Derivada da exponencial

Praciano-Pereira, T *

25 de fevereiro de 2025
preprints da Sobral Matemática
no. 2025.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Neste artigo estou fazendo o cálculo da derivada da exponencial usando exclusivamente uma metodologia de gráficos e partindo da derivada do logaritmo natural.

palavras chave: Logaritmo, exponencial, hipérbole.

In this paper I am showing how to calculate the derivative of the exponential function graphically. It is an elementary way to do this and at level of the univariate Calculus.

keywords: Logarithm, exponencial, hiperbola.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O que você vai encontrar aqui

Este artigo está fundamentalmente baseado em dois gráficos, vou partir do gráfico da hipérbole padrão, que para mim é $y = \frac{1}{x}$ que, sobre qualquer intervalo fechado do seu domínio ela é uniformante contínua o que permiti calcular uma aproximação de sua *integral de Riemann* usando apenas *somas de Riemann uniformes* de onde se pode rapidamente deduzir a propriedade fundamental do *logaritmo natural.* Cito um monografia que publiquei recentemente em esta construção está feita.

Como o *logaritmo natural* é diferenciável e estritamente crescente então tem uma função inversa, a exponencial, que vou obter fazendo uma simetria em torno da primeira bissetriz, graficamente. Sendo a exponencial inversa do logaritmo ela herda entre outras propriedades a diferenciabilidade e vou calcular sua derivada graficamente. Na verdade eu estou apenas construindo geometricamente o *teorema da derivada da função inversa*, a novidade é que o estou fazendo de forma geométrica portanto acrescentando uma visão gráfica do teorema para o caso da exponencial.

O meu objetivo é mostrar que alguns conceitos mais difíceis do Cálculo podem ser apresentados com *extremo rigor* e ao mesmo tempo de forma didática mostrando que o Cálculo não precisa ser o monstro que costuma ser.

2 Como construir o logaritmo

A definição "*moderna*" do logaritmo, que já apareceu nos livros de Cálculo da década de 1940 como no livro de Cálculo de Courant,[Cou61] é

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \tag{1}$$

e como

$$\int_a^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{t}dt \tag{2}$$

Esta é uma propriedade das funções do tipo $y = \frac{K}{x}$ quando K for diferente de zero e esta propriedade pode ser facilmente demonstrada usando *somas de Riemann uniformes* [Pra25].

Então, para $a, b > 0$, vale a *propriedade fundamental do logaritmo*

$$ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}dt = ln(a) + ln(b) \tag{3}$$

Esta propriedade é consequência direta da da equação (eq.2) cuja demonstração pode ser feita usando *somas Riemann uniformes* confira a *monografia Logaríamos*[Pra25].

3 A inversa do logaritmo

Como a "*nova função*" $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ tem por derivada $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$ e sendo a derivada estritamente positiva, então $y = ln(x)$ é uma função crescente logo inversível e assim tenho os gráficos de $y = ln(x)$ e da sua inversa, $y = exp(x)$, apenas fazendo uma simetria em torno da primeira bissetriz como lhe mostra a figura (fig 1), página 2,

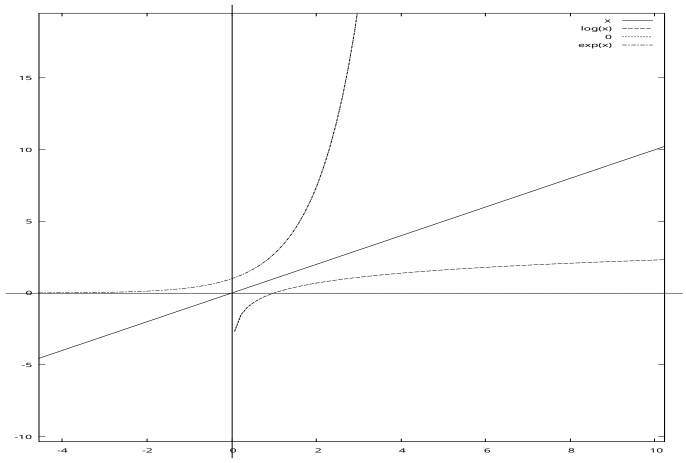

Figura 1: Logaritmo e exponencial

A figura tem uma distorção que esconde a simetria entre os gráficos de $y = ln(x)$ e $y = exp(x)$.

O gráfico de $y = ln(x)$ passa no ponto $(1, 0)$ e o gráfico de $y = exp(x)$ passa no ponto $(0, 1)$. O conjunto de valores de $y = ln(x)$ é a reta real que é o domínio da função $y = exp(x)$.

Posso traçar a reta tangente num ponto arbitrário do gráfico de $y = ln(x)$ usando a expressão da *equação da reta que passa no ponto dado e sendo conhecido o seu coeficiente angular*. Neste caso o ponto dado é $(a, ln(a))$ com coeficiente angular $m = \frac{1}{a}$,

$$(a, ln(a)); m = \frac{1}{a}; y = ln(a) + \frac{1}{a}(x - a); \tag{4}$$

Vou expressar a equação (eq.4) como função para que `gnuplot`[WKo10] entenda e me produza o gráfico e na sequência vou transformar $y = f(x)$ na função inversa $y = g(x)$ cujo gráfico vai ser uma reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ no ponto simétrico a $(a, ln(a))$ relativamente à primeira bissetriz. A maneira de obter este ponto consiste em traçar uma reta perpendicular à primeira bissetriz passando pelo ponto $(a, ln(a))$ e, com um *compasso* manter a distância do ponto $(a, ln(a))$ para o seu simétrico em cima da reta perpendicular, em suma a primeira bissetriz divide este segmento perpendicular ao meio.

$$f(x) = ln(a) + \tfrac{1}{a}(x - a); \tag{5}$$

$$y = ln(a) + \tfrac{1}{a}(x - a) \quad \Rightarrow \quad a(y - ln(a)) = (x - a) \quad \Rightarrow \quad x = a + a(y - ln(a)); \tag{6}$$

$$g(x) = a + a(x - ln(a)) \quad \Rightarrow \quad g(ln(a)) = a; \tag{7}$$

Na equação (eq.6) eu fiz uma reversão das variáveis para expressar x como função de y e na equação (eq.7) eu defini a função inversa $g(x)$ usando a expressão obtida na equação anterior.

Tenho, finalmente,

- o gráfico de $y = g(x)$ é a reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ no ponto $(ln(a), a)$, pela simetria entre os gráficos relativamente à primeira bissetriz dos eixos,
- o coeficiente angular desta reta é **a** que é o valor da derivada de $y = e^x$ no ponto $(ln(a), a)$ que pertence ao gráfico de $y = e^x$ com $e^{ln(a)} = a$ então a *derivada de* $y = e^x$ neste ponto é o *coeficiente angular* **a**, que também é o valor da exponencial neste ponto.

- Como $(a, ln(a))$ é um ponto *genérico* do gráfico de $y = ln(x)$ então, também, $(ln(a), a)$ é um ponto *genérico* do gráfico da exponencial o que termina a demonstração de que a derivada da exponencial $y = e^x$ coincide com sua derivada.

Então

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x; \tag{8}$$

A derivada de $y = e^x$ é ela mesma, sendo a única função que tem esta propriedade, ela é a sua própria derivada. Este artigo não prova esta afirmação final que pode ser demonstrada com a solução única da equação diferencial linear $y' = y$, mas este não é o objetivo desta artigo.

Índice Remissivo

referências

[Cou61] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Ed. por Blackie e Son Limited. Blackie e Son Limited - London, 1961.

[WKo10] Thomas Williams, Colin Kelley e many others. *gnuplot, software to make graphics*. Rel. técn. http://www.gnuplot.info, 2010.

[Pra25] Tarcisio Praciano-Pereira. "Logaritmos". Em: *Sobral Matemática* (2025).