Somas polinomiais notáveis
*

Praciano-Pereira, T

18 de abril de 2025
preprints da Sobral Matemática
no. 2025.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Há várias somas que são interessantes por elas mesmas e até como exercícios de *indução finita*. Aqui em vez de usar *indução finita* eu estou fazendo uma aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra e também apresentando um pequeno programa escrito em `calc`, com uma tradução para `python3`, que permite calcular somas de expressões polinômiais.

palavras chave: Teorema Fundamental da Álgebra, somas notáveis,somas sucessões polinomiais.

There are a lot of interesting sums, generally presented as examples of finite induction. Here I am taking some of them to make use of the Fundamental Theorem of Algebra as another run a way method. Some computer simulations are presented.

keywords: computer simulations, sum of polynomial successions, Fundamental Theorem of Algebra,

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O plano do trabalho

O teorema de Nicômaco me fez pensar numa forma de demontração que não fosse *indução finita* e lembrei-me do Teorema Fundamental da Álgebra que determina de forma única um polinômio de grau p por um sistema de equações lineares com $p+1$ equações e montei uma demonstração do teorema de Nicômaco usando este método.

Resulta que este método tem uma importância muito maior, ele se encontra à base do calculo das primitivas das funções polinomiais então eu expandi a ideia para mostrar como *uma classe de somas de Riemann* tem um limite notável, a das *somas de Riemann* que convergem para as integrais dos monômios. Vou trabalhar com *somas de Riemann uniformes* e mais adiante explico a razão e elas são potências de somas dos termos de *progressões aritméticas* então aproveitei para escrever primeiro estas e depois aplicar no caso das *somas de Riemann uniformes.* Ao finalizar eu mostro que a integral de um polinômio qualquer é a soma das integrais dos monômios o que finaliza o cálculo das integrais das funções polinomiais.

Eu não inventei este método, eu aprendi quando estudei Cálculo no livro do Courant, [Cou61, Capítulo 2, página 84], mas aqui eu estou detalhando mais o método do que pode ser encontrado no livro do Courant, para a integral de $f(x) = x^n; n \geq 2$.

Ao longo do texto faço simulações computacionais que têm dupla função, ao longo da redação do artigo elas me ajudam na verificação das contas e depois me oferecem a oportunidade de propor pequenos programas que calculam qualquer soma de potência de qualquer progressão aritmética. O programa pode ser facilmente ampliado para que o "*qualquer*" seja verdadeiro o que deixo como exercício para o leitor.

2 A teoria polinomial

Somas notáveis Há diversas *somas notáveis*, com frequência necessárias, ou que ocorrem em cálculo intermediários. Algumas delas são

- soma dos termos duma progressão artimética, ou geométrica,
- soma dos quadrados duma sequência de números,
- soma das potências p duma progressão aritmética de números inteiros, pode ser um pouco mais geral, é o caso das *somas de Riemann* de que falo em seguida,
- soma dos termos duma progressão geométrica é um caso aparte, são os expoentes que ficam em progressão artimética, e a saída é outra,
- *somas de Riemann* no cálculo da integral duma função polinomial, estas são *soma das potências p duma progressão aritmética.* A *soma de Riemann* de uma função qualquer raramente será uma *soma notável* no sentido que se possa obter uma expressão simples que as caracterizem. Mas o capítulo 2 do livro do Courant, [Cou61, capítulo 2] mostra alguns casos interessantes que fogem a escopo destes artigo.

Há edições mais recentes do livro do Courant.

Estas somas são polinômiais e as fórmulas para o seu cálculo são também polinômiais tendo um formato *idêntico* que usa o próximo teorema de forma indireta.

Exceto a soma dos termos das p.g. de que vou tratar ao final.

É interessante observar, em conexão com este item, uma aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra com *conotação computacional* permitindo uma forma alternativa à *indução finiita* para determinação de fórmulas para somas de potências. Vou fazer *esta aplicação* no final.

$\boxed{\textit{Theorem}}$ **1 (somas)** *polinomiais*

Suponha que P seja um polinômio do grau p então a soma

$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(0) \tag{1}$$

em que Q_{p+1} é um polinômio do grau $p+1$

Dem *: É corolário do lema, $x \mapsto Q_{p+1}(x)$ é um polinômio do grau $p+1$ se e somente se $x \mapsto Q_{p+1}(x+1) - Q_{p+1}(x)$ for um polinômio do grau p. Depois a equação (eq.1) é consequência direta da identidade como mostra a seguinte sucessão de equações em que a última resume a soma,*

$$Q_{p+1}(x+1) - Q_{p+1}(x) = P(x); \tag{2}$$
$$Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(n) = P(n); \tag{3}$$
$$Q_{p+1}(n) - Q_{p+1}(n-1) = P(n-1); \tag{4}$$
$$Q_{p+1}(n-1) - Q_{p+1}(n-2) = P(n-2); \tag{5}$$
$$\cdots \tag{6}$$
$$Q_{p+1}(2) - Q_{p+1}(1) = P(1); \tag{7}$$
$$Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(1) = \sum_{k=1}^{n} P(k); \tag{8}$$

substituida na soma: os termos se cancelam dois a dois ficando apenas o primeiro e o último. Resta mostrar como obter

$$Q_{p+1}(x) \tag{9}$$

que satisfaça à equação (eq.1), mas isto é imediato, em cada caso, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, porque,

- *Q_{p+1} é um polinômio do grau $p+1$*
- *$p+2$ equações obtidas, no primeiro membro com $p+2$ valores distintos dados a Q_{p+1} e*
- *no segundo membro os correspondentes valores do polinômio P que define a sucessão cuja soma é desejada, de acordo com a equação (eq.2) e as que lhe seguem, que são são os dados do sistema de equações lineares.*
- *Estas $p+2$ equações formam um sistema linear que vai determinar de forma única os $p+2$ coeficientes de Q_{p+1} que são as incógnitas do sistema de equações lineares, pelo Teorema Fundamental da Álgebra.*

Basta escrever $p+2$ somas uma vez que o grau de Q_{p+1} é $p+1$. Tentar uma demonstração genérica é muito difícil, eu não consegui, sem passar por uma notação estrambótica. Os passos seriam:

- $Q_{p+1}(x) = \sum_{j=0}^{p+1} a_j x^j$;
- *dado uma* razão aritmética *h, $Q_{p+1}(x+h) - Q_{p+1}(x) = P(x)$ é um polinômio de grau $p > 0$. Consequência do Binômio de Newton.*
- *Escreva $p+2$ somas sucessivas e obtenha assim $p+2$ equações que determinam de forma única os coeficientes de Q_{p+1}.*
- *O determinante do sistema será* do tipo Vandermonde*, portanto, diferente de zero: o sistema tem uma única solução.*

q.e.d .

Como o *lema* é mais importante do que o *teorema*, eu estarei em seguida me referindo ao *lema do teorema*.

3 Teorema de Nicômaco

Como exemplo eu vou mostrar como obter a soma dos cubos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = S(n) \tag{10}$$

estou usando $P(x)$ para representar a polinômio do terceiro grau que descreve os elementos da sucessão cuja soma me interessa calcular, das terceiras potências de 1 até n, então, neste exemplo, $P(x) = x^3$.

Pelo teorema anterior a soma será e sobretudo pelo lema

$$Q_4(n+1) - Q_4(1); \tag{11}$$

uma diferença entre dois valores dum polinômio do grau 4. Este resultado é conhecido sob o nome de *Teorema de Nicômaco* estabelecendo que a soma dos cubos numa sucessão é o quadrado da soma dos números desta sucessão. Eu poderia obter $Q_4(x)$ diretamente como o *quadrado da soma dos termos duma progressão aritmética*, mas eu estaria *driblando* o propósito do exemplo.

Então eu quero obter

$$Q_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{12}$$

O termo independente pode ser zero, $e = 0$, porque eu vou calcular as diferenças

$$Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(n) \tag{13}$$

eu quero obter

$$Q_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \tag{14}$$

e, acrescento, há uma infinidade de soluções para escolha do termo independente e. Isto tem a ver com as integrais das funções que você obtém a menos de uma constante, mesmo quando não estiver calculando integrais de funções não polinomiais, entretanto, o que estou demonstrando aqui não serve para o caso geral das integrais ...

Vou escrever o sistema de equações que vai me levar a determinar $Q_4(x)$,

$$Q_4(x+1) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) = \tag{15}$$

$$= a(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + b(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + c(x^2 + 2x + 1) + d(x+1) = \tag{16}$$

$$= (ax^4 + 4ax^3 + 6ax^2 + 4ax + a) + (bx^3 + 3bx^2 + 3bx + b) + (cx^2 + 2cx + c) + (dx + d) \tag{17}$$

$$Q_4(x+1) - Q_4(x) = P(x) = 4ax^3 + (6a + 3b)x^2 + (4a + 3b + 2c)x + a + b + c + d \tag{18}$$

$$\begin{cases} 4a + (6a + 3b) + (4a + 3b + 2c) + a + b + c + d = P(1) = 1 \\ 32a + (24a + 12b) + (8a + 6b + 4c) + a + b + c + d = P(2) = 8 \\ 108a + (54a + 27b) + (12a + 9b + 6c) + a + b + c + d = P(3) = 27 \\ 256a + (96a + 48b) + (16a + 12b + 8c) + a + b + c + d = P(4) = 64 \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} 15a + 7b + 3c + d = P(1) = 1 \\ 65a + 19b + 5c + d = P(2) = 8 \\ 175a + 37b + 7c + d = P(3) = 27 \\ 369a + 61b + 9c + d = P(4) = 64 \end{cases} \tag{20}$$

$$a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{1}{4}; d = 0; \tag{21}$$

$$Q_4(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}; \tag{22}$$

$$Q_4(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} = x^2\frac{x^2 - 2x + 1}{4} = x^2\frac{(x-1)^2}{4} = (\frac{(x-1)x}{2})^2; \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = Q_4(n+1) - Q_4(1) \tag{24}$$

A penúltima equação mostra o quadrado do produto da quantidade de termos, x, pela diferença entre o primeiro e último termos duma p.a. $x - 1$ e assim a soma dos cubos é o quadrado da soma como afirma o teorema.

A simulação comuputacional nas três últimas linhas apenas confirma o resultado que foi *demonstrado* acima. Eu poderia omitir esta simulação porque o Teorema Fundamental da Álgebra é que garante que o resultado é correto. Entretanto eu fiz esta simulação como um hábito que tenho quando faço contas traduzindo para uma linguagem de programação as contas de cada linha para verificar se as contas na próxima linha conferem com as modificações feitas de uma linha para outra.

Os coeficientes do polinômio Q foram obtidos usando `calc` que tem cálculo matricial como primitivas da linguagem.

```
A = mat[4,4] = {15,7, 3,1,  65,19,5,1,  175,37,7,1,  369,61,9,1 }
Aa = mat[4,4] = {1,7, 3,1,  8,19,5,1,  27,37,7,1,  64,61,9,1 }
Ab = mat[4,4] = {15,1, 3,1,  65,8,5,1,  175,27,7,1,  369,64,9,1 }
Ac = mat[4,4] = {15,7, 1,1,  65,19,8,1,  175,37,27,1,  369,61,64,1 }
Ad = mat[4,4] = {15,7, 3,1,  65,19,5,8,  175,37,7,27,  369,61,9,64 }
a = det(Aa)/det(A) = 1/4;
b = det(Ab)/det(A) = -1/2;
c = det(Ac)/det(A) = 1/4
d = det(Ad)/det(A) = 0
define Q(x) {return (x**4 - 2*x**3 + x**2)/4;
define Q(x) {return (x*(x-1)/2)**2;;}
k=0;S=0;for(k=1;k<=100;k++) S+=k**3; print S
k=0;S=0;for(k=1;k<=100;k++) S+=k; print S**2
print Q(101)-Q(1);
```

Como subproduto, escrevi um pequeno programa que calcula qualquer soma de sucessão cujos termos sejam dados por um polinômio.

Este resultado não vem atôa, ele está por trás da fórmula de integração de funções polinômiais que é um simples corolário dele:

$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1} \tag{25}$$

porque as somas de *Riemann uniformes* dos monômios polinomiais x^n são somas de potências duma *progressão aritmética*.

E para demonstrar a existência desta integral é suficiente trabalhar com as somas de *Riemann uniformes* porque, como a função é contínua, já sei de partida que sua integral de Riemann existe portanto posso selecionar uma cadéia particular do conjunto parcialmente ordenado das somas de Riemann: das *somas de Riemann uniformes*. Todas as cadéias têm o mesmo limite! Isto vale para qualquer função contínua definida num intervalo fechado, mas esta demonstração somente se aplica às funções polinomiais.

A soma dos termos das progressões aritméticas é um caso particular quando $p = 1$, vou tratar do caso geral.

4 Exemplos e simulação computacional

Como seria muito difícil encontrar uma notação adequada para demonstrar o caso geral, eu vou tratar do caso $p = 2$ e deixar indicado como fazer em qualquer caso.

Theorem **2 (soma)** *dos quadrados*
A soma dos quadrados é dada pela fórmula

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = Q_3(n+1) - Q_3(1) \tag{26}$$

Dem :
Pelo lema, no teorema 1, existe um polinômio Q_3 do grau 3, tal que

$$0 + 1 + 4 + \cdots n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = Q_3(n+1) - Q_3(0); \tag{27}$$

em que incluí zero na soma para manter a expressão já mencionada anteriormente na diferença entre polinômios no último membro da equação (eq.27). Deixo para o leitor a expressão genérica desta diferença...

Então, pelo lema do teorema 1

$$Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; D = 0;$$

em que deixei $D = 0$ porque não interessa qual o valor de D uma vez que vou calcular $Q_3(n+1) - Q_3(0)$ então D pode ser qualquer.

Para determinar um polinômio do grau n preciso de $n+1$ amostras deste polinômio, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o que vai produzir um sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnicas que são os coeficientes do polinômio. Neste caso preciso de apenas três amostras porque $D = 0$. A amostragem de que preciso é

$$Q_3(x+1) = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1); \tag{28}$$

$$Q_3(x+1) - Q_3(x) = A(3x^2 + 3x + 1) + B(2x + 1) + C; \tag{29}$$

$$Q_3(x+1) - Q_3(x) = 3Ax^2 + (3A + 2B)x + A + B + C; \tag{30}$$

$$\begin{cases} 7A + 3B + C = P(1) = 1 \\ 19A + 5B + C = P(2) = 4; \\ 37A + 7B + C = P(3) = 8; \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 19 & 5 & 1 \\ 37 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \tag{32}$$

que é um sistema com um determinante do tipo Vandermonde que tem solução única

as colunas destes determinantes são valores de polinômios de grau 1,2,3

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{6} \tag{33}$$

$$Q_3(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \tag{34}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{35}$$

O lema do teorema 1 mostra que esta demonstração é geral, apenas não disponho duma notação para escrevê-la em formato geral sem tornar a redação quase ilegível, mas a metodologia serve para qualquer caso. **q.e.d .**

Você pode usar o método do teorema 2 para demonstrar as fórmulas seguintes:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2; \tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30}; \tag{38}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}; \tag{39}$$

E aqui está um programa escrito em `calc` que você pode usar para testar a correção das fórmulas que você encontrar:

```
define SomaPot(n,p) {
        local soma = 0;
        for(i=0; i<=n; i++) soma += power(i,p);
        return soma;
}
ou em Python3
def SomaPot(n,p):
    soma = 0;
    for i in range(0,n):
        soma += i**p;
    return soma;
```

Por exemplo, `SomaPot(1500,2)` vai lhe fazer aparecer no terminal em que você estiver rodando `calc` ou `Python3`, a soma dos quadrados dos números naturais até (inclusive) 1500 que é 1126125250. Se você quiser a soma dos cubos rode

`SomaPot(1500,3)` ou se quiser a soma das potências 10,
rode

`SomaPot(1500,10)`

e você irá encontrar o numerozinho 78922789732606129337301119488637 50. Melhor, e mais inteligente, é descobrir o polinômo do grau 11 que produz esta soma resolvendo um sistema de equações lineares 11×11 em que você pode ter ajuda de `calc`,`maxima`, `octave` ou `Python3`, todos distribuidos com alguma variante da licença `GPL`.

Mais a frente vou lhe mostrar um método mais genérico para obter a somas das potências p dos números naturais.

Se você quiser calcular a soma das potências dos números naturais a partir de a e até n, rode

`SomaPot(n,p) - SomaPot(a-1),p)`

que você estará eliminando `SomaPot((a-1),p)`.

Para obter o resultado relativo a integral de polinômios que está registrado na equação (eq.25), basta descobrir o primeiro termo do polinômio Q_{p+1}:

Theorem **3 (somas)** *de potências de p.a.*

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(0) \tag{40}$$

e $Q_{p+1}(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + A_p x^p + \cdots A_1 x$ *e não interessa saber* $A_p, \ldots, A_1$. **Dem** :

Não interessa saber quais são os coeficientes das potências inferiores a $p+1$ porque quando o resultado for colocado na soma de Riemann que fornece a aproximação para a integral na equaçao (eq.25), todos os termos de grau inferior a $p+1$ terão limite zero restando apenas o termo de grau $p+1$ para calcular o limite. Isto simplifica muito a solução do sistema na equação (eq.28), interessa-me apenas o termo do maior grau e ele é dado pelo segundo termo da linha de ordem n do triângulo de Pascal

Chamamos de triângulo de Pascal a um algoritmo conhecido de matemáticos chineses há 6 mil anos.

$$\frac{1}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{n}; \tag{41}$$

levando ao conhecido resultado da integral das funções polinomais.

q.e.d .

5 A prática mostra o caso geral

Deixe-me mostrar-lhe um método alternativo para determinação de somas de potências que permite fazer uma *aplicação computacional* dum *teorema abstrato* que é o teorema fundamental da Álgebra. O mais interessante nesta *aplicação* é que também vou poder mostrar como aparecem os *determinantes de tipo Vandermonde*.

Mostrei no início que a soma das p potências dos primeiros números naturais (ou de uma progressão aritmética qualquer) é dada pela diferença $Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(0)$ em que Q_{p+1} é um polinômio do grau $p+1$. Este problema pode ser significativamente simplificado e inclusive estabelecendo uma conexão computacional com teorema fundamental da Álgebra: determinar um polinômio do grau $p+1$ satisfazendo $p+2$ condições, lembre-se que uma reta tem por equação um polinômio do primeiro grau e preciso de duas condições para determinar o polinômio do primeiro grau que representa esta reta. Também $Q_{p+1}(0)$ é uma constante portanto basta-me procurar um polinômio do grau grau $p+1$ satisfazendo $p+2$ condições. Eu vou fazer isto no próximo exemplo que também vai servir de modelo para o método.

Exemplo 1 (encontrar) *a equação dum polinômio*

A notação vai ficar ligeiramente alterada em relação ao texto anterior.

Um polinômio Q do grau p fica completamente determinado por $p+1$ equações. Na seguinte sucessão de equações vou procurar um polinômio do grau 6, Q, de modo que $Q(N)$ represente a soma das quinta potências dos N primeiros números naturais. Um tal polinômio é do grau 6 e fica determinado por 7 equações lineares:

k	S(k) = Q(k)
Q(1)=	1
Q(2)=	65
Q(3)=	794
Q(4)=	4890
Q(5)=	20515
Q(6)=	67171
Q(7)=	184820

As somas na coluna à direita foram obtidas por um programa semelhante ao está apresentado mais acima que inclusive produz a saída de dados em latex o que me permite raspar e colar no texto deste artigo aquilo você vê na tabela acima.

Vou montar o sistema de equações que traduz a tabela:

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7; \tag{42}$$

$$\begin{cases} Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1; \\ Q(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 + 64a_6 = 65; \\ Q(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 + 729a_6 = 794; \\ Q(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + 1024a_5 + 4096a_6 = 4890; \\ Q(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 + 3125a_5 + 15625a_6 = 20515; \\ Q(6) = a_0 + 6a_1 + 36a_2 + 216a_3 + 1296a_4 + 7776a_5 + 46656a_6 = 67171; \\ Q(7) = a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3 + 2401a_4 + 16807a_5 + 117649a_6 = 184820; \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 65 \\ 794 \\ 4890 \\ 20515 \\ 67171 \\ 184820 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_{1)})}{\det(A_0)} + \frac{\det(A_2)}{\det(A_0)}x + \frac{\det(A_3)}{\det(A_0)}x^2 + + \frac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^3 + \frac{\det(A_5)}{\det(A_0)}x^4 + + \frac{\det(A_6)}{\det(A_0)}x^5 + \frac{\det(A_7)}{\det(A_0)}x^6; \tag{45}$$

$$Q(x) = \frac{43200 - 112010x + 112560x^2 - 58030x^3 + 16800x^4 - 2730x^5 + 270x^6}{60}; \tag{46}$$

- *Na equação (eq.42) escrevi a expressão geral dum polinômio do sexto grau.*
- *Na equação (eq.43) expressei com um sistema de equações os valores de Q para os números que me interessavam,*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mapsto \{1, 65, 794, 4890, 20515, 67171, 184820\} \tag{47}$$

- *na (eq.44) transformei o sistema de equações num produto de matrizes que resolvi, usando `calc`, encontrando os coeficientes de Q*

$$Q(x) = 720 - \frac{56005}{30}x + 1876x^2 + \frac{29015}{30}x^3 + 280x^4 - \frac{91}{2}x^5 + \frac{91}{20}x^6; \tag{48}$$

$$Q(x) = \frac{4320 - 11201x + 11256x^2 - 5803x^3 + 1680x^4 - 273x^5 + 27x^6}{6}; \tag{49}$$

Observe que eu consegui simplificar a expressão para obter o denominador comum 6 *e esta soma vai reproduzir a fórmula da integral de* x^5 *que* $\frac{x^6}{6}$*, ignorando a constante de integração.*

- *A matriz na equação (eq.44) tem um formato especial, das matrizes de Vandermonde. Na segunda coluna se encontram os números* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *cujas potências se encontram nas linhas que eles determinam.*

Expressando em símbolos,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \tag{50}$$

*No exemplo numérico tenho que "*interpretar*"* $1 = 0^0$*, mas não estou propondo esta correção à exceção que existe em Matemática à lei das potências, é apenas um padrão que funciona. Cada linha da matriz na equação (eq.50) é formada pela sucessão de potências do segundo elemento da linha sendo o primeiro elemento sempre 1 que é a potência zero do elemento que define a linha, com a convenção de que vale também para zero.*

Você pode trocar linha por coluna e também terá uma matriz de Vandermonde, neste caso se diz que as colunas são formadas pela sucessão de potências do segundo elemento da coluna, a transposta duma matriz de Vandermonde é também uma matriz de Vandermonde. Daqui para frente para simplificar a linguagem, vou fazer referências exclusivamente às matrizes de Vandermonde em que as linhas contém as potências do segundo elemento. Deve ficar claro para o leitor de que valem todas as afirmações para a matriz transposta.

Os determinantes de Vandermonde podem ser calculados com uma regra bem simples, confira Vandermonde.

Vou agora tratar do caso da soma dos termos duma p.g. que também é uma soma de potências, mas agora são as potências se encontram em progressão aritmética:

$\boxed{\textit{Theorem}}$ **4 (soma)** *progressão geométrica*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n; a \neq 0; \tag{51}$$

$\boxed{\textbf{Dem}}$: *Este caso sai do lema, um dos produtos notáveis,*

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)(a - 1) = a^{n+1} - 1 \tag{52}$$

que pode ser facilmente demonstrado com um simples produto de polinômios. Então

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \tag{53}$$

que é a conhecida fórmula da soma dos termos duma progressão geométrica.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Índice Remissivo

referências

[Cou61] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Ed. por Blackie e Son Limited. Blackie e Son Limited - London, 1961.