Matrizes de Cauchy-Riemann

Praciano-Pereira, Tarcisio *

9 de setembro de 2023
preprints da Sobral Matemática
no. 2023.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Estou apresentando uma classe de matrizes que tem interessantes propriedades algébricas, *matrizes de Cauchy-Riemann*, e o nome vem das *equações de Cauchy-Riemann*. Usando as *matrizes de Cauchy-Riemann* eu consegui provar que toda função complexa que tenha derivada complexa é indefinidamente derivável. Também falo da ruptura lógica que existe entre o Cálculo univariado e o Cálculo multivariado e sua consequência para a renomada incompreensão que grassa no ensino do Cálculo. E penso que tenho uma solução para o problema cujo resumo coloco na última seção.

palavras chave: ensino do Cálculo, matrizes de Cauchy-Riemann,ruptura lógica.

This paper presents a class of matrices which have interesting algebraic properties, *Cauchy-Riemann matrices*. I have been able to prove that a complex function which has a complex derivative is infinitely differentiable using *Cauchy-Riemann matrices*. I have used finite induction as the $k+1$th derivative is a *Cauchy-Riemann matrix* hence a complex number then a complex function has a complex derivative of any order. I am taking the opportunity to surface a logical disruption of Calculus teaching which leads to the well known lack of success among the students. I think I have a solution to this problem and I am talking about this in the last section.

keywords: A logical disruption, Cauchy-Riemann matrices, analytical functions are infinitely differentiable, the teaching of Calculus.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Objetivo

Neste artigo eu estou apresentando uma classe interessante de matrizes, as *matrizes de Cauchy-Riemann*, uma subclasse das matrizes 2×2 de números reais que têm propriedades algébricas interessantes e eu estou explorando estas propriedades na primeira seção e na segunda seção eu vou mostrar que elas estão ligadas a uma classe de funções vetoriais de duas variáveis, as *Funções Analíticas* para fazer uma crítica ao ensino do Cálculo. Na última seção estou fazendo publicidade do trabalho que venho realizando sob o título de *reengenharia do Cálculo*, [Pra19a] e [Pra19b], pelo menos para me forçar a continuar o trabalho iniciado.

2 Uma classe de matrizes

Matriz de Cauchy-Riemann é um tipo de matriz da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \approx a + ib; \tag{1}$$

e o conjunto de tais matrizes é isomorfo ao corpo dos números complexos. Observe que a matriz nula é uma *matriz de Cauchy-Riemann* assim como o é também a matriz identidade, então este conjunto é uma subálgebra do conjunto de todas as matrizes 2×2 de números reais relativamente às operações de soma e multiplicação de matrizes.

Teorema 1 (produto) *de matriz de Cauchy-Riemann* *O conjunto das matrizes de Cauchy-Riemann está em correspondência biunívoca e sobre com o conjunto dos números complexos. Esta correspondência preserva as operações de adição e multiplicação de modo que ela é um isomorfismo de álgebras.*

Dem *: Dados $a + bi, c + di$ então*

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i \mapsto \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i \mapsto \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$\lambda(a+bi) + \beta(c+di) = \lambda a + \beta c + (\lambda b + \beta d)i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda a + \beta c & -(\lambda b + \beta d) \\ \lambda b + \beta d & \lambda a + \beta c \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda a + \beta c & -(\lambda b + \beta d) \\ \lambda b + \beta d & \lambda a + \beta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta c & -\beta d \\ \beta d & \beta c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}; \tag{6}$$

que mostra que o produto e a soma de números complexos corresponde ao produto das correspondentes matrizes de Cauchy-Riemann. Então o produto e adição de números complexos corresponde ao produto e multiplicação deste tipo de matrizes. Como o produto de números complexos é comutativo então, equivalentemente, o produto de matrizes de Cauchy-Riemann será também comutativo. A imagem de $0 + 0i$ é uma matriz de Cauchy-Riemann assim como 1 corresponde à matriz identidade que é uma matriz de Cauchy-Riemann.

As duas últimas equações provam que a transformação é linear e como a imagem inversa do zero é o zero, em qualquer direção, então o núcleo desta transformação linear é o zero o que mostra que ela é injetiva.

Como qualquer elemento em qualquer dos dois conjuntos tem uma imagem inversa então ela é também bijetiva e assim se trata dum isomorfismo como pretendido. **q.e.d .**

A demonstração do teorema 1 está resumida mas os detalhes técnicos estão todos presentes. Então o conjunto $\mathbf{C}$ dos números complexos tem uma imagem isomorfa dentro do conjunto das matrizes 2×2 de números reais. Como esta imagem é um subconjunto de todas as matrizes então, a imagem assim obtida de $\mathbf{C}$ é um subconjunto próprio de

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 = \mathcal{M}_{2\times 2}; \tag{7}$$

aliás como seria de esperar porque a dimensão de $\mathbf{C}$ como espaço vetorial real é dois e o conjunto das matrizes quadradas de números reais tem dimensão quatro como espaço vetorial real.

O que é mais interessante neste resultado é que ele se encontra na base da argumentação desenvolvida por Cartan, [Car67] para mostrar que existe um subconjunto próprio das funções reais de duas variáveis tomando valores em $\mathbf{R}^2$ que são as funções de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$, as funções analíticas.

Eu pretendo na próxima seção desenvolver esta ideia, que embora não seja nenhum resultado novo, representa uma forma concisa e elegantes de discutir as *funções analíticas* e ainda assim devido à Cartan[Car67] e o que me toca talvez seja apenas uma forma diferente de apresentar o problema.

Além disto, o referido livro de Cartan é relativamente desconhecido do público brasileiro. É preciso acrescentar que este artigo representa *apenas algumas páginas* do referido livro em que Cartan desenvolve o Cálculo Diferencial em espaços de Banach. No livro de Cartan, as funções analíticas são um exemplo rápido, o que entendo que foi uma falha do autor que escreveu anteriormente um livro em que apresentou as funções analíticas usando um formato antigo e muito complicado, as séries de potências. Rudin[Rud74], o fez de forma bem mais bonita usando diretamente a fórmula de Cauchy da qual ele tira as séries de potências como uma consequência.

3 as funções analíticas

Um tipo de função interessante são as funções analíticas, que vistas como funções complexas de variáveis complexas, quer dizer, $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ são um subconjunto próprio, e agora, interessante, do conjunto das funções vetoriais de duas variáveis reais, quer dizer $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Estas últimas, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ têm como derivadas uma matriz

$$f' = J(f) \in \mathcal{M}_{2\times 2}; \tag{8}$$

e do que foi dito anteriormente existe um subconjunto próprio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que é isomorfo a $\mathbf{C}$, o conjunto da *matrizes de Cauchy-Riemann*. O meu objetivo agora é mostrar de uma forma bem simples o que caracteriza as *funções analíticas* usando o isomorfismo do teorema 1.

Vou partir duma comparação. As funções reais de variável real tem derivadas que são números reais, quer dizer,

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f'(x) \in \mathbf{R}; \tag{9}$$

isto é uma falsidade cômoda dentro dos cursos de Cálculo onde seria complicado dizer que $f'(x)$ é uma *transformação linear* para criar compatibilidade com a disciplina de Cálculo em sua versão posterior de varias variáveis em que $f'(u) = J(f)(u)$ é a jacobiana de f calculada no vetor u e portanto $f'(u) = J(f)(u)$ é uma *transformação linear* como também é no caso univariado, e ficaria "*menos complicado*" se a derivada fosse caracterizada diretamente como o coeficiente angular da reta tangente e que esta é paralela a uma reta que passa na origem e esta última, sim, uma *transformação linear*.

Estou observando uma ruptura que existe entre o Cálculo univariado e o Cálculo multivariado que obviamente choca a estudante, mas confesso que eu ainda não consegui uma forma de sanar esta ruptura. Quero mostrar que de certo forma as funções complexas de variável complexa trazem uma solução para este problema. Considere a seguinte sucessão de equações que vou comentar posteriormente.

$$f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}; f(z) = u(z) + iv(z); \tag{10}$$

$$f'(z) \in \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \approx \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}; \tag{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \end{array} \right. ;\text{Cauchy-Riemann} \tag{12}$$

$$J(f) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbf{C}; \tag{13}$$

indexCauchy-Riemann!equações de

Na equação (eq. 3.10) eu escrevi f, como é usual, um par de funções u, v que são funções reais de duas variáveis reais,

$$z = x + iy; f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y); \tag{14}$$

na equação (eq. 3.11) eu escrevi a jacobiana $J(f)$ de uma função vetorial de duas variáveis. Pelas *equações de Cauchy-Riemann* esta matriz é uma *matriz de Cauchy-Riemann* e eu escrevi sua imagem como um número complexo. Na equação (eq. 3.12) eu escrevi a *condição de Cauchy-Riemann* que caracteriza quando uma função vetorial de duas variáveis reais é uma função analítica e na última equação, (eq. 3.13) eu escrevi o número complexo que corresponde à matriz de Cauchy-Riemann que é a derivada de f, um número complexo, é o número complexo equivalente à jacobiana que é uma *matriz de Cauchy-Riemann.*

Teorema 2 (derivadas complexa) *das funções analíticas Todas as derivadas duma função analítica são derivadas complexas e assim as funções analíticas são infinitamente diferenciáveis.*

Dem :
Continuando com a notação já estabelecida na equação (eq. 11)

$$f'(z) \in \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad f'(z) \approx \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{15}$$

$$f''(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}; \tag{16}$$

Na equação (eq. 15) eu escrevi a expressão de $f'(z)$ duas vezes, numa eliminando v e na outra eliminando u, fazendo uso das equações de Cauchy-Riemann. *Eu obtive a equação (eq. 16) calculando as segundas derivadas, ora usando a primeira expressão da derivada na equação anterior e depois usando a segunda expressão da derivada na equação anterior e a igualdade entre as matrizes mostra que a segunda derivada é uma* matriz de Cauchy-Riemann *e consequentemente $f''(z) \in \mathbf{C}$ o que mostra que a segunda derivada é uma derivada complexa e que f' é analítica.*

Hipótese de indução a derivada de ordem $k, k > 1$ de uma função complexa é uma derivada complexa. *Como esta derivada de ordem k satisfaz às* equações de Cauchy-Riemann, *o processo se vai repetir, vou escrever $f^{(k)}(z)$ duas vezes, numa das expressões vou eliminar a segunda componente, e na outra vou eliminar a primeira componente, sempre usando as* equações de Cauchy-Riemann *tendo por conclusão que $f^{(k+1)}(z)$ é uma* matriz de Cauchy-Riemann *e que portanto $f^{(k+1)}(z)$ é um número complexo e $f^{(k)}(z)$ é analítica provando que todas as derivadas de uma função analítica são também funções analíticas e assim as funções analíticas são indefinidamente deriváveis.* **q.e.d .**

4 Melhoria do Cálculo

Ao identificar a derivada com um número estou cometendo o mesmo "*erro*" do Cálculo univariado quando se identifica a derivada como um número. Na verdade a derivada é o coeficiente da reta tangente que é paralela a uma reta que passa na origem e, esta, é uma *função linear.* O caso complexo torna mais fácil a identificação de que a derivada é uma *função linear.*

Penso que o ensino do Cálculo se beneficiaria imensamente se esta disciplina fosse tratada diretamente com números complexos e iniciada com o derivada e integração complexa de partida e, mais, restrita inicialmente às funções polinomiais. Sei que tem alguns autores que estão tentando levar por esta via, e eu sou um dos que está tentando renovar o ensino do Cálculo para salvar esta disciplina da tragédia em que ela se encontra produzindo sucessivamente reprovações.

O método aqui sugerido consiste em tratar inicialmente apenas de funções polinomiais, e diretamente com variável complexa, unificaria o tratamento de derivada e integral e neste caso a integral seria a antiderivada, simplesmente.

Eu ainda não resolvi inteiramente o método, estou trabalhando nesta linha há algum tempo,[Pra19a], [Pra19b], e já passei por alguns tropeços mas consegui alguns resultados positivos que me animam a continuar o trabalho nesta linha.

Índice Remissivo

analítica
função, 1

Cauchy-Riemann
Matriz, 1
Cálculo
das funções polinomiais, 3

espaço
de Banach, 2

função analítica, 2
infinitamente diferenciável, 3

infinitamente diferenciável
função analítica, 3
isomorfismo
de álgebra, 1

Matriz
de Cauchy-Riemann, 1
melhoria
do Cálculo, 3

reengenharia
do Cálculo, 1
ruptura
lógica
Cálculo univariado, 2

série
de potências, 2

tragédia
do Cálculo, 3

referências

[Car67] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Ed. por Collection Méthodes. Herman - Paris, 1967.

[Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill - Book Company, 1974.

[Pra19a] Tarcisio Praciano-Pereira. *A reengenharia do Cálculo*. Rel. técn. Sobral Matemática, 2019.

[Pra19b] Tarcisio Praciano-Pereira. *A reengenharia do Cálculo, segunda parte*. Rel. técn. Sobral Matemática, 2019.