Derivada e primitiva de splines a suporte compacto. caso particular das potências por convolução.

Praciano-Pereira, Tarcisio *

10 de dezembro de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2021.10
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

As potências por convolução da função característica do intervalo $[0, 1]$ têm uma propriedade muito interessante que torna fácil o cálculo da próxima potência. Alguma propriedades e exemplos são o objetivo deste artigo.

palavras chave: função característica, potências por convolução, um teorema das potências por convolução.

Convolution power of characteristic function of $[0, 1]$ have a nice property which makes easy to obtain the next power. Some properties and examples are the point with this paper.

keywords: characteristic function, convolution power, a theorem of convolution power.

*tarcisio@sobralmatematica.org

Vou descrever a propriedade mencionada das potências de $\chi_{[0,1]}$ nesta primeira seção. Nas seguintes darei exemplos mostrando como passar da potência n para a potência $n+1$ sem precisar de calcular a convolução. Vou mostrar inclusive um método computacional para verificar se o cálculo está correto usando gráficos com `gnuplot`.

1 O projeto

Na segunda seção eu vou descrever a propriedade fundamental da potência por convolução da função característica do intervalo $[0, 1]$ e fazer a sua demonstração.

Na terceira seção vou dar um exemplo mostrando a passagem da segunda potência para a terceira potência. Na quarta seção vou mostrar como acompanhar o processo de cálculo verificando com `gnuplot` e na última seção vou exibir o gráfico da sexta potência por convolução de $\chi_{[0,1]}$ e suas quatro derivadas contínuas porque $\chi^6_{[0,1]}$ é um 4-splines.

2 Propriedade fundamental da potência por convolução da função característica

Teorema 1 (Propriedade fundamental) *potência por convolução da função característica*
Seja $f_1 = \chi = \chi_{[0,1]}$ e $f_n = \chi = \chi^n_{[0,1]}$. então

$$\frac{df_n(x)}{dx} = f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x-1) \tag{1}$$

Dem :
é bem conhecida a propriedade da convolução de funções integráveis

$$\frac{d}{dx} f * g = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}; \tag{2}$$

em que a derivada deve ser tomada no sentido das distribuições quando necessário. Desta propriedade se deduz

$$f_n = \chi_{[0,1]} * f_{n-1} = f_1 * f_{n-1}; \tag{3}$$

$$\frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d\chi_{[0,1]}}{dx} * f_{n-1}(x) = (\delta_0 - \delta_1) * f_{n-}(x) = f_n(x) - f_n(x-1); \tag{4}$$

q.e.d . *Na última equação eu usei a derivada no sentido das distribuições de f_1 quando a medida de Dirac aparece.*

3 Um cálculo da próxima potência

A segunda potência por convolução de $\chi_{[0,1]}$ é uma função contínua, mas não derivável, ou com derivada não contínua que são as duas derivadas dos dois segmentos de reta que formam a segunda potência por convolução produzindo a função triângulo cujo suporte é o intervalo $[0, 2]$ tendo o valor 1 no ponto médio do suporte. Aqui se observa uma propriedade fundamental do produto por convolução que é a preservação da integral quando um dos fatores tem integral 1.

Acompanhando a notação já sugerida na primeira seção, $\chi_{[0,1]} = f_1$ e a função triângulo é f_2 sendo sua derivada a diferença $f_1(x) - f_1(x-1)$ a diferença entre f_1 e sua translação duma unidade, uma função descontínua.

Pelo teorema 1 a derivada da terceira potência, f_3 é a diferença de translações de f_2. Na sequência de equações abaixo você pode ver todos os cálculos que me levaram à terceira potência da função característica.

$$\frac{df_3(x)}{dx} = f_2(x) - f_2(x-1); \tag{5}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & x; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & 2-x; \\ x \geq 2 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$f_2(x) - f_2(x-1) = \begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & x; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & 2 - x - (x-1) = 3 - 2x; \\ x \geq [2,3] & \Rightarrow & -(2-(x-1)) = -2 + (x-1) = -3 + x; \\ x \geq 3 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$df_3(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & x; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & 3 - 2x; \\ x \geq [2,3] & \Rightarrow & -3 + x; \\ x \geq 3 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$f3(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & x^2/2; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & 1/2 - (3-1) + 3x - x^2 = -1.5 + 3x - x^2; \\ x \in [2,3] & \Rightarrow & 1/2 - (-4) - 3x + x^2/2 = 4.5 - 3x + x^2/2.0; \\ x \geq 3 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$f3(x) = \begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & x^2/2; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & -1.5 + 3x - x^2; \\ x \in [2,3] & \Rightarrow & 4.5 - 3x + x^2/2.0; \\ x \geq 3 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{10}$$

O gráfico, feito com estas equações traduzidas para `gnuplot` é o que aparece na figura (1) página 2.

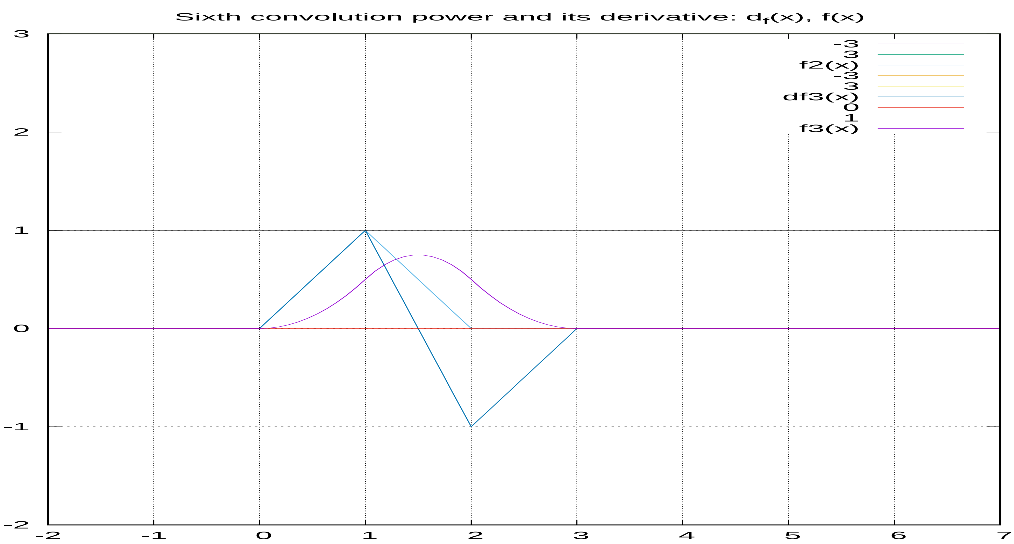

Figura 1: segunda e terceira potência

4 Verificando a correção computacionalmente

É um pouco trabalhoso o cálculo de $f2(x) - f2(x-1) = \frac{df3(x)}{dx}$ mas ainda é mais simples do que o cálculo direto de $\chi * f2 = f3$. A metodologia que usei para cometer menos erros foi a de produzir o gráfico com `gnuplot` a cada linha da equação e assim corrigir imediatamente o erro na linha em curso sem acumular erros. Foi extremamente útil no cálculo da sexta potência que é um sistema de equações com 7 linhas e um erro cometido numa linha se acumula para todas as demais. Eis o cálculo feito dentro dum terminal do `gnuplot` para obter $f6$ partindo do cálculo já feito de $f5$

```
f5(x) = (x<=0) ?0:(x<=1)?power(x,4)/24.0:\
(x<=2)?-power(x,4)/6.0 + 5*power(x,3)/6.0 +\
-5.0*power(x,2)/4.0 +5*x/6.0 -5/24.0:\
(x<=3)?power(x,4)/4.0 - 5*power(x,3)/2.0+\
35*power(x,2)/4.0 - 75*x/6.0 + 155/24.0:\
(x<=4)?-power(x,4)/6.0 +5*power(x,3)/2.0 +\
- 55*power(x,2)/4.0 +195*x/6.0 -655/24.0:\
(x<=5)?power(x,4)/24.0 - 5*power(x,3)/6.0 +\
25*power(x,2)/4.0 - 125*x/6.0 + 625/24.0:0;
df6(x) = f5(x)-f5(x-1);
f6(x) = (x<=0)? 0:\
        (x<=1)? power(x,5)/120.0:\
        (x<=2)? 1/20.0 -x/4.0+\
                + power(x,2)/2.0 - power(x,3)/2.0+\
                + power(x,4)/4.0 - power(x,5)/24.0:\
        (x<=3)? -237/60.0 + 117*x/12.0 - 19*power(x,2)/2.0 +\
                9*power(x,3)/2.0 - power(x,4) + power(x,5)/12.0:\
        (x<=4)? 731/20.0 - 231*x/4.0 + 71*power(x,2)/2.0+\
 - 21*power(x,3)/2.0 +\
                3*power(x,4)/2.0 - power(x,5)/12.0:\
        (x<=5)? -5487/60.0  +\
                409*x/4.0 - 89*power(x,2)/2.0 +\
                19*power(x,3)/2.0 - power(x,4) +\
                power(x,5)/24.0:\
(x<=6)?  324/5.0 -54*x + 18*power(x,2) +\
-3*power(x,3) + power(x,4)/4.0 -power(x,5)/120.0:0;
```

Quem não tiver hábito de usar `gnuplot`, há duas formas de definir `if/else` e a que está sendo usada acima é a forma compacta da linguagem `C`

```
if (A) B; else C;  equivalente a  (A)?B:C
```

também `gnuplot` aceita que uma linha seja escrita ao longo de várias linhas usando a barra invertida " " para eliminar o fim de linha. Assim posso escrever o `if/else` compacto ao longo de várias linhas, de modo mais legível.

Versão mais recen do `gnuplot` tem `if/else` não compacto.

Então, antes de passar para a próxima desigualdade, eu terminava o ":" colocando ":0" ou ":1" conforme fosse fazer o cálculo duma derivada, então usando ";0", porque as derivadas das potências por convolução são sempre a suporte compacto, e ":1", quando no cálculo das primitivas porque aqui eu não queria nada que passasse de 1. Isto permite rapidamente ver onde há erros.

Outra técnica que também usei, e comumente uso, é pedir que `gnuplot` faça o gráfico de f e da reta tangente para testar que se calculei corretamente a derivada f'.

5 Splines a suporte compacto e suas derivadas

A figura (2), página 4, lhe mostra os gráficos da sexta potência por convolução de $\chi[0,1]$ junto com suas quatro derivadas contínuas, são os gráficos de $f6$ e de suas derivadas contínuas. os gráficos foram

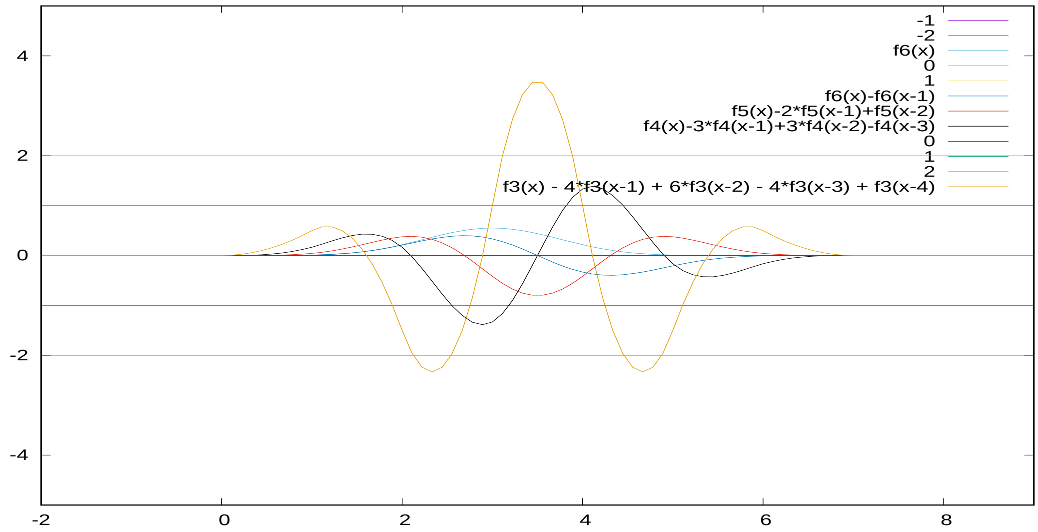

Figura 2:

feitos com `gnuplot` com as seguintes 4 linhas de comando.

```
set terminal postscript eps enhanced color
set output 'DerivadasPrimitivaSplinesCompactSupp.eps'
set xrange [-2:9]; set yrange [-5:5];
plot -1,-2,\
        f6(x),\
        f6(x)-f6(x-1),\
        f5(x) - 2*f5(x-1) + f5(x-2),\
        f4(x) - 3*f4(x-1) + 3*f4(x-2) - f4(x-3),\
        f3(x) - 4*f3(x-1) + 6*f3(x-2) - 4*f3(x-3) + f3(x-4),\
        0,1,2
```

e observe que eu já disse, a contra barra, "\", elimina o fim de linha o que me permitiu escrever a última linha de forma mais legível, separando as distintas funções, cada uma em "linha aparente" que serão lidas por `gnuplot` como uma única linha.

Este artigo contém a evolução dos resultados obtidos em [2] onde os resultados foram computacionais levando a um programa para calcular qualquer potência por convolução da função característica. Na presente etapa eu recomecei a partir da segunda potência para calcular a enésima, usando o Teorema 1, e agora as formulas obtidas são as expressões algébricas precisas dos pedaços de polinômios envolvidos. Mas não é possível, com esta metodologia, obter qualquer potência de convolução da função característica, mas, calculada f_n, é fácil obter f_{n+1} com a metodologia descrita aqui.

Alguns dos programas usados neste artigo podem ser obtidos em [3] ou solicitados ao autor se não forem encontrados na citação indicada. Os programas são experimentais e é preciso hábito com `gnuplot` para eliminar comentários que inibem certas operações. Muitos destes comentários escondem os testes a que fiz referência na seção anterior.

Procure

```
Derivada.gnuplot
convolution_power.gnuplot
bibioteca.gnuplot
Este é muito antigo mas foi como a coisa começou em 2011,
```

`potencia\_convolucao01_zero_um.gnuplot`

Espero que você sobreviva!

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] A.J. Neves and T. Praciano-Pereira. Convolutions power of a characteristic function. *arxiv.org*, 2012, April, 22:16, 2012.

[3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/, 2009.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.