Se Euler não fez, eu fiz

Praciano-Pereira, T [*]

25 de dezembro de 2023
preprints da Sobral Matemática
no. 2023.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Eu não sei como foi que Euler inventou ou calculou e^{it} mas De Moivre já havia provado a sua fórmula e, como de hábito para a época, deve tê-la comunicado a outros matemáticos de renome, como Euler. Se Euler não usou a fórmula de De Moivre para definir $e^z; z \in \mathbf{C}$, eu o estou fazendo aqui.

palavras chave: fórmula de De Moivre,fórmula de Euler,exponencial complexa

I don't know how Euler defined e^{it} but De Moivre had already proved his formula, and it was common, at the time, that a mathematician less known, as De Moivre, send his finding to some well known mathematician to preserve his finding and Euler was a mathematician very well known. If Euler has not used De Moivre's formula to define $e^z; z \in \mathbf{C}$, I am doing it here.

keywords: complex exponencial, De Moivre's formula, Euler's formula

[*]tarcisio@sobralmatematica.org

1 Um problema para a História

Não sou historiador portanto não sei como Euler chegou na definição de $e^{iy}, y \in \mathbf{R}$ e desde que comecei a estudar Matemática fiquei intrigado sobre como este "cálculo" poderia ser feito. Uma das saídas, e muita gente pensa que foi o método que Euler teria adotado, seria aplicar a definição em série de potências da exponencial real a este caso o que é perfeitamente aceitável porque e^x é absolutamente convergente. Mas fazer surgirem as séries de cosseno e seno é trabalhoso.

Existe uma alternativa criada por *De Moivre* que vou explorar neste artigo com a pergunta: *Euler usou a fórmula de De Moivre ?*

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt); \tag{1}$$

Não encontrei uma resposta para esta pergunta e vou deixá-la para os historiadores.

2 A fórmula de De Moivre

De Moivre viveu viveu em Londres como *professor particular* de 1667 a 1754. Euler, que sempre foi apoiado pelos reis, da Rússia ou da Alemanha, viveu de 1707 a 1783, portanto eles *conviveram* como matemáticos durante pelo menos uns 30 anos. Mas viveram numa época em que as comunicações eram precárias e os matemáticos escreviam cartas transmitidas pelo correio em que trocavam opinião sobre problemas ou anunciavam teoremas que haviam demonstrado. Euler era um matemático de renome e admito que De Moivre lhe tenha comunicado a sua fórmula

$$(e^{it})^n = (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt) = e^{int}; \tag{2}$$

Na equação (eq.2) estou usando e^{it} como *uma etiqueta* para representar a expressão correspondente na fórmula de De Moivre que havia demonstrado a parte intermediária da equação (eq.2). Também não sei que método ele teria usado, apenas imagino que, hábil calculistas como eram os matemáticos desta época, sem os vícios introduzidos pela *computação algébrica*, De Moivre teria desenvolvido a expressão na equação (eq.2) para alguns valores de n e usado a *indução finita*, que já deveria estar em processo de desenvolvimento, para concluir que a equação (eq.2) seria verdadeira para qualquer valor de n. Mas isto também é uma questão de história da qual vou me afastar, *convenientemente*. Hoje aplicar *indução finita* e demonstrar a fórmula de De Moivre é um exercício simples com um passo trivial, quando $n = 1$ e o segundo passo apenas um pouquinho trabalhoso.

Continuando com notação da equação (eq.2), sempre considerando a expressão de Euler como uma *etiqueta* para referenciar a expressão à direita, tenho

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t); \tag{3}$$
$$(e^{it})^k = (\cos(t) + i\sin(t))^k = \cos(kt) + i\sin(kt) = e^{ikt}; \tag{4}$$
$$e^{ikt}e^{it} = \cos(kt)\cos(t) - \sin(kt)\sin(t) + i(\cos(kt)\sin(t) + \sin(t)\cos(t)); \tag{5}$$
$$e^{ikt}e^{it} = \cos(kt + t) + i\sin(kt + t) = \cos((k+1)t) + i\sin((k+1)t) = e^{i(k+1)t}; \tag{6}$$

Então a fórmula de *De Moivre* é válida para qualquer que seja o número natural n mas, $y = kt$, dado y, é uma equação do primeiro grau para determinar o valor de t que corresponda a y portanto a demonstração na lista de equações (eq.3)- (eq.6) é que

$$e^{iy}e^{it} = e^{i(y+t)}; \tag{7}$$

e a fórmula de *De Moivre* prova que e^{iy} define um morfismo do grupo aditivo $\mathbf{R}$ sobre o grupo multiplicativo $\mathbf{S}^1$ como eu queria demonstrar e como, provavelmente, *Euler* sabia, e apenas resta a pergunta, foi pela via de séries de potência ou simplesmente aplicando a fórmula de *De Moivre*, um problema para historiadores.

Então, se $z = x + iy$, De Moivre respondeu qual seria o valor de e^{iy} e sem grande esforço se verifica que

$$e^{i(y_1+y_2)} = e^{i(y_1)}e^{i(y_2)}; \tag{8}$$

portanto a fórmula de De Moivre define um morfismo de grupo do grupo aditivo $(\mathbf{R}, +)$ sobre o grupo multiplicativo $(\mathbf{S}^1, *)$. A exponencial real define um morfismo de grupo do grupo aditivo $(\mathbf{R}, +)$ sobre o grupo multiplicativo $(\mathbf{C}^*, *)$.

Euler pode simplesmente ter *habilmente* juntado os dois casos definindo a exponencial complexa sem necessidade de discutir a convergência absoluta das séries de potências:

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad e^z = e^x e^{iy} \tag{9}$$

que é um morfismo de grupo do grupo aditivo $(\mathbf{C}, +)$ sobre o grupo multiplicativo $(\mathbf{C}^*, *)$.

3 Eu fiz

Deixo a questão histórica: como foi que Euler expandiu a exponencial real ao conjunto dos números complexos? Terá feito uso da fórmula de De Moivre?

Eu já expus esta questão diversas vezes, ver [Pra19], a colegas que me respondiam que Euler deve ter usado séries de potências até porque elas foram um instrumento de grande importância na construção das soluções das equações diferenciais ordinárias com intensa contribuição de Euler e de outros usando esta metodologia, Portanto eles tinham uma habilidade imensa de manipular estas séries.

O cálculo com séries dificilmente poderá ser expresso em uma página como eu acabei de fazer usando a fórmula de De Moivre. Se Euler não tiver usado este método, eu fiz e o que é mais importante, a chamada *fórmula de Euler* deve ser chamada com mais justiça *fórmula Euler-De Moivre* porque foi De Moivre que construiu a parte que faltava, a parte imaginária da exponencial complexa.

Penso que é injusto que $e^{i\pi} - 1 = 0$ esteja associada exclusivamente ao nome de Euler, De Moivre está sendo injustiçado e talvez ele tenha feito a parte mais difícil do problema vivendo em condição muito precária como um matemático que produzia sentado em mesas de cafés, em Londres, a espera de alunos para ter aulas de xadrez e matemática. E se conta que quando perguntavam alguma coisa de Matemática a Newton, ele sugeria que se procurasse De Moivre porque “ele entendia bem melhor do assunto em questão”. Mas Newton nunca moveu uma palha para que De Moivre se tornasse professor de Universidade, provavelmente sabia do perigo que corria em que alguém lhe fizesse sombra, *era mais seguro* deixá-lo sobrevivendo nos cafés como professor particular de Matemática e xadrez.

Índice Remissivo

referências

[Pra19] Tarcisio Praciano-Pereira. *A fórmula de Euler*. Rel. técn. Sobral Matemática, 2019.