Convolução de funções características em $\mathbf{R}^2$

Praciano-Pereira, T

Sobral Matemática
25 de agosto de 2011
tarcisio@member.ams.org¿
préprints da Sobral Matemática
no. 2011.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira,
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Esta é uma pequena nota mostrando as equações da convolução de duas funções caracteríscas de retângulos do $\mathbf{R}^2$ e apresentando um link para dois programas em `gnuplot` que contém as equações definidas na linguagem de `gnuplot` que lhe fazem os gráficos.

palavras chave: *funções características de retângulos, convolução de funções características, gráfico de convolução de funções.*

This a short note to show the equations and the graphics, with `gnuplot` of the convolution of two characteristic functions of rectangles of $\mathbf{R}^2$. The scripts of `gnuplot` are pointed to by a link, they have these equations and produce the graphics.

key words: *characteristic functions of rectangles, convolution of characteristica functions, graphics of convolution.*

1 Introdução

Este artigo é uma rápida nota apenas para registrar as equações de função característica de retângulo no plano e da convolução da mesma que são necessárias por um outro artigo.

Embora este artigo seja apenas um meio conveniente para fazer referência aos programas, estou convencido de que pode ter uma utilidade própria para aqueles que desejarem ver como definir convoluções de funções características em uma linguagem de programação, aqui podem encontrar um exemplo funcionando que pode ser facilmente adaptado para um objetivo específico.Inclusive a sintaxe do `gnuplot` usada aqui é semelhante a de diversas outras linguagens de programação o que facilita uma rápida adaptação para programas mais complexos. Verifique que os programas estão funcionando e os reutilize onde precisar.

Na segunda e terceiras seções apresento as equações e os programas, na bibliografia se encontra um link para a página de onde os programas podem ser baixados e o nome dos programas.

2 Função característica de um retângulo do plano

Se um retângulo do plano (ou do $\mathbf{R}^n; n > 1$), tiver os lados paralelos aos eixos coordenados, é possível definir a função característica como um produto de funções características tornando a convolução muito fácil de ser calculada formalmente.

Como se trata de um instrumento de que precisamos com frequência, estou disponibilizando estas equações até porque eu gostaria de tê-las encontrado já prontas quando necessitei para outro trabalho. Não vou caracterizar nenhum dos resultados como "teoremas" porque não há nada de surpreendente aqui, apenas cálculos que podem economizar tempo de alguém, ou mesmo erros! A letra grega χ é usada para indicar que estou usando a função característica de algum conjunto.

Se um retângulo tiver os lados paralelos aos eixos coordenados, como o produto cartesiano $[-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$ então a função característica deste retângulo é simplesmente o produto cartesiano de duas funções características:

$$\frac{1}{(2\epsilon)^2}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]}(x, y) = \frac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x)\frac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(y) \tag{1}$$

Isto é particularmente útil para calcular convoluções como pode ser visto na próxima seção.

3 Convolução de funções características

A convolução é uma operação de importância indiscutível e ao mesmo tempo muito complicada de ser executada formalmente. Por sorte é possivel obter bons resultados usando convoluções com tipos particulares de funções como podem ser visto em [3] em que estou usando a potência de convolução para obter n-splines, altamente regulares, e a suporte compacto, para mostrar um pequeno exemplo. O primeiro passo é a convolução com funções características de "retângulos".

$$\chi_{[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]} * \chi_{[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]}(x,y) = \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]}(s,t)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]}(x-s,y-t)dsdt = \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(s)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x-s)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(y-t)dsdt = \tag{4}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(s)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x-s)ds\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(y-t)dt\right) = \tag{5}$$

$$= \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(s)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x-s)ds\right)\left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(y-t)dt\right) = \tag{6}$$

$$= \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x-s)ds\right)\left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(y-t)dt\right) = \tag{7}$$

$$= \left(-\int_{x+\epsilon}^{x-\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(s)ds\right)\left(-\int_{x+\epsilon}^{x-\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)dt\right) = \tag{8}$$

$$= \left(\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(s)ds\right)\left(\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}y(t)dt\right) \tag{9}$$

As integrais na equação (9) são idênticas definindo expressões em x ou em y que podem ser facilmente calculadas analisando a possibilidade de que o limite superior de integração esteja antes do suporte ou dentro do suporte, e depois a mesma análise para o limite inferior de integração estando dentro do suporte ou posterior ao suporte, exatamente nesta ordem, o que produz as possibilidades:

$$\left\{\begin{array}{cc} x+\epsilon < -\epsilon & x < -2\epsilon \\ x+\epsilon \in [-\epsilon,\epsilon] & -2\epsilon \leq x \leq 0 \\ x-\epsilon \in [-\epsilon,\epsilon] & 0 \leq x \leq 2\epsilon \\ x-\epsilon > \epsilon & x > 2\epsilon \end{array}\right. \tag{10}$$

dando as seguintes possibilidades de valores para a integral, em x:

$$\left\{\begin{array}{lr} x < -2\epsilon & 0 \\ -2\epsilon \leq x \leq 0 & x+2\epsilon \\ 0 \leq x \leq 2\epsilon & 2\epsilon - x \\ x > 2\epsilon & 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

e trocando x por y se tem o valor da outra integral. Para cada uma destas possibilidades temos todas as quatro outras, em relação a outra variável, mas algumas ficam naturalmente excluídas, por exemplo, quando $x < -2\epsilon$ para qualquer das hipóteses sobre y o resultado será zero. As possibilidades finalmente serão:

$$\begin{cases} x < -2\epsilon & 0 \\ x \leq 0; y < -2\epsilon & 0 \\ x \leq 0; -2\epsilon \leq y < 0 & (x+2\epsilon)(y+2\epsilon) \\ x \leq 0; 0 \leq y < 2\epsilon & (x+2\epsilon)(2\epsilon - y) \\ 0 < x \leq 2\epsilon; y < -2\epsilon & 0 \\ 0 < x \leq 2\epsilon; -2\epsilon \leq y < 0 & (2\epsilon - x)(y+2\epsilon) \\ 0 < x \leq 2\epsilon; y \leq 2\epsilon & (2\epsilon - x)(2\epsilon - y) \\ x > 2\epsilon & 0 \end{cases} \tag{12}$$

Este sistema de equações pode ser traduzido assim na linguagem de `gnuplot`

```
ep = 1; ##  epsilon na variável ep
set xrange [-5:5];
set yrange [-5:5];
Q(x,y)= (x<=-2*ep)?0:\
(x<=0)*(y<-2*ep)?0:\
(x<=0)*(y<0)?(y+2*ep)*(x+2*ep):\
  (x<=0)*(y<2*ep)?(2*ep-y)*(x+2*ep):\
(x<=2*ep)*(y<-2*ep)?0:\
(x<=2*ep)*(y<0)?(y+2*ep)*(2*ep-x):\
(x<=2*ep)*(y<2*ep)?(2*ep-y)*(2*ep-x):0
splot Q(x,y)
```

e os programas relacionados com este artigo são [1, definição da função característica] e [2, convolução de funções características] e podem ser baixados da página indicada na bibliografia. Os programas são licenciados sob GPL, podem ser modificados de acordo com qualquer versão da GPL.

Referências

[1] Praciano-Pereira, T.
sinal_kernel01_01.gnuplot

http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas

[2] Praciano-Pereira, T.
sinal_kernel01_02.gnuplot

http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas

[3] Praciano-Pereira,T.
An interpolation projector associated to a non uniform partition
Préprints da Sobral Matemática - 2008.08
http://www.sobralmatematica.org/preprints