Ivan Niven demonstrou que π é irracional *

Praciano-Pereira, T

24 de dezembro de 2024
preprints da Sobral Matemática
no. 2024.03
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Ivan Niven, um matemático canadense que obteve seu doutorado na Universidade de Chicago e finalmente ficou trabalhando na América, publicou em 1946 uma demonstração de que π é irracional, [Niv46], e eu estou completando detalhes da demonstração que Niven omitiu por considerar óbvios.

Ivan Niven tinha número de Erdõs 1.

palavras chave: integral positiva, númweo irracional, π.

A Canadian-American mathematician, Ivan Niven, having Erdõs number 1, wrote in 1946 at the Bulletin of the American Mathematical Society an elementary proof that π is irrational using basically elements of Calculus. I am completing here details that Ivan Niven left out considering them obvious.

keywords: irrational nunber, π, positive integral.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O plano do trabalho

Ivan Niven escreveu em 1946 um artigo publicado no *Bulletin of the American Mathematica Society* em que ele provou que π é um número irracional usando apenas métodos do Cálculo Diferencial e Integral. O artigo de Niven tem exatamente uma página e ele resumiu muito sua demonstração deixando por conta do leitor detalhes que ele considerou óbvios que era coisa típica dos artigos científicos daquela época em que o número de páginas dos artigos nas revistas eram muito restritos.

Na segunda seção eu faço uma expansão da demonstração de Niven deixando, espero, que ela fique acessível a qualquer leitor que tenha feito um curso de Cálculo passando por integral e derivada.

Na terceira seção eu apresento uma simulação computacional que foi importante para mim na minha leitura do artigo de Niven e que pode ajudar o leitor a compreender a demonstração do artigo original de Niven, [Niv46].

2 A demonstração

Ivan Niven, um matemático canadense que obteve seu doutorado na Universidade de Chicago e finalmente ficou trabalhando na América, publicou em 1946 uma demonstração de que π é irracional, [Niv46], que eu estou completando detalhes da demonstração que Niven omitiu por considerar óbvios.

Ivan Niven tinha número de Erdõs 1.

Ele começou o artigo com *hipótese de absurdo*

$$\pi = \frac{a}{b} > 3 \quad \Rightarrow \quad a > 3b; a, b \in \mathbf{N}^*; \tag{1}$$

Eu completei sua hipótese com a desigualdade $a > 3b$ usando que se conhece que $\pi > 3$ este fato vai me permitir avançar mais abaixo na parte final do artigo e acrescentar esta informação não altera a construção de Niven. Também acrescentei que a, b são primos entre si e portanto a fração $\pi = \frac{a}{b}$ é irredutível.

Niven definiu os dois polinômios.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{(x(a-bx))^n}{n!}; \\ F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x); \\ F(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f^{(2j)}(x); \end{cases} \tag{2}$$

usando a convenção $f^{(0)} = f$, a derivada de ordem zero é a própria função.

$f(x)$ é um polinômio de grau $2n$ e tem assim derivadas não nulas até a ordem $2n$ e F é a soma das derivadas $f^{(2j)}$ até $f^{(2n)}$. Então n pode ser arbitrário mas a expressão de F é uma soma e portanto um polinômio de grau $2n$.

O número natural n é arbitrário e muito grande, Niven apenas especificou que n seria um número natural a *estabelecer posteriormente* o que ele não fez até porque seria desnecessário.

A função

$$h(x) = a - bx; \tag{3}$$

é crucial na construção de Niven, é ela que contém a contradição que Niven explorou ao final do artigo, é essencial que

$$\pi = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad h(\pi) = 0; \tag{4}$$

para que a função $f(x)\sin(x)$, que vai ser usada mais a frente. A implicação na equação (eq.4) é verdadeira porque a premissa é falsa! Ivan não fez uso desta sentença diretamente, mas ela está dentro do raciocínio final.

Como $n!f(x)$ tem coeficiente inteiros e é uma soma de monômios de grau maior o igual a $2n$ então, $f(0) = 0$ e suas derivadas, $f^{(2j)}(0) = 0$, porque f e suas derivadas têm uma potência de x que pode ser posta em evidência. Como

$$\begin{cases} \pi = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = \frac{\pi^n(a-b\pi)^n}{n!} = 0; \\ f(0) = 0; f(\pi) = 0; \\ \pi = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad f(a/b - x) = f(\pi - x); \end{cases} \tag{5}$$

Observe que se a hipótese for falsa, ou seja $\pi \notin \mathbf{Q}$ então $f(\pi) \neq 0$ porque $\pi = \frac{a}{b}$ é uma raiz da função h, o ponto importante na continuação.

Agora tenho

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)) = \tag{6}$$
$$= F''(x)\sin(x) + F'(x)\cos(x) + F(x)\sin(x) - F'(x)\cos(x) = \tag{7}$$
$$F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) = \tag{8}$$
$$F''(x)\sin(x) = f''(x)\sin(x) - f^{(4)}(x)\sin(x) + f^{(6)}(x)\sin(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2(n+1))}(x)\sin(x) = \tag{9}$$
$$F(x)\sin(x) = f(x)\sin(x) - f^{(2)}(x)\sin(x) + f^{(4)}(x)\sin(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\sin(x); \tag{10}$$
$$F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) = f(x)\sin(x); \tag{11}$$

porque $F''(x) + F(x) = f(x)$.

Integrando *por partes*

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = \int_0^\pi (F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x))dx = \tag{12}$$
$$F'(x)\sin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi F'(x)\cos(x)dx - F(x)\cos(x)|_0^\pi + \int_0^\pi F'(x)\cos(x))dx = \tag{13}$$
$$F'(\pi)\sin(\pi) - F'(0)\sin(0) - (F(\pi)\cos(\pi) - F(0)\cos(0)) = \tag{14}$$
$$F(\pi) + F(0) = 0; \tag{15}$$

Neste ponto há um erro, não de Niven, ele sabia que $F(\pi) \neq 0$, como consequência da hipótese de absurdo, que passa a ser usada na continuação e que faz com que $F(\pi) + F(0) \neq 0$.

Como a função

$$f(x)\sin(x) = \frac{((a - bx)x)^n}{n!}\sin(x) \tag{16}$$

é contínua e positiva no intervalo $[0, \pi]$ porque

- é o produto da enésima potência da função do primeiro grau $h(x) = a - bx$ que é contínua e positiva no intervalo $[0, \pi]$,
- $h(0) = a > 0$,
- h decresce para zero no ponto π sendo portanto positiva no intervalo $[0, \pi]$ e aqui novo erro, não de Niven, mas da hipótese de que

  $$\pi = \frac{a}{b} \tag{17}$$

  um número racional, portanto a função h não se anula em π o que é necessário para que

  $$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = 0; \tag{18}$$

  para qualquer valor de n, confira (eq.15) .

- no mesmo intervalo $\sin(x) > 0$ então $f(x)\sin(x) \geq 0$ no no intervalo $[0, \pi]$

e sendo uma função contínua e positiva e diferente de zero no intervalo $[0, \pi]$ cuja integral no intervalo $[0, \pi]$ igual a zero é um absurdo consequentemente a hipótese $\pi = \frac{a}{b}$ é falsa.

Esta conclusão é falsa consequentemente $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Como todas as contas estão corretas e como $\int_o^\pi f(x)\sin(x)dx$ não é zero, para qualquer valor de n então a hipótese inicial do artigo é falsa, $\pi = \frac{a}{b}$ para dois inteiros positivos dados a, b e assim Niven provou que π não é um número racional *usando apenas os métodos do Cálculo*, uma demonstração elementar de que $\pi \notin \mathbf{Q}$.

O limite uniforme da sucessão de funções nem mesmo é utilizado!

3 Testes computacionais

Eu não precisava de fazer a simulação que estou mostrando abaixo para entender o motivo da construção de Ivan Niven mas penso que ela ajuda a compreensão do artigo original.

Um raciocínio simples aplicado à função $\sin(x)$ que cresce até o ponto médio do intervalo $[0, \pi]$ decrescendo depois até o final do intervalo com máximo no ponto médio que fica próximo de 1.6, confira a simulação, junto com o fato de que h decresce de maneira uniforme desde $a > 0$ até zero em π leva à conclusão de que $f(x)\sin(x)$ tem um máximo em algum ponto do interior do intervalo $[0, \pi]$ pelo *teorema do valor médio* do Cálculo. Mas a simulação me economizou contas e tempo.

Niven calculou o máximo de $f(x)\sin(x)$ no intervalo $[0, \pi]$ o que é desnecessário para a conclusão final, a integral

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \tag{19}$$

é zero para qualquer valor de n. *o que é falso*, então a hipótese inicial é absurda e portanto $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Observe que $f(x)\sin(x)$ é uma sucessão de funções que dependem do parâmetro n cujo limite ponto a ponto é a função identicamente nula, no intervalo $[0, \pi]$. Na verdade é um limite uniforme porque os elementos da sucessão são funções contínuas que têm um máximo que converge para zero, e Ivan Niven calculou este máximo ao final do artigo. Eu deveria ter usado a notação $f_n(x)\sin(x)$ mas preferi não fazê-lo para me afastar o mínimo possível do texto de Ivan Niven.

Para entender a demonstração de Niven eu lancei mão dum instrumento que ele não tinha em 1946, *computação rápida* e *linguagens de computação avançadas*, e eu tenho hoje, então analisei a função $f(x)\sin(x)$ para alguns valores de $a, b.n$ no intervalo $[0, \pi]$ fazendo simulações com uma linguagem de computador, que me permitiu compreender perfeitamente a construção de Niven. Ofereço abaixo a minha simulação para duas escolhas de $a, b.n$ que você pode alterar usando os valores de sua preferência. Eu usei `calc`, uma linguagem produzida por um grupo que estuda *Teoria dos números* e que é de domínio público, mas você, facilmente, pode traduzir a experiência para usar `Python3` que é uma linguagem mais universal. `Python3` oferece uma pequena dificuldade que pode ser superada com algum treino, há um limite para cálculo do *fatorial*, coisa que não havia em versões anteriores da linguagem. `calc` não oferece este problema pois é uma *linguagem de precisão infinita* e calcula o fatorial para valores arbitrários que dependem apenas da memória da máquina.

Defini com a linguagem de programação `calc`

- `pi=4*atan(1)` um número racional ...
- $pi \approx 3.14159265358979323848 = 78539816339744830962/25000000000000000000$;
- $a = 78539816339744830962$ e $b = 25000000000000000000$
  eu obtive esta falsa "geratriz" de pi fatorando o número inteiro

  $$314159265358979323848$$

usando o aplicativo `factor` que é nativo da minha distribuição `Debian/gnu/Linux`, eliminando os fatores comuns com o denominador

$$100000000000000000000$$

- No programa eu usei `b=2; a=pi*b;`
- Defini

  `define f(x,n) return (x*(a-b*x))**n/fact(n);` e

  `define g(x,n) return f(x,n)*sin(x);`
- Fiz duas simulações, uma com $n = 10$ e outra com $n = 5000$, executando o comando

  `for(x=0;x<pi;x=x+0.2)`

  ` print 'x =','|',x,' g(x,n)= ',g(x,n);`

  em cada caso dando a n um dos dois valores que escolhi.;
- os resultados foram

  1. $n = 10$

```
x = | 0  g(x,10)=  0
x = | 0.2  g(x,10)=   0.00000027847937253326
x = | 0.4  g(x,10)=   0.00027642830934429252
x = | 0.6  g(x,10)=   0.01083633533672442546
x = | 0.8  g(x,10)=   0.10771719923272921210
x = | 1  g(x,10)  =   0.48188649272488930263
x = | 1.2  g(x,10)=   1.23983733599578011831
x = | 1.4  g(x,10)=   2.06498830452136647058
x = | 1.6  g(x,10)=   2.35097412538249525761
x = | 1.8  g(x,10)=   1.85335964056544235181
x = | 2  g(x,10)  =   0.98776696123581098153
x = | 2.2  g(x,10)=   0.33194982103869320419
x = | 2.4  g(x,10)=   0.06080022840338230246
x = | 2.6  g(x,10)=   0.00445890147620186225
x = | 2.8  g(x,10)=   0.00006056641975368124
```

  2. $n = 50000$

```
x = | 0  g(x,50000)=  0
x = | 0.2  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 0.4  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 0.6  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 0.8  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 1    g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 1.2  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 1.4  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 1.6  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 1.8  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 2    g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 2.2  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
```

```
x = | 2.4  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 2.6  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 2.8  g(x,50000)=   0.00000000000000000000
x = | 3    g(x,50000)=   0.00000000000000000000
```

Uma das simulações mostra que para pequenos valores de n, no intervalo $[0, \pi]$ a função $g(x) = f(x)\sin(x)$ alcança um máximo de 2.35097412538249525761 para $x \approx 1.6$ e que para grandes valores de n ela fica muito próxima de zero, mas é sempre diferente de zero, no intervalo $[0, \pi]$ como Ivan Niven o sabia. Como o máximo converge para zero se trata duma convergência uniforme.

A simulação mostra que a função $g(x) = f(x)\sin(x)$ é praticamente nula, mas sempre positiva no intervalo $[0, \pi]$, para grandes valores de n e no intervalo $[0, \pi]$. ela converge *pontualmente* para zero quando n cresce indefinidamente, restrita ao intervalo $[0, \pi]$ que é o que interessava a na demonstração de Ivan Niven embora este detalhe não seja importante, o que é importante é que $g(x) = f(x)\sin(x) > 0$ no intervalo $[0, \pi]$ e que sua integral é zero, a contradição que Ivan Niven buscava.

Eu fiz estas duas simulações enquanto terminava de escrever o artigo então rodei "`calc`" num `computador portátil` que fez os cálculos do dois laços, claro, rodando `Debian/gnu/linux`. Quando comecei a rodar o laço com $n = 50000$, a bateria do *portátil* acusou tempo de 19 minutos restantes de expectativa de carga da bateria, ao terminar os cálculos deste laço, o programa que controla a carga da bateria passou a acusar que ainda havia 59 minutos de expectativa de carga, indicando que houve uma carga pesada de trabalho durante o cálculo que dependia do fatorial que é a função `fact` nativa do `calc`.

O laço com $n = 10$ foi processado tão rápido, num piscar de olhos, que não pude registrar alguma diferença na expectativa de carga da bateria durante o processamento.

Com `Python3` seria preciso alterar o limite de conversão para inteiros para calcular fatorial de grandes números. Em `Debian/gnu/linux` você instala `calc` usando o comando

```
sudo apt install apcalc
```

ou pedindo ao administrador do laboratório para fazê-lo.

Índice Remissivo

referências

[Niv46] Ivan Niven. "A simple proof that pi is irrational". Em: *Bulletin of American Mathematical Society* (1946).