A lei do seno

Praciano-Pereira, T. *

6 de abril de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2021.04
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

A lei do seno é um bonito resultado que serve para determinar o comprimento dos lados dum triângulo, conhecendo-lhes os ângulos e o lado oposto a um dos ângulos, ou o os ângulos sabendo o comprimento do lado oposto a um dos ângulos. Isto é coisa bem conhecida, mas o que me surpreendeu procurando pela demonstração, que finalmente fiz, foi que o caso trivial não é colocado em evidência e que ele pode ser usado para fazer a demonstração do caso geral é o *caso do triângulo retângulo*.

palavras chave: classificação geral dos triângulos, lei do seno, o caso trivial da lei do seno.

The sine law gives us the length of the sides of a triangle if the angles are known and one of the sides, or knowing the angles and the length of the side oposed to one of them.

I was trying to find the proof of this beautiful result and I was stroke by the fact that the trivial case, *the one of a triangle rectangle*, is omitted and when writing down the proof I realized the trivial case enable a simple proof for the general case.

keywords: classification of triangles, the sine law, the trivial case of the sine law.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Caso trivial da lei do seno

A **lei do seno** é a relação

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{1}$$

em que α, β, γ são os ângulos dum triângulo e a, b, c são, respectivamente, os lados opostos a estes ângulos. Confira a figura (fig. 1), página 1, em que um triângulo PQR pode ser visto e os ângulos poderiam ser referenciados usando as letras que denominam os vértices,

$$\alpha = \hat{R}, \beta = \hat{P}, \gamma = \hat{Q} \tag{2}$$

e eu vou algumas vezes fazer referencias aos ângulos usando o vértice, por exemplo que α é o ângulo do vértice R, ou simplesmente do ângulo no vértice R, conforme for mais cômodo para fazer a referencia geométrica.

Num *triângulo retângulo pitagórico* com lados

$$a, b, c \in \mathbf{N}$$

em que c é a hipotenusa, e os ângulos agudos α, β, como $a = 3, b = 4, c = 5$, então

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{a}{c}; \sin(\beta) = \frac{b}{c}; \sin(\gamma) = 1; \\ \frac{a}{\sin(\alpha)} = c; \frac{b}{\sin(\beta)} = c = 5; \frac{c}{\sin(\gamma)} = c = 5; \end{cases} \tag{3}$$

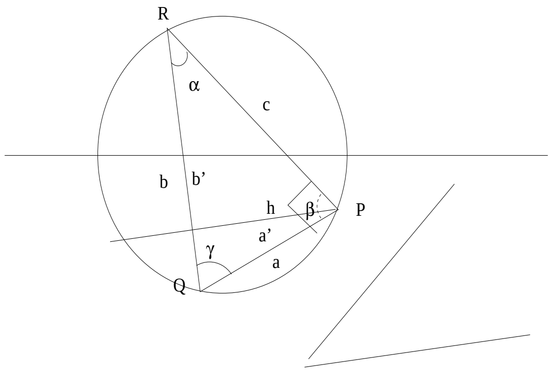

Figura 1:

Nesta equação eu uso os símbolos a, b, c tanto para representar os lados, os segmentos de reta, como os respectivos comprimentos, *metonímia* para não acrescentar mais símbolos à descrição do problema. O contexto deixa claro qual é o uso destes símbolos.

Estas mesmas equações, (eq.3), valem num triângulo retângulo qualquer, apenas nos casos dos *triângulos retângulos pitagóricos* é fácil encontrar os lados fazendo uma proporção com um conjunto de números pitagóricos. Num triângulo retângulo qualquer com lados a, b, c em que c é a hipotenusa, e os ângulos agudos α, β, então

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{a}{c}; \sin(\beta) = \frac{b}{c}; \sin(\gamma) = 1; \\ \frac{a}{\sin(\alpha)} = c; \frac{b}{\sin(\beta)} = c; \frac{c}{\sin(\gamma)} = c = 2r; \end{cases} \tag{4}$$

porque $\sin(\gamma) = 1$ e no caso das outras frações se recai na definição do seno dos respectivos ângulos do triângulo retângulo. O valor $2r$ é a medida do diâmetro, porque, quando um triângulo retângulo se encontrar inscrito num círculo, a hipotenusa, c, coincide com o diâmetro do círculo.

Então, os *triângulos retângulos* são os casos triviais para a *lei do seno* não havendo nada para demonstrar é simples constatação. Vou demonstrar esta lei, quando o triângulo não for retângulo e há dois casos para analisar.

2 Caso dos triângulos acutângulos

Cometi um erro dizendo que este é um "caso", quando na verdade é *uma classe de casos*, a demonstração que vou fazer se aplica a todos os elementos desta classe, a *classe dos triângulos acutângulos*.

Considere um *triângulo acutângulo* como na figura (fig. 1), página 1. Baixando a perpendicular do vértice P até o lado b, tenho dois *triângulos retângulos* um dos quais tem o ângulo α em comum com triângulo primitivo e o outro tem o ângulo γ em comum com o triângulo primitivo. A altura h é comum a estes dois triângulos retângulos. Depois eu vou baixar uma perpendicular ao lado c partindo do vértice Q criando dois outros triângulos retângulos cuja altura comum é h'.

Nestes 4 *triângulos retângulos* eu posso fazer os seguintes cálculos,

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c}; \sin(\gamma) = \frac{h}{a}; \tag{5}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{\frac{h}{a}} = \frac{ac}{h}; \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\frac{h}{c}} = \frac{ac}{h}; \tag{6}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{h'}{b}; \sin(\beta) = \frac{h'}{a}; \tag{7}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\frac{h'}{a}} = \frac{ab}{h'}; \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\frac{h'}{b}} = \frac{ab}{h'}; \tag{8}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}; \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}; \tag{9}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}; \tag{10}$$

em que h é a altura dos *triângulos retângulos* obtidos ao baixar uma perpendicular partindo de P e h' é a altura dos *triângulos retângulos* obtidos ao baixar uma perpendicular partindo do vértice Q perpendicularmente para o lado c. Eu posso editar a figura (fig. 1) com `xfig` para levar um dos dois segmentos de reta, que você pode ver no canto inferior direito da figura, deslocando o segmento adequado para se originar em P ou Q determinando h' ou h.

A equação (eq.10) é consequência das duas igualdades anteriores, usando o axioma das igualdades, "*quando duas quantidades são iguais a uma terceira, então elas são iguais entre si*".

3 Caso dos triângulos obtusângulos

Como no caso dos *triângulos acutângulos* este não é um "caso", e sim *uma classe de casos*, a demonstração que vou fazer se aplica a todos os elementos desta classe.

No caso dum *triângulo obtusângulo*, confira a figura (fig. 2), página 3, onde eu desenhei dois círculos, o menor passa nos vértices do triângulo retângulo RMP tendo c por diâmetro então para os ângulos $\hat{M}, \hat{P}$ vale a *lei do seno* tendo c como razão. O outro círculo tem raio maior do que o anterior porque o triângulo PQR é obtusângulo então o maior lado, que se opõe ao ângulo no vértice Q é menor do que o diâmetro do círculo.

c está com dois significados aqui, *m*

Estou usando a notação já usada nos casos anteriores para os símbolos dos ângulos e dos lados. Agora tenho um triângulo obtusângulo, γ se opõe ao lado c, como no caso do triângulo acutângulo. Traçando uma perpendicular do ponto Q cortando o lado c, divido o triângulo original em dois triângulos retângulos, cada um dos quais tem, respectivamente, o ângulo α ou o ângulo β em comum com o *triângulo obtusângulo original* e posso calcular

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b}; \sin(\beta) = \frac{h}{a}; \tag{11}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\frac{h}{b}} = \frac{ab}{h}; \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\frac{h}{a}} = \frac{ab}{h}; \tag{12}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}; \tag{13}$$

$$\sin(\beta) = \frac{h'}{c}; \sin(\gamma) = \frac{h'}{b}; \tag{14}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{\frac{h'}{b}} = \frac{bc}{h'}; \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\frac{h'}{c}} = \frac{bc}{h'}; \tag{15}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}; \tag{16}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}; \tag{17}$$

Porque a, b são as hipotenusas dos dois novos triângulos obtidos quando tracei a perpendicular a partir do ponto Q. Tracei a perpendicular partindo do vértice R até encontrar um prolongamento do lado a no

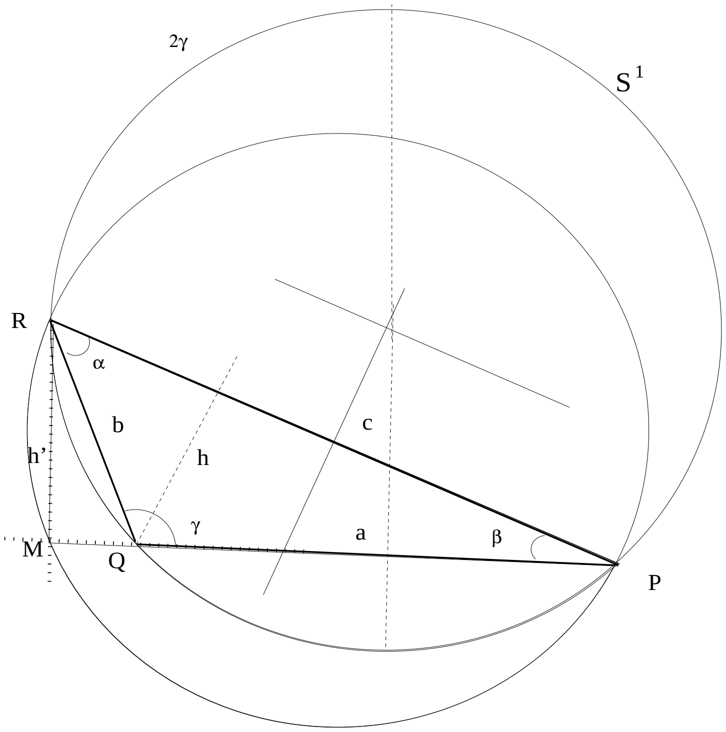

Figura 2: Lei dos senos

ponto M, obtendo assim um novo triângulo retângulo que tem o ângulo β em comum com o triângulo primitivo e altura h', obtendo as equações (eq.15), (eq.16), donde deduzi a (eq.17) usando o mesmo axioma da igualdade já usado no caso anterior.

4 A classificação dos triângulos planos

Eu me referi à três classes de demonstração nas seções anteriores e quero agora estabelecer esta *classificação dos triângulos do plano* que é a base do meu raciocínio anterior.

Como três pontos determinam um círculo, e também, dados três pontos sobre um círculo se tem um triângulo inscrito neste círculo, dado um triângulo qualquer, PQR, confira as figuras (fig. 1), página 1, ou (fig. 2), página 3 em cada uma das quais PQR, determina um círculo.

4.1 As três classes de triângulos

Confira a figura (fig. 3), página 4, na qual desenhei *representantes* das três classes de triângulos do plano,

1. um representante da classe dos *triângulos retângulos*, eles tem sempre como hipotenusa o diâmetro e o terceiro vértice fora do diâmetro, num dos "*hemisférios*" do círculo. Então há duplicidade de representação que posso eliminar usando apenas o "*hemisfério*" inferior do círculo.

2. um representante da classe dos *triângulos obtusângulos*, eles tem todos os vértices no mesmo "*hemisfério*" do círculo e no máximo um sobre o diâmetro. Para eliminar duplicidade de representação eu posso usar apenas o "*hemisfério*" inferior do círculo, mas na figura (fig. 3) eu desobedeci esta regra.

3. um representante da classe dos *triângulos acutângulos*, eles têm um vértice em um dos "hemisférios" do círculo e os dois outros vértices no outro "hemisfério" do círculo, para eliminar duplicidade de representação eu posso sempre considerar os dois vértices no "*hemisfério*" inferior como mostra a figura (fig. 3).

Mas a duplicidade de representação sempre existe, qualquer rotação dos *triângulos acutângulos* que não altere a disposição dos vértices quanto à sua posição relativa aos "*hemisférios*" do círculo ainda é uma representação. Apenas os *triângulos retângulos* ficam sem duplicidade de representação como eu descrevi. Possivelmente haveria uma maneira de evitar a duplicidade nos dois outros casos, mas eu não a encontrei. Todos os triângulos do plano têm um representante no *círculo trigonométrico* $\mathbf{S}^1$, é o teorema seguinte:

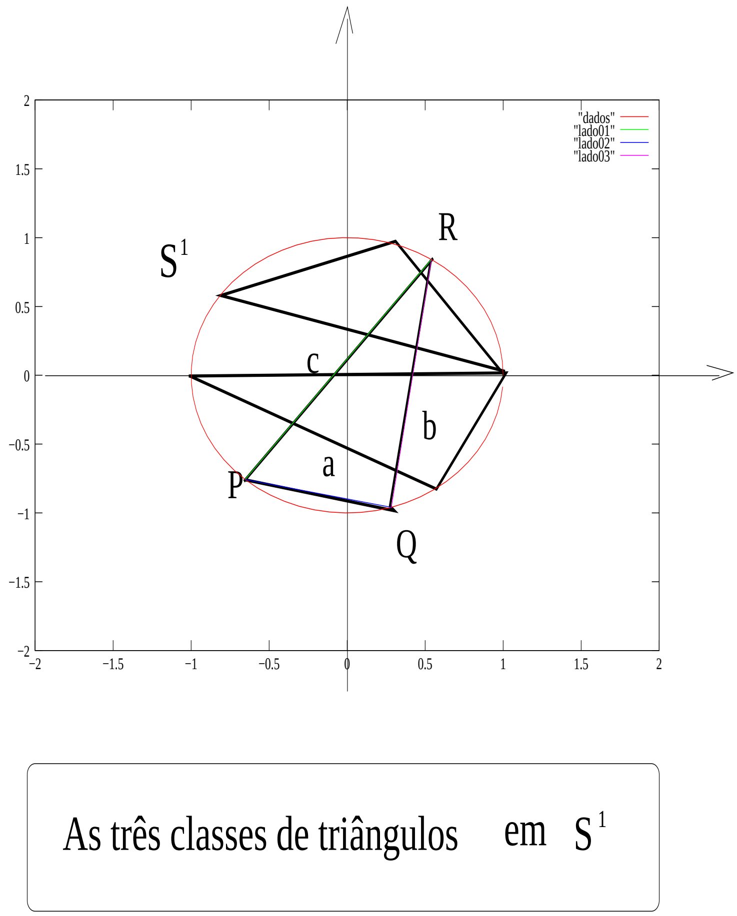

Figura 3: Representantes das classes de triângulos

Teorema **1 (Representação em $\mathbf{S}^1$)** *representante em* $\mathbf{S}^1$

Para qualquer que seja o triângulo PQR, existe uma sua representação inscrita no círculo trigonométrico, $\mathbf{S}^1$, e um número ρ que é o coeficiente de proporcionalidade entre os lados homólogos do triângulo original PQR e sua representação em $\mathbf{S}^1$.

Dem :

Dado um triângulo qualquer PQR, seja $\mathbf{C}$ o círculo de raio R determinado pelos pontos P, Q, R, nesta ordem. Porque três pontos não colineares determinam de forma única um círculo.

mesmo colineares, uma reta é um círculo com raio infinito...

Execute uma operação geométrico-numérica, bijetiva, a homotetia *que é uma modificação em escala, mantendo as mesmas proporções entre os lados da figura original. No caso dos triângulos esta operação consiste em desenhar um prisma de base triangular, tendo o triângulo como base e o vértice no centro do* círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$ *e pegar as interseções das arestas do prisma com a fronteira do* círculo trigonométrico *obtendo a imagem do triângulo original em* $\mathbf{S}^1$. *Se o fator de escala for fixado, esta operação é inversível.*

O resultado desta operação é $\mathbf{S}^1$*, o círculo trigonométrico, com um triângulo inscrito que é semelhante ao triângulo primitivo* PQR*. O coeficiente de proporcionalidade entre os lados homólogos destes dois triângulos é* R*, o raio do círculo primitivo. Confira a figura (fig. 1), página 1, em que o triângulo é acutângulo, mas o raciocínio é o mesmo para outros tipos de triângulo.*

q.e.d .

Eu produzi um programa em `Python`, [1, LeiSeno.py] que desenha um triângulo em $\mathbf{S}^1$ sob sua escolha dos ângulos. O programa contém um erro que eu ainda não consegui corrigir e oxalá alguém o corrija e me passe a solução que eu publicaria com coautoria. Calcula a soma dos ângulos dum triângulo com erro. Ele depende duma classe `Python` citada no mesmo que pode ser baixada [1, ambiente.py] e também depende do `gnuplot`, [2]. A figura (fig. 1) foi obtida com superposição de imagens do programa com auxílio do `xfig` porque o programa gera um arquivo para `gnuplot` que reconhece e grava no formato do `xfig` e assim facilmente eu posso *superpor imagens* editando o arquivo. `xfig` é um editor de imagens vetoriais que vem junto com as distribuições `LinuX` como no caso da que eu uso que é `/Debian/Gnu/LinuX`.

Índice Remissivo

Referências

[1] Tarcisio Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, 2009. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/.

[2] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.