Teorema de Nicômaco [*]

Praciano-Pereira, T

31 de dezembro de 2024
preprints da Sobral Matemática
no. 2023.04
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Na teoria dos números, o teorema de Nicômaco, em homenagem ao antigo matemático grego Nicômaco de Gerasa, afirma que a soma dos cubos dos n primeiros números naturais é igual ao quadrado da soma dos n primeiros números naturais. Estou usando o Teorema Fundamental da Álgebra, um resultado sobre somas de sequências polinomiais, e uma linguagem de programação para demonstrar o teorema.

palavras chave: Nicômaco, Somas notáveis,Teoria dos números,

A result of Number Theory due to Greek mathematician Nicomachus states that the sum of the cubes of the n first natural numbers equals to the square of the sum of these numbers. I am using the Fundamental Theorem of Algebra, a result about sum of polynomial sequences and a programming language to prove the theorem.

keywords: Number Theory, notable sums, Nicomachus theorem,

[*]tarcisio@sobralmatematica.org

Teorema de Nicômaco A soma dos cubos é o quadrado das soma dos números.

$$1 + 8 + \cdots n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = (\sum_{j=0}^{n} j)^2; \tag{1}$$

Vou usar um resultado da teoria dos polinômios que estabelece: *a soma dos termos uma progressão com n termos que são valores dum polinômio do grau k é dada pela diferença $P(n) - P(0)$ em que P é um polinômio de grau $k+1$. P não é único e os distintos polinômios diferem por uma constante o que permite usar P com o coeficiente do termo independente igual a zero.* Como $P(0) = 0$ então a expressão que calcula as somas de sucessões polinomiais se reduz a $P(n)$. Você encontra este resultado num livro de Cálculo na seção sobre somas de Riemann de funções polinomiais e observe que a soma de cubos vai ser calculada com um polinômio do quarto grau.

Este resultado é o ponto central no cálculo do limite das somas de Riemann no cálculo das integrais dos polinômios:

$$\int_0^a x^k dx = a^{k+1}; \tag{2}$$

porque como polinômios são funções contínuas, então sobre intervalos fechados são uniformemente contínuas, então as somas de Riemann uniformes são representantes da classe de sucessões de Cauchy que definem a integral. No caso do polinômio $x \mapsto x^3$ o teorema de Nicômaco ainda me dá mais um resultado

$$\int_0^a x^3 dx = (\int_0^a x dx)^3; \tag{3}$$

porque as somas de Riemann das duas integrais são, à esquerda uma soma de cubos e à direita uma progressão aritmética.

Eu vou usar o Teorema Fundamental da Álgebra para demonstrar o teorema de Nicômaco sobre a soma dos cubos.

$$(1 + 2 + \cdots + n) = P(n);\ \text{soma duma p.a.}; \tag{4}$$

$$(1 + 2 + \cdots + n) = P(n); P(n) = \frac{(n+1)n}{2}; \tag{5}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = P(n)^2 = \frac{((n+1)n)^2}{4}; \tag{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = P(n)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}; \tag{7}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}; \tag{8}$$

- Na equação (eq.4) eu escrevi a expressão da soma duma p.a. neste caso a soma dos primeiros n números naturais, omiti o zero para evitar polêmicas ...

- Na equação (eq.6) escrevi a formula do Teorema de Nicômaco, a soma dos n primeiros cubos é dada pelo quadrado da soma dos n primeiros números naturais.

- Na sequência final eu transformei o lado direito para obter a fórmula que vou usar na sequência de comandos do `calc` que aparecem logo a seguir.

Usando uma linguagem de programação, `calc`, para aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra que me permite determinar um polinômio do grau n produzindo $n+1$ equações com valores do polinômio, vou testar a validade de P^2 para produzir a soma dos quadrados. Defini $P(n)^2$ mas que sigo chamando $P(n)$ porque a sintaxe da linguagem de programação não me permite usar a expressão matemática como eu gostaria. A função `Q(n)` calcula a soma dos cubos até n e finalmente escrevi um laço `for` para imprimir 5 valores das duas expressões porque estou lidando com um polinômio do grau 4 então 5 valores determinam o polinômio, ou melhor, neste caso, provam que o polinômio P fica identificado a partir de 5 valores, pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

```
## calcula soma dos cubos até n
define Q(n) {local S=0,k; for(k=1;k<=n;k++) S += k**3; return S;};
## calcula P(n) que é o quadrado da soma da p.a.
define P(x) {return (x**4 + 2*x**3 + x**2)/4; }
for(k=1;k<=5;k++)
   print "k = ",k, " soma dos cubos ",Q(k)," quadrado da soma ",P(k)
k =  1  soma dos cubos  1  quadrado da soma  1
k =  2  soma dos cubos  9  quadrado da soma  9
k =  3  soma dos cubos  36  quadrado da soma  36
k =  4  soma dos cubos  100  quadrado da soma  100
k =  5  soma dos cubos  225  quadrado da soma  225
```

Como $P(x)^2$ é um polinômio do quarto grau, pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, fica provado que a soma dos cubos até a ordem n é obtida com o quadrado da soma dos n primeiros números naturais.

Índice Remissivo