Partição da unidade, splines e integral

Praciano-Pereira, Tarcisio *

3 de novembro de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2021.09
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Neste artigo estou mostrando um método de aproximação de integrais usando splines por convolução. Vou usar uma *partição da unidade* produzida por convolução com *kernel*, uma função positiva cuja integral vale 1, que é a quinta potência por convolução da função característica do intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ substituindo os retângulos das *somas de Riemann*.

palavras chave: cálculo aproximado da integral, somas de Riemann, splines por convolução.

In this paper, I am showing how to use a partition of the unity produced by convolution with a *kernel*, a positive function whose integral is 1, which is the 5th convolution power of $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ in place of rectangles in *Riemann sums*.

keywords: Approximate calculus of the integral, convolution splines, Riemann sums.

*tarcisio@sobralmatematica.org

Este artigo ainda está sendo redigido e quando atingir a sua versão final, esta observação irá desaparecer. E porque publicar uma versão em produção*? Porque esta página é de préprints portanto contém trabalhos com os quais os autores almejam uma publicação futura e nos quais os autores se expõem na esperança de encontrar uma colaboração.*

This paper is still been prepared and when ready this information will be dropped. And why publishing a production version*? This is a p reprints page and this means the papers published here are expected to be published in a final form else were but in the mean time the authors are exposing a work in progress expecting to find a collaborator.*

Uma outra razão desta observação inicial é de organização da página, estou neste momento apenas reservando um número de publicação, um aviso para os que visitarem a página que este artigo está sendo escrito. Quando pronto, este aviso desaparecerá.

Another reason for this is organizational, the page is reserving a number of publication and in addition to that an announcement that the paper is in production but about to be finished. When the paper is finished, this note will be dropped.

1 Partição da unidade por convolução

Em [2] eu construí uma partição da unidade por convolução com um *kernel* que é a quinta potência por convolução da função característica do intervalo $[0,1]$, $\chi_{[0,1]}$, e aqui eu vou mostrar como melhorar as somas de Riemann usando esta partição da unidade no sentido de que n, a quantidade de subintervalos na partição do intervalo $[a,b]$ sobre o qual se queira calcular a integral pode ser pequeno e mesmo assim a precisão é grande. Vou apresentar uma estatística *bem elementar* mostrando a efetividade do método. Em suma estou propondo um método para calcular integrais aproximadamente usando splines.

1.1 O plano do trabalho

1. Na segunda seção vou estabelecer a notação que será usada em todo o trabalho aproveitando para relembrar alguns conceitos.

2. Na terceira seção vou uar um projetor de interpolação pu tal que $pu(f)$ é uma aproximação de f usando 4-splines definido na segunda seção.

3. Na quarta seção vou relembrar a integral de splines e calcular a integral de cinco funções selecionadas usando o programa escrito em `calc`[1] para comparar o resultado com Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a dada uma destas funções no mesmo intervalo que o programa estiver usando. O processo está todo automatizado. O programa estará disponível para quem quiser usá-lo e distribuído sob a GPL.

2 Coeficientes na partição da unidade

Vou resumir o conteúdo de [2] para estabelecer a linguagem de trabalho. A leitora que necessite mais dados sobre a construção duma partição da unidade diferenciável deve que consultar [2].

Essencialmente, eu considero numa partição uniforme do intervalo $[a,b]$, as funções características dos sub-intervalos que formam uma *quase partição da unidade* no sentido de que a falha se dá num conjunto de medida nula, que é o conjunto finito dos pontos extremos dos subintervalos da partição, pela descontinuidade nos extremos dos intervalos. Embora eu tenha me referido ao intervalo $[a,b]$, grande parte deste trabalho vai se dar no intervalo $[0,N]$ e ao final eu vou estabelecer como aplicar os resultados a um intervalo $[a,b]$ qualquer. Isto vai produzir uma linguagem bem leve e simples pela natureza particular do objeto que é $[0, N]$ que será transformado ao final num conjunto de índices de modo a ter o resultado formatado para um intervalo $[a, b]$ qualquer. Eu vou descrever a teoria toda para o intervalo $[0, N]$ com uma partição em que os nós são os números inteiros. Este caso particular vai se transformar no conjunto dos índices que descrevem o caso geral $[a, b]$ e a redação fica mais simples.

A convolução com a quarta potência por convolução da função caraterística do intervalo $[0, 1]$ devidamente alterada com uma *dilação*, na linguagem das *wavelets*, transforma a *quase partição da unidade* do intervalo $[0, N]$ numa *partição da unidade* de classe $\mathcal{C}^4$ porque a quinta potência por convolução de $\chi_{[0,1]}$ é um 4 splines. É equivalente fazer a convolução com todos os átomos da partição ou simplesmente transladar a convolução feita com o primeiro átomo usando nós inteiros da partição como parâmetro da translação. A razão desta simplificação reside na escolha de *partição uniforme*.

Vou designar com o símbolo

$$f_n(x) = \chi_{[0,1]}^n \tag{1}$$

e neste artigo estarei me fixando na quinta potência, um splines a suporte compacto, f_5. sujo suporte é $[0, 5]$. Associada a cada f_n eu vou considerar

$$g_n(x) = f_n(x + \frac{n}{2}); supp(g_n) = [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]; \tag{2}$$

que é um kernel equilibrado em volta da origem.

Na verdade, o que acontece é que $f_5 = \chi_{[0,1]}^5$ é o novo átomo calculado para criar com suas translações a partição da unidade e isto corresponde a fazer a convolução de $f_4 = \chi_{[0,1]}^4$ com os átomos da *quase partição da unidade* formada pelas funções características que foi o ponto de partida do trabalho. O ganho imenso obtido foi que agora estes novos átomos são uma simples translação do primeiro, em vez de *convolução* estou fazendo *translação*, o que é possível porque *estou restrito à partições uniformes*. Enquanto eu estiver trabalhando com o intervalo $[0, N]$, *átomo e kernel* são idênticos porque o primeiro átomo é f_5, é um kernel, e os demais átomos são suas tranlações.

A expressão

$$pu(f) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g_5(w(x - x_k)) \tag{3}$$

é a fórmula do projetor de interpolação induzido pela partição da unidade representada pelas *ondinhas* $g_5(w(x - x_k)$ que na equação (eq.3) já foram adaptadas para a partição escolhida no intervalo com os dois fatores de correção, w, x_k

1. w é o fator de compressão de passagem de $[0, N]$ para $[a, b]$ e vale $w = \frac{1}{\Delta x}$ em que Δx é a medida comum dos subintervalos de $[a, b]$, $\Delta x = \frac{b-a}{N}$.
2. o segundo parâmetro, x_k, é da translação em que x_k é um nó da partição do intervalo $[a, b]$. No caso de $[0, N]$ x_k é um dos inteiros deste intervalo.

A teoria em [2] foi escrita para o intervalo $[0, N]$ e a equação (eq.3) a transforma isometricamente para o intervalo $[a, b]$. Mas eu vou inicialmente fazer as contas com referência ao intervalo $[0, N]$ porque elas ficam mais simples e na seção final vou fazer a adaptação de passagem de $[0, N]$ para $[a, b]$.

Uma das aplicações interessantes desta teoria se encontra no fato de que os coeficientes $f(x_k)$ podem ser qualquer amostragem de dados duma função que represente um fenômeno e para a qual se queira fazer um gráfico ou calcular sua integral aproximada. $pu(f)$ é a interpolação desdes dados, que podem, e devem representar uma amostra dos pontos da função f tomada sobre os nós da partição do intervalo $[a, b]$. $pu(f)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^4$, porque estou tralhando com a quinta potência por convolução de $\chi_{[0,1]}$, poderia ser a enésima potência o que iria produzir uma função de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Vou aplicar esta partição da unidade de classe $\mathcal{C}^4$ em lugar dos retângulos duma soma de Riemann, na próxima seção.

3 Coeficientes duma amostragem

A expressão na equação (eq.3) é um 5-splines e para calcular aproximadamente a integral de f tudo que eu tenho a fazer e calcular a integral do 5-splines $pu(f)$, confira [4]. Nesta seção vou desenvolver todos os cálculos e traduzí-los para um programa de computador que terá entre as possibilidades oferecidas ao usuário, fazer o gráfico de $pu(f)$, dada f ou de calcular sua integral aproximada. A verdade é outra, foi o programa que me conduziu à redação deste artigo e o justo seria colocá-lo, *o programa*, como *primeiro autor* deixando-me na honrosa posição de *segundo autor*. Mas, ao final, eu sou o *autor do programa*!

Vou usar a descrição da história deste processo como método para estabelecer a notação que eu preciso para calcular a integral de $pu(f)$.

As figuras (fig 1), página 3, mostram a família $g_2(x+x_k); k \in \{0, \cdots, 11\}$ que são funções-triângulo

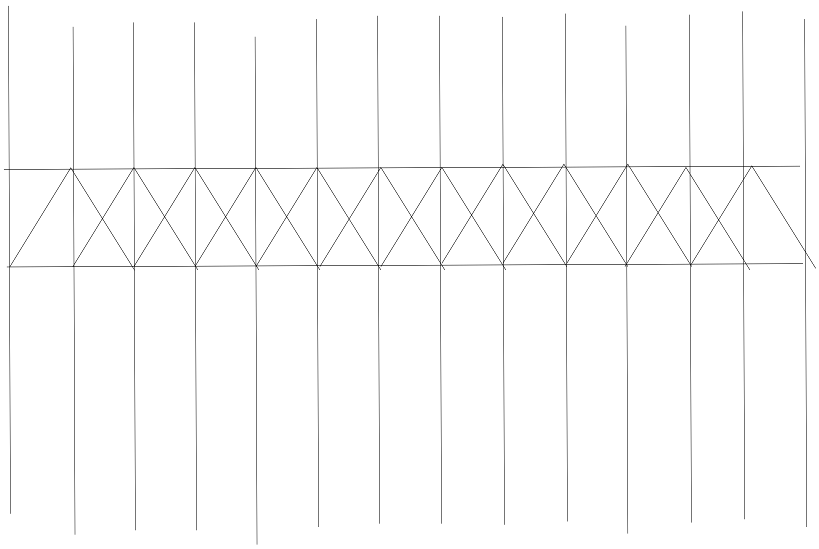
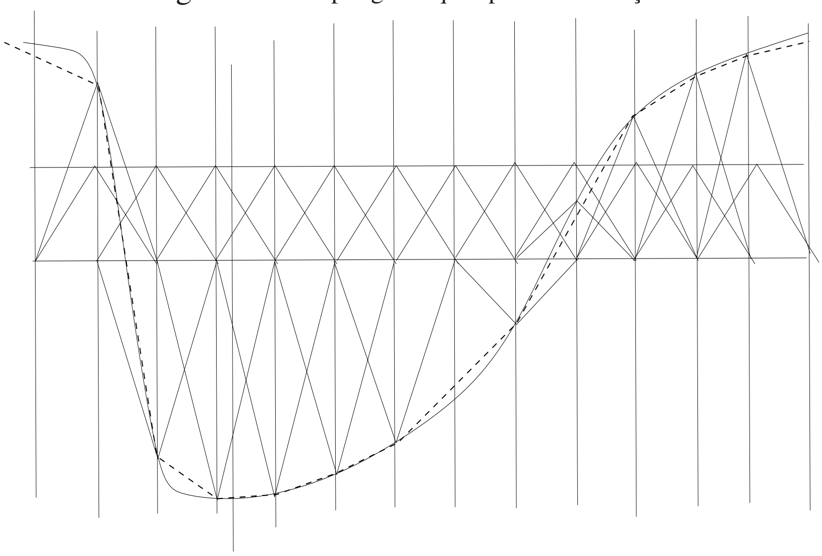


Figura 1: Uma poligonal que aproxima a função



obtidas por translação de $g_2 = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} = \chi^2_{[0,1]}$. E eu vou me referir na continuação à *potência por convolução* apenas como *potência* uma vez que, em *nenhuma hipótese*, neste artigo, irá aparecer a *potência usual* da aritmética.

A expressão na equação (eq.3) para ser otimizada ficaria muito complicada para ser escrita como expressão matemática, merece ser criticada como um método de justificativa para a construção do progrma. Como g_2 tem suporte $[-1, 1]$ então as translações de g_2 por uma unidade se entralacam como mostra a figura (fig 1) e a soma na equação na equação (eq.3) tem apenas duas parcelas diferentes de zero para cada valor do índice. No caso de g_3 seriam três, no caso de g_n seriam n. Num programa é muito fácil de expressar a parte "útil" da soma, mas expressar isto no formalismo matemático vai tornar o texto mais confuso. É mais fácil fazê-lo sob a forma de observação como estou fazendo aqui. Em suma, para g_n, o somatório na equação (eq.3) tem apenas n parcelas diferentes de zero, para cada valor de $x \in [a,]$.

A integral transforma a equação (eq.1) na soma das integrais dos átomos, todas iguais, tendo por coeficientes da `combinação linear` os coeficientes os dados da amostra $(f(x_k))$. É uma modificação da *soma de Riemann* usando as wavelets g_5 alteradas pelo coeficiente $(f(x_k))$. Como numa soma de Riemann uniforme, se coloca a wavelet g_n em evidência multiplicando a soma dos coeficientes. O resultado é

$$pu(f) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\left(\Gamma_5(w(x - x_k) - \Gamma_5(w(x - x_{k-1})\right) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\Delta\Gamma_{5,w,k}; \tag{4}$$

em que $\Gamma_{5,w,k}$ é uma primitiva de g_5 no caso do intervalo $[a, b]$ e se $w = 1$ no intervalo $[0, N]$.

4 Uma amostragem comparativa do método

As seguintes funções fora selecionadas para testar o método

$$f(x) = sin(4x)e^{-x^2}; \tag{5}$$
$$f(x) = -(x - 7)(x + 10)sin(2x); \tag{6}$$
$$f(x) = -(x - 7)(x + 10); \tag{7}$$
$$f(x) = x^2; \tag{8}$$
$$f(x) = 1; \tag{9}$$
$$f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{10}$$

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] T. Praciano-Pereira. Partição da unidade, splines e integral. *preprints da Sobral Matemática - 2021*, 2021.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. Primitivas de n-splines ii. Technical report, Sobral Matemática, 2016.

[5] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.