 13 : 34 + 1 = 11/07/99 : 13 : 35.$$

   Se 59 *representar “*59 *minutos, também sabemos calcular:*

   $$11/07/99 : 13 : 34 + 59 = 11/07/99 : 14 : 33,$$

   apesar da regra complicada que tem aí de passagem de uma casa para a outra. Se $2 : 3 : 10$ *representarem “dois dias, 3 horas e 10 minutos, sabemos calcular:*

   $$11/07/99 : 13 : 34 + 2 : 3 : 10 = 13/07/99 : 16 : 44.$$

   Então, concluimos*, existe uma operação de adição, munidas regras bem complicadas, mas que todos conhecemos, de modo que podemos discutir qual é estrutura aditiva do conjunto que vamos chamar de*

   $$\mathcal{T},$$

   o `tempo`*, junto com a operação de* soma de tempos*:*

   $$(\mathcal{T}, +).$$

   Não vamos entrar nestes detalhes agora, mas todos entendemos o que isto significa.

3. *um agregado sem operações algébricas. Se tentassemos somar*

$$(011)334575 + (021)223443$$

ninguém duvidaria em desatar numa gargalhada: não se soma número de telefone.

Mas se houvesse um catálogo de telefones ordenado *pelos nú meros, seria útil. Quantas vezes você tem um número anotado num papel e não sabe de quem é? Ninguém duvidaria que*

$$(021)223443 < (021)332331$$

no sentido de que (021)223443 *deveria vir antes de* (021)332331 *na listagem.*

*Embora não possamos somar números de telefones, eles tem propriedades algébricas, pouco utilizadas, é verdade. Existe uma "*ordem*" definida no conjunto dos números dos telefones.*

Exercícios 3 *Criando estruturas.*

1. *Defina a estrutura "calendário", estabeleça qual é o seu conjunto básico (ou conjuntos) seus métodos, etc...*
2. *Defina a estrutura "catálogo telefônico", conjunto básico, métodos, etc...*
3. *Defina a estrutura "livro", faça uma especificação o mais completa possível.*
4. *Defina a estrutura "figuras planas", conjunto básico, métodos etc...*
5. *Torne a estrutura "figuras planas" mais complexa adicionando um método para para comparÃ¡-las e decidir quando as figuras são semelhantes.*
6. *Torne a estrutura "figuras planas" ainda mais complexa, adicione um método que associe a cada figura um número chamado área. Especifique detalhadamente a estrutura, conjuntos, métodos, propriedades.*
7. *difícil... Acima falamos de* uma ordem *no catálogo telefônico, o que subentende que* existam várias ordens. *Tente encontrar três exemplos de* estrutura de ordem, *diferente da habitual: a ordem nos conjuntos numéricos. Vamos estudar "ordem" no capítulo 3, (de um salto ao capítulo 3).*

Os exemplos dados acima mostram que as informações são "agregados" de algarismos e letras dispostos segundo certas regras específicas de uma determinada "estrutura".

Algarismos e letras são apenas dois tipos diferentes de "caracteres" que formam o nosso "alfabeto escrito". Existiria outro tipo de "alfabeto" que não seja o escrito?

Não definimos *estrutura*, mas usamos a palavra em diversos contextos de formas a passar-lhe o seu sentido intuitivo. Observe o livro de Leopoldo Nachbin, [5] se quiser se iniciar agora nas estruturas algébricas, ou [3] que é um pouco mais avancado que o anterior.

Os exercícios destes capítulo tratam das propriedades dos conjuntos, dos seus elementos, dos sub-conjuntos de um conjunto universo dado.

1.3 Conjunto, elemento e subconjunto.

Neste momento nos encontramos ante dois *tipos de objetos*: conjuntos, elementos. Entre os dois existe uma *diferença hierárquica*.

$$x \in x \ \text{ é sempre falso} \quad x \subset x \text{ é sempre verdadeiro} \tag{1.10}$$

Na segunda equação estamos dizendo que x *é um conjunto*, na primeira equação estamos dizendo que x é simultaneamente conjunto e elemento, isto é impossível. Não iremos insistir numa discussão direta sobre a diferença entre `elemento` e `conjunto`. Esta diferença será salientada construtivamente.

Exercícios 4 *Inclusão e pertinência*

1. *Considere* $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. *Liste os elementos dos conjuntos abaixo:*

a) $A = \{x \ ; \ x \in \mathbf{N} \ ; \ x < 10\}$ *b)* $B = \{x \ ; \ x \in \mathbf{N} \ ; \ 5 < x < 15\}$
c) $C = \{x \ ; \ x \in \mathbf{N} \ ; \ x < 0\}$ *d)* $D = \{x \ ; \ \frac{x}{2} \in \mathbf{N} \ ; \ x < 10\}$
e) $E = \{x \ ; \ \frac{x}{3} \in \mathbf{N} \ ; \ x < 10\}$ *f)* $F = \{x \in \mathbf{N} \ ; x \text{ é primo}; \ x < 30\}$

2. *Qual das sentenças seguintes é verdadeira:*

   a) $3 \in A$ *b)* $0 \in A$ *c)* $-3 \in A$ *d)* $A \subset B$
   e) $B \subset A$ *f)* $C \subset A$ *g)* $D \subset A$ *h)* $E \subset A$
   i) $D \subset B$ *j)* $E \in A$ *k)* $E \subset A$ *l)* $E \subset D$

3. *Use diagramas de Venn para representar as relações que for possível entre os conjuntos* A, B, C, D, E.

4. *Escreva todos os subconjuntos do conjunto*

$$A = \{0, 1, 2, 3\}.$$

   O conjunto assim obtido se chama $\mathbf{P}(A)$, *o* conjunto[2] das partes *de* A.

   (a) *Classifique os* elementos *de* $\mathbf{P}(A)$, *segundo a sua quantidade de elementos.*
   (b) *Faça um diagrama de Hasse com os* elementos *de* $\mathbf{P}(A)$.
   (c) *Faça uma tabela indicando a frequência dos elementos de* $\mathbf{P}(A)$ *pelo número dos seus elementos. Por exemplo quantos sub-conjuntos tem* A *com 2 elementos.*

5. *estrutura de* $\mathbf{P}(A)$.. *Considere agora* $A = \{0, 1, 2\}$.

   (a) *Classifique os* elementos *de* $\mathbf{P}(A)$, *segundo a sua quantidade de elementos.*
   (b) *Faça um diagrama de Hasse com os* elementos *de* $\mathbf{P}(A)$.
   (c) *Faça uma tabela indicando a frequência dos elementos de* $\mathbf{P}(A)$ *pelo número dos seus elementos. Por exemplo quantos sub-conjuntos tem* A *com 2 elementos.*

6. *Repita a questão anterior com* $A = \{0, 1\}$.
7. *Repita a questão anterior com* $A = \{0\}$.
8. *Repita a questão anterior com* $A = \{\}$.

[2] O conjunto dos subconjuntos de A.

9. *Colecte as tabelas de freqüência feitas nas questões acima. O resultado deve ser o* triângulo de Pascal. *Vamos chamar de linha de ordem n do triângulo de Pascal àquela que corresponder a um conjunto com n elementos. Quer dizer que a primeira linha, contendo apenas* 1 *é a linha de ordem* 0. *Verifique que que os nú meros em cada linha são os números combinatórios:*

$$C_n^p = \binom{n}{p}.$$

Você poderá ler C_n^p como a quantidade de subconjuntos com p elementos que podemos encontrar num universo com n elementos.

10. *Escreva o triângulo de Pascal até a linha de ordem 10 e compare com os conjuntos:*
    - $A = \{\}$.
    - $A = \{0\}$.
    - $A = \{0, 1\}$.
    - $A = \{0, 1, 2\}$.
    - ...
    - $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

11. *Seja* $A = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{3\}, 4\}$. *Determine quais das afirmações abaixo é verdadeira, justificando seu entendimento.*

a) $\{1, 2\} \in A$.	*b)* $\{1, 2\} \subset A$.	*c)* $\{1, 2, 3\} \in A$.	*d)* $\{1, 2, 3\} \subset A$.
e) $\{3\} \in A$.	*f)* $\{3\} \subset A$.	*g)* $3 \in A$.	*h)* $A \subset A$

12. *Considere* $U = \{1, 2, 3\}$. *Se A, B forem sub-conjuntos arbitrários de U, encontre o número de relações do tipo $A \subset B$ que é possível escreverem-se.*

As 15 primeiras linhas do Triângulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Observação 3 *Cardinalidade.*

Nesta seção trabalhamos com os conceitos,

1. *Conjuntos;*

2. *métodos e estruturas;*
3. *pertinência;*
4. *inclusão;*
5. *número de elementos de um conjunto.*

Mais a frente, o capítulo 2, será dedicado exclusivamente ao último assunto.

Se um conjunto for finito, tem sentido falar do número de seus elementos. *Se um conjunto não for finito, exatamente, isto quer dizer que ele não tem mais um determinado* número de elementos*, mesmo porque não há "número infinito".*

Uma extensão deste conceito é a cardinalidade. Quando não pudermos falar do "número de elementos de A", então falaremos do "cardinal de A." Voltaremos no final do capítulo 2 a este assunto.

1.4 Operações com conjuntos

União, interseção e diferença

Nesta seção discutiremos tres operações (métodos) entre conjuntos: união, interseção e diferença. Faremos um paralelo entre estas operações e as operações da lógica formal.

1.4.1 União e interseção de conjuntos.

Definição 2 *União,* $A \bigcup B$.

Dados dois conjuntos A, B *dizemos que*

$$AUB = \{x \ ; \ x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Diagramas de Venn facilitam a compreensão das operações mas também podem induzí-lo em erros lógicos.

A figura (fig. 1.3), página 21 ilustra a união de conjuntos. Usamos a união quando quisermos reunir, num só conjunto, os elementos de dois ou mais conjuntos.

Definição 3 *Interseção,* $A \bigcap B$.

Dados dois conjuntos A, B *dizemos que*

$$A \cap B = \{x \ ; \ x \in A \ e \ x \in B\}$$

isto é, para que $x \in A \cap B$, x *tem que ser simultâneamente elemento de cada um dos conjuntos.*

A figura (fig. 1.4), página 22 ilustra a interseção de dois conjuntos. Usamos a interseção quando quisermos os elementos que forem comuns a dois outros conjuntos. Na figura (fig. 1.5) página 22 você pode ver duas retas paralelas, que são dois conjuntos "sem nenhum ponto de interseção". Neste caso o *conjunto vazio* resolve o problema criando uma solução:

$$r \bigcap t = \emptyset.$$

Exercícios 5 1. *Calcule* $A \cap B$ *e* $A \cup B$ *se*

Figura 1.3: A união de três conjuntos.

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

2. *Se V representar o conjunto de todas as vogais, e C o de todas as consoantes, calcule $V \cap C, V \cup C$.*

3. *Represente com diagramas de Venn, (*identifique *as expressões que estiverem* **`indefinidas`***):*

a) $A \cup B$;	*b)* $B \cup A$;	*c)* $A \cap B$;	*d)* $A \cup B \cup C$;
e) $A \cap B \cap C$;	*f)* $(A \cup B) \cap C$;	*g)* $A \cup B \cap C$;	*h)* $(A \cap B) \cup C$;
i) $A \cap B \cup C$;	*j)* $A \cup (B \cap C)$;		

4. *Verifique quais das sentenças abaixo são verdadeiras:*

   (a) $A \cup B = B \cup A$;

   (b) $B \cap A = A \cap B$;

   (c) $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

   (d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

   (e) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

   (f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

   (g) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

   (h) $A \cup B \cap C = A \cup (B \cap C)$;

5. *Qual das afirmações abaixo é a falsa:*

- $A \cap B \subset A$;
- $A \cup B \subset A$;

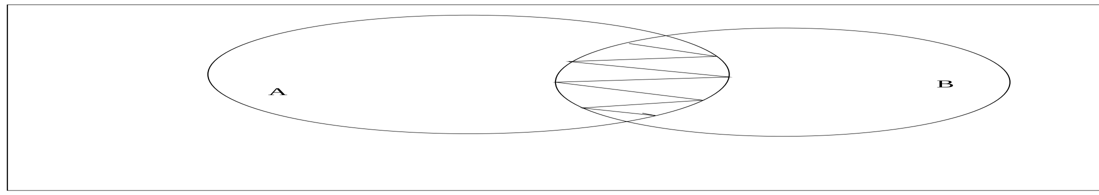

Figura 1.4: A interseção de dois conjuntos

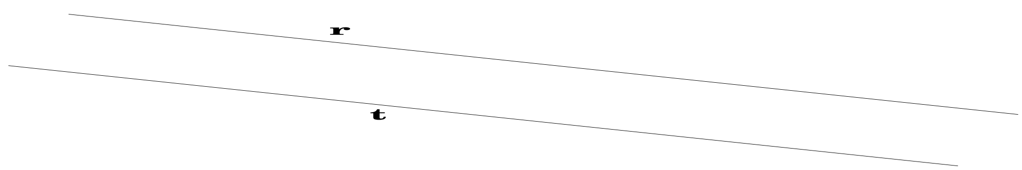

Figura 1.5: A interseção de duas retas

- $A \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;

A única afirmação falsa pode ser verdadeira em caso particular dos conjuntos A, B. Explicite tal caso.

Observação 4 *Indefinição de expressões.*
Técnicamente falando, as expressões:

- $A \cup B \cup C$;
- $A \cap B \cap C$;
- $A \cup B \cap C$;
- $A \cap B \cup C$;

estão indefinidas, porque não fica claro que operação deve ser efetuada primeiro.
Aqui que se vê a importância da `propriedade associativa` *que algumas vezes vale, outras vezes não vale.*

Por exemplo, se $a, b, c \in \mathbf{N}$*,* $a, b, c \neq 0$*, então*

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c),$$

porque

$$(a \div b) \div c = \frac{a}{bc}$$

enquanto que

$$a \div (b \div c) = a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b};$$

Concluimos que a "divisão não é associativa."

Como união é associativa, então $A \cup B \cup C$ *está bem definida. Da mesma forma como a* interseção *é associativa, então* $A \cap B \cap C$ *está bem definida.*

Como a interseção *é distributiva relativamente à* união *então*

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

o que deixa a expressão "$A \cup B \cap C$*" indefinida. Veja que nós sabemos realizar, apenas, duas operações de cada vez, então temos que interpretar uma expressão como* $A \cup B \cap C$ *como uma das duas formas escritas acima com parentesis.*

Fazendo um diagrama de Venn você vai se dar contas rapidamente de que as duas expressões

$$A \cup (B \cap C) \ ; \ (A \cup B) \cap C$$

são diferentes. Ao mesmo tempo este diagrama de Venn é uma demonstração *desta desigualdade porque apresenta um exemplo em que não vale a igualdade.*

Enfim,

- *quando a propriedade associativa valer, a repetição de uma operação fica bem definida sem necessidade de patentesis. Quando ela não valer, somos forçados a indicar com parêntesis o que queremos dizer;*
- *quando a propriedade distributiva valer entre duas operações somos forçados a indicar qual a expressão desejada com o uso de parentesis:*

$$a * b + a * c = a * (b + c) \neq (a * b) + c$$

Nas linguagens de programação este problema de interpretação de texto *é contornado criando-se uma prioridade entre as operações.*

O produto tem prioridade sobre à adição e subtração, com isto significando que "$a + b * c$*" vai ser entendido pela máquina como* $a + (b * c)$*.*

Prioridade entre as operações

- *primeiro se executam as potenciações e radiciações,*
- *depois as multiplicações e divisões,*
- *finalmente as adições e as subtrações.*

Velha regra operatória, que se ensinava antigamente, e da qual os computadores ainda se lembram...

Experimente com uma máquina de cálcular:

- $3^2 * 7 = 7 * 3^2 = 63$
- $3 * 2 + 7 = 7 + 3 * 2 = 42$
- $6 \div 2 + 3 = 3 + 6 \div 2 = 6$

1.4.2 Complementar e diferença entre conjuntos.

O complementar de um conjunto A são os elementos que não pertencem ao conjunto A relativamente a um outro conjunto chamado *universo*.

Observe a figura (fig. 1.6) na página 25. Nela estão representados tres conjuntos A, B, U. Os conjuntos A, B são subconjuntos de U que se chama, por esta razão, *conjunto universo*.Na figura se encontra hachuriado o complementar de B *relativamente* ao universo.

O complementar é designado com o símbolo B^c ou alumas vezes com $C_U B$. Nesta última notação se quer deixar claro que o complementar é um conceito relativo. Mudando o conjunto universo, muda o complementar.

Se define a diferenç a entre dois conjuntos assim:

Definição 4 *Diferença entre conjuntos.*

Dados dois conjuntos A, B

$$A - B = \{x \ ; \ x \in A \ e \ x \notin B\}$$

Se produz um novo conjunto **a partir** do conjunto A, formado de todos os elementos de A que não pertençam a interseção $A \cap B$:

$$A - B = A - (A \cap B).$$

Na figura (fig. 1.6) página 25, você pode ver a diferença entre os conjuntos A,B nesta ordem. Observe que

$$A - (A \cap B) = A - B \tag{1.11}$$

$$B - A = B - (A \cap B) \tag{1.12}$$

$$A - B \neq B - A \tag{1.13}$$

estas equações contém as idéias da demonstração do seguinte teorema:

Teorema **1** *Diferença não é comutativa*

$$A - B \neq B - A$$

Da definição podemos concluir uma propriedade da diferença de conjuntos:

Teorema **2** *Diferença e complementar*

$$A - B = A \bigcap B^c$$

Exercícios 6 *1. Calcule $A - B$ para os conjuntos abaixo:*

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{7, 8, 9, 10\}$

(d) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(e) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(f) $A = \{7, 8, 9, 10\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

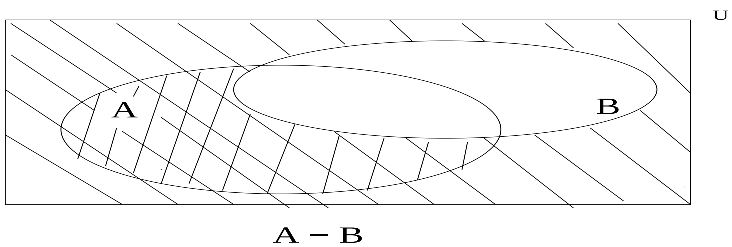

Figura 1.6: A diferença entre os conjuntos A e B

2. *Faça os diagramas de Venn correspondentes a cada um dos itens na questão anteior.*
3. *Deduza do exercício 1 se $A - B = B - A$ é verdadeira ou falsa.*
4. *Prove que $A - B = A - (A \cap B)$.*
5. *Prove que se $A \cap B = A \cap C$ então $A - B = A - C$.*

Observação 5 *Provar, verificar, . . . se convencer.*

Um trauma comum entre as pessoas que estudam Matemática se encontra associado ao conceito de provar. *A palavra* verificar *é aceita com menor carga de preconceitos do que* provar.

É preciso perder e combater este preconceito. Há muitas coisas difíceis em Matemática, como as há em Biologia, Quí mica, Física ou História. O conhecimento é formado de fatos óbvios para uns, (um mesmo teorema pode ser uma trivialidade para alguém) e uma barreira teórica para outros.

Mas, difícil, *é apenas aquilo que vai tomar mais tempo para ser compreendido,* não é impossível, *é apenas* difícil.

Não há outro meio de fazer Matemática, sem fazer demonstrações, *esta é a essência de nossa disciplina. Mas há passos para conduzir-nos a compreensão de um teorema e consequentemente à sua demonstração,*

- *um gráfico,*
- *algumas construções geométricas,*
- *alguns modelos concretos com papel, ou sucata,*
- *um programa de computador.*

Todos são meios justos para ampliar nossa intuição e criar uma generalização que conduza à construção de uma demonstração. Esta tem que ser o objetivo final.

Sem traumas.

1.5 Estrutura algébrica nos conjuntos

Vimos que as operações de união e interseção tem propriedades semelhantes às que os números tem no conjunto $\mathbf{N}$. Por exemplo, a *união* e a *interseção* são comutativas. A *diferença* entre conjuntos não é comutativa, da mesma forma como a diferença entre os números que também não é comutativa.

Podemos nos perguntar *que estrutura podemos descobrir no conjunto* $\mathbf{P}(X)$, o conjunto das partes de X e as operações definidas em $\mathbf{P}(X)$.

Uma pergunta mais direta: *quais são as propriedades de* $(\mathbf{P}(X), \cup)$ em que $\mathbf{P}(X)$ é o conjunto das partes de X e $\cup$ é a operação de união entre os subconjuntos de X.

Vimos que

- A união é associativa;
- A união é comutativa;
- Tem um conjunto que unido com qualquer outro conjunto reproduz o outro:

  $$\emptyset \cup A = A \ ; A \subset X$$

  quer dizer que o "conjunto vazio *está para* a união como o zero *está para* a adição".

Observe que estamos dizendo que

$$(\mathbf{N}, +)$$

é parecido com

$$(\mathbf{P}(X), \cup)$$

porque têm as mesmas propriedades. E esta semelhança que chamamos de *estrutura*. Quer dizer que $(\mathbf{N}, +)$ e $(\mathbf{P}(X), \cup)$ têm a mesma estrutura.

Exercícios 7 *Estrutura nos conjuntos*

1. *<u>União e Interseção</u> Prove que $(\mathbf{P}(X), \cap)$ tem as mesmas propriedades que $(\mathbf{P}(X), \cup)$. Qual é o elemento neutro em $(\mathbf{P}(X), \cap)$?*
2. *<u>Diferença de conjuntos</u> Verifique quais são as propriedades que valem para $(\mathbf{P}(X), -)$ em que "$-$" é a diferença entre conjuntos.*
3. *<u>Diferença simétrica</u>*

   Definição 5 *Diferença simétrica*
   Definimos $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

   Prove que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
4. *Verifique quais são as propriedades de*
   - $\mathcal{E}_1 = (\mathbf{P}(X), \triangle) \ \ ; \ \ \mathcal{E}_2 = (\mathbf{N}, -)$
   - $\mathcal{E}_3 = (\mathbf{P}(X), \cup) \ \ ; \ \ \mathcal{E}_4 = (\mathbf{N}, +)$
   - $\mathcal{E}_5 = (\mathbf{P}(X), \cap) \ \ ; \ \ \mathcal{E}_6 = (\mathbf{N}, \cdot)$

- $\mathcal{E}_7 = (\mathbf{N}, +, \cdot)$; $\mathcal{E}_8 = (\mathbf{P}(X), \triangle, \cap)$
- $\mathcal{E}_9 = (\mathbf{P}(X), \triangle, \cup)$; $\mathcal{E}_{10} = (\mathbf{P}(X), \cup, \cap)$

5. *Quais das estruturas estudadas acima são semelhantes? (faça listagens daquelas que forem semelhantes entre si).*

6. *Uma pessoa pode receber sangue de um doador se tiver todos os antígenos do doador. Traduza esta frase usando conjuntos e subconjuntos. Faça uma tabela de dupla entrada que mostre quais são as possiblidades de que X possa receber sangue de Y.*

7. *Se A, B forem conjuntos com um número finito de elementos, então*

$$card(A) + card(B) = card(A \cup B) - card(A \cap B)$$

Se A for o conjunto dos números pares positivos menores que 200 e B for o conjunto dos múltiplos de 3 menores que 250, calcule a quantidade elmentos da interseção destes dois conjuntos.

8. *Uma pesquisa de opnião, encomendada por um programa de televisão, tabulou da seguinte forma os resultados de sua pesquisa:*

nível	*homens*	*mulheres*	*rapazes*	*moças*	*meninos*	*meninas*
péssimo	1	2	25	23	14	16
suportável	2	3	30	30	16	15
bom	27	30	3	3	16	17
excelente	30	25	2	2	14	12

Total de entrevistados: 360.

(a) *Transforme esta tabela em percentuais relativos ao total de 360 entrevistados.*

(b) *Decida quais das afirmações seguintes é verdadeira e apresente uma justificativa:*

- *O programa agradou aos homens.*
- *O programa agradou às mulheres.*
- *O programa agradou aos rapazes e às moças.*
- *O programa agradou aos adolescentes.*
- *O programa agradou às crianças.*

9. *Considere a tabulação do exercício 8 27. Verifique que todos os entrevistados podem ser classificados em termos de uma das categorias:*

A `adulto`, M `masculino`, G `gostou`

você, possivelmente, precisa definir o que é adulto...

- *Quantos pertencem à classe* $\tilde{A} = A^c$
- *Quantos pertencem à classe* $A \cup M$
- *Quantos pertencem à classe* $A \cup G$
- *Quantos pertencem à classe* $A \cup \tilde{G}$
- *Quantos pertencem à classe* $\tilde{A} \cap \tilde{G}$

10. *Uma pesquisa da* divisão municipal de assistência social *verificou que sobre 250 famílias entrevistadas, se contavam 150 que tinham carro, 100 que possuiam geladeira, 59 que tinham telefone, 31 que tinham carro e geladeira, 22 que tinham carro e telefone, 7 que possuiam geladeira e telefone e 4 possuiam carro, geladeira e telefone.*

    - *Quantas famílias possuem apenas um dos itens considerados ?*
    - *Quantas famílias não possuem nenhum dos itens considerados ?*

1.6 O produto cartesiano

Por definição temos:

Definição 6 *Produto cartesiano* A x B.

$$A \text{ x } B = \{(x, y)\ ;\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

diremos que A x B é o conjunto dos pares ordenados formados dos elementos de A e de B, nesta ordem. Quer dizer que

Teorema 3 A x $B \neq B$ x A.

Observação 6 *Um novo tipo de conjunto* A x B. *Há uma "semelhança" aparente com a interseção. A* semelhança *se encontra na simultaneidade da conjunção "e", entretanto as duas sentenças se referem a "variáveis" distintas. Na verdade é uma operação muito especial porque produz um tipo de conjunto totalmente diferente dos conjuntos iniciais*[3] A, B.

Quando estudarmos os conjuntos numéricos veremos que este método, da construção de pares ordenados, é o nó da questão para produzir o conjunto **Q** *a partir dos inteiros. Um número racional vai ser um novo objeto construído a partir dos números inteiros já existentes, vai ser um par ordenado. Observe que*

$$(a, b) = \frac{a}{b} \neq \frac{b}{a} = (b, a).$$

Este exemplo, com o os números racionais, demonstra o teorema 3.

Exemplo 6 *Uma tabela de dupla entrada é um produto cartesiano. Abaixo você tem um exemplo típico de produto cartesiano tirado do "dia a dia", uma tabela de dupla entrada. Por exemplo a "matriz"de uma planilha eletrônica. A única diferença está em que colocamos em cada célula a expressão* (x, y) *correspondente:*

y \ x	1	2	3	4	5	6
a	(1,a)	(2,a)	(3,a)	(4,a)	(5,a)	(6,a)
b	(1,b)	(2,b)	(3,b)	(4,b)	(5,b)	(6,b)
c	(1,c)	(2,c)	(3,c)	(4,c)	(5,c)	(6,c)
d	(1,d)	(2,d)	(3,d)	(4,d)	(5,d)	(6,d)
e	(1,e)	(2,e)	(3,e)	(4,e)	(5,e)	(6,e)
f	(1,f)	(2,f)	(3,f)	(4,f)	(5,f)	(6,f)

[3] apesar disto, veremos, depois, que é possível identificar tanto A como B dentro de A x B ...

Quando você usa uma planilha eletrônica, vai colocando os valores que interessa "contabilizar"nas células da planilha. Aqui escrevemos em cada célula o seu "endereço". $(1, a)$ é o "endereç o"da primeira célula da planilha. Todas as células na primeira linha tem a coordenada $y = a$. Todas as células na primeira coluna tem a coordenada $x = 1$.

Os programas de planilha eletrônica usam uma notação que parece ser diferente do que expusemos acima. Por exemplo designam as céluas por $A1, A2$ enquanto que nós estamos usando a notação $(1, a), (2, a)$. A diferença é aparente. Você também pode ver aqui um exemplo de indexação.

Exercícios 8 *Produto cartesiano de conjuntos*

1. *Faça os produtos cartesianos, dois a dois, dos conjuntos abaixo:*

$$A = \{1, 2, 3\} \ ; \ B = \{a, e, i, o, u\} \ ; \ C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. *Verifique, com os exemplos construidos no exercício anterior, que você pode identificar os elementos de A dentro do produto A x B, na verdade você pode identificar cinco "cópias"de A dentro de A x B. Quantas cópias de B você conseguiria identificar em A x B ?*

3. *<u>Generalize o exercício anterior</u> Mostre que no conjunto E x F podemos identificar uma cópia do conjunto E. Se o conjunto F tiver 10 elementos, quantas cópias de E poderiamos identificar ?*

4. *Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans. Durante quantos dias seguidos ela pode sair com roupa diferente ? Mostre a esta garota um algoritmo para que ela, facilmente, monte o seu* plano estratégico *de uso das roupas.*

5. *Prove que*

a) $(A \cup B)$ x $C = A \cup C$ x $B \cup C$	*b)* $(A \cap B)$ x $C = A \cap C$ x $B \cap C$
c) $(A - B)$ x $C = A - C$ x $B - C$	*d)* $(A$ x $B)$ x $C = A$ x $(B$ x $C)$
e) A x $\emptyset = \emptyset$	*f)* $A \subset B \Rightarrow A$ x $C \subset B$ x C
g) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$	*h)* $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
i) $A \triangle B = B \triangle A$	*j)* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
k) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$	*l)* $A \triangle \emptyset = \emptyset \ ; \ A \triangle A = \emptyset$

6. *Defina $A^o = A$ x $\{0\}$. Mostre que $A^0 \subset A$ x $\{0, 1, 2, 3\}$.*