Número real é uma dízima

Praciano-Pereira, T. *

30 de abril de 2020
preprints da Sobral Matemática
no. 2020.06
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Um número real é uma dízima e aqui estou mostrando que as dízimas são sucessões de números racionais que satisfazem ao critério de Cauchy, portanto são as sucessões convergentes de números racionais cujas classes segundo a relação de equivalência definida pelo critério de Cauchy são os números reais.

palavras chave: critério de Cauchy, dízima, números reais.

A real number is a decimal number and here I am giving the proof that decimal numbers are the sequence of rational numbers which meet the Cauchy cryterium and are thus the convergent sequences whose equivalence Cauchy class are the real numbers.

keywords: decimal number, sequence of rational numbers, real numbers.

* tarcisio@sobralmatematica.org

1 Que vou fazer neste artigo

Número real é uma **dízima** que pode ser *periódica*, e então é um *número racional*, ou *não ser periódica*, e então é *número irracional*.

Há um pequeno erro na afirmação anterior que somente vou poder elucidar ao final deste texto, entretanto não custa nada alertá-la, dizendo-lhe qual é o erro mas pedindo que conviva com ele até que seja possível mostrar os detalhes. As *dízimas* são representantes das classes em que os números reais estão dividos. Como no caso dos números racionais, $\frac{1}{3}$ é o *melhor* representante da classe das frações que lhe são equivalentes, porque é uma *fração irredutível*. O mesmo eu vou poder dizer das *dízimas*, e o erro da frase inicial seria equivalente à afirmação "*um número racional é uma fração irredutível*". Um erro corrigido!

Deixe-me dar lhe os dois exemplos:

1. $\frac{1}{3} = 0.3333333 \cdots = 0.(3)$ é uma dízima periódica, com período (3) e você tem no começo a geratriz desta dízima, um número racional,

2. 3.14159265358979323848... que é a *constante de Arquimedes* que eu obtive usando `calc` com 20 casas decimais, é uma aproximação do número irracional π. Não é uma dízima periódica, os dígitos vão se suceder de uma forma "arbitrária" de tal modo que é impossível criar um algoritmo que mostre o termo de ordem n para qualquer valor de n. Não há nenhum padrão repetido. Existem fórmulas que geram os dígitos de π com alguma precisão, mas o valor é sempre *aproximado*.

Um *número real* é uma *dízima*.

O que vou fazer neste artigo é mostrar-lhe uma *solução simples* para um *problema complicado*, que os números reais são os limites das sucessões convergentes de números racionais e desta forma etiquetas para as classes de sucessões equivalentes relativamente ao critério de Cauchy como relação de equivalência.

2 Os métodos na construção dos reais

Há três formas clássicas de construir o conjunto dos números reais partindo dos números racionais como *material primário*, no sentido de que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, o *conjunto dos números racionais* é um *subconjunto do conjunto dos números reais*.

1. os cortes de Dedekind,

2. os intervalos encaixadas, que é bem parecido com os *cortes*, e possivelmente também se deve a Dedekind,

3. as sucessões de Cauchy, que é o meu método preferido porque é baseado na estrutura algébrica que surge de forma natural da estrutura algébrica do conjunto dos números racionais. Nos outros casos é preciso construir a estrutura algébrica em cima dum *conjunto novo* e eu entendo que isto é muito mais difícil de fazer do que o surgimento dum *conjunto novo* oriundo das sucessões de números racionais que já tem uma estrutura algébrica bem justificada, e vou mostrar aqui *como se faz* usando este terceiro método.

Partindo do conjunto $\mathbf{Q}$, como *material primário*, é simples mostrar que existe um novo conjunto $\mathbf{R}; \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, usando uma *intuição geométrica*. Confira os detalhes em *números racionais* mas vou, rapidamente, repetir os passos essenciais aqui. Deixe-me dar um nome ao *conjunto das sucessões de números racionais* uma vez que vou estar sempre me referindo a este conjunto que será o meu material de trabalho. Seja S o *conjunto das sucessões de números racionais*.

Mas usar este método apenas para estabelecer uma representação geométrica do *novo conjunto* e usar esta representação para mostrar, geometricamente, que o novo conjunto contém o conjunto dos números racionais e mais alguma coisa extra que são os *números irracionais*.

3 Representação geométrica de Q

O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais tem as mesmas propriedades da reta na geometria euclidiana:

1. Entre dois "pontos" $x, y \in Q$ sempre tem um ponto no *meio*, embora este conceito, "*meio*", esteja indefinido na geometria euclidiana, ele é considerado um *axioma* o que dispensa uma definição. Em $\mathbf{Q}$ este conceito pode ser melhor apresentado, dizendo-se que dados $x, y \in Q$ qualquer *média* entre eles se encontra no segmento que eles determinam. Aqui, "*entre eles*" pressupõe a existência duma *relação de ordem* inexistente na reta da geometria euclidiana, mas existente em $\mathbf{Q}$. E a relação de ordem de $\mathbf{Q}$ é facilmente transferida para o conjunto das sucessões de números racionais,S. Fiz referência a "qualquer média" porque há distintos tipos de média, *aritméticas, geométricas* ...

2. Dados dois "pontos" $x, y \in Q$ sempre tem um ponto fora do segmento determinado por estes dois pontos, a geometria euclidiana se refere ao segmento de reta determinado por dois pontos. Em que $\mathbf{Q}$ esta regra é mais forte. Posso escolher "$x \leq y$" e afirmar que existe um ponto $t < x$ e um ponto $w > y$,
$$t \leq x < y \leq w; \tag{1}$$

3. Ambas as propriedades podem iteradas garantindo que $\mathbf{Q}$ é infinito entre dois dos seus elementos como fora do segmento que os dois elementos determinam. Esta é uma forma livre de fazer referência à *propriedade arquimediana* que qualquer reta possui, assim como $\mathbf{Q}$.

Estas propriedades permitem que se faça uma *identificação* entre $\mathbf{Q}$ e um *subconjunto de qualquer reta* criando-se o conceito de *reta numérica*.

Acho que está passando do *momento* de dar um nome a este novo conjunto, o *conjunto dos números reais*: $\mathbf{R}$. Qualquer *reta numérica* é um representante de $\mathbf{R}$ e de agora em diante eu vou usar a expressão *reta numérica* como equivalente ao símbolo $\mathbf{R}$ que representa o *conjunto dos números reais*.

A geometria mostra que na *reta numérica* tem pontos que não pertencem a $\mathbf{Q}$, confira a figura (fig 1), página 2, em que posso desenhar uma sucessão de círculos de raio $\sqrt{n}$ que, *com algumas exceções*, é um

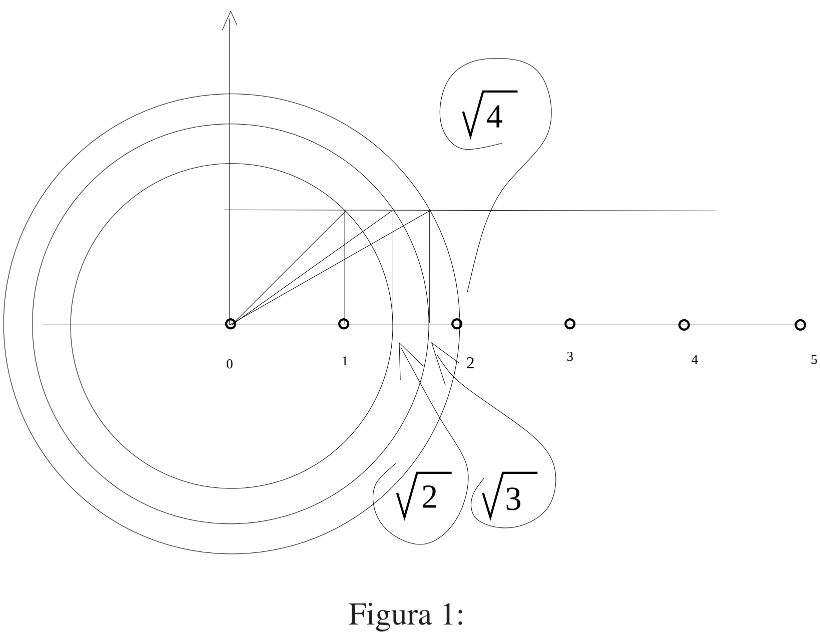

Figura 1:

número irracional. Os círculos oferecem o método de determinação geométrica de $\sqrt{n}$ na *reta numérica*. Se você construir, na figura (fig 1), um triângulo retângulo de altura 1 com o cateto horizontal medindo x a hipotenusa, que é o raio do círculo, vai medir $\sqrt{x^2+1}$ então o círculo com este raio vai encontrar o eixo OX. O último círculo desenhado foi obtido com $x = \sqrt{3}$ que marcou no eixo OX o número 2.

Então a *reta numérica* é uma outra *coisa* diferente de $\mathbf{Q}$, é um novo conjunto que chamei de $\mathbf{R}$.

O exemplo mais comum, e o que aparece na figura (fig 1), página 2, é $\sqrt{2}$ cujo algoritmo cria de forma muito engenhosa uma *dízima não periódica*, embora o algoritmo não sirva como uma prova de que $\sqrt{2}$ é *dízima não periódica*. Esta demonstração é feita por contradição,

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \text{ é uma fração irredutível;} \tag{2}$$

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2; \tag{3}$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ é par ;} \tag{4}$$

$$p^2 \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad p \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad p = 2m; m \in \mathbf{N} \tag{5}$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{4m^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2m^2}{q^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2m^2 \tag{6}$$

$$q^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad q \text{ é par ;} \tag{7}$$

$$p, q \text{ são pares} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} \text{ não é irredutível;} \tag{8}$$

Na equação (eq.8) eu cheguei a uma contradição porque eu parti da hipótese de que $x = \frac{p}{q}$ é uma *fração irredutível*.

Eu comecei dizendo que os *números* eram *dízimas* que se dividiam em duas classes: *dízimas periódicas* e as *dízimas não periódicas*. As primeiras têm uma representação no formato $\frac{p}{q}$ que é a *geratriz* da *dízima*. As *dízimas não periódicas* não admitem uma geratriz porque, como os algarismos aparecem numa sequência imprevisível, é impossível aplicar-lhes o algoritmo da soma dos termos duma progressão geométrica que produz a geratriz no caso das *dízimas periódicas*.

Então na reta numérica tem pelos menos um número, $\sqrt{2}$, que não é uma dízima periódica. Claro, tem uma infinidade, para começar $\sqrt{n}$ como a figura (fig 1), página 2 mostra sempre que n não for um quadrado perfeito, por exemplo, qualquer número primo, portanto uma infinidade. Outros dois exemplos menos intuitivos são π e e que nem mesmo são *números algébricos* coisa que $\sqrt{n}$ é.

Esta linha de raciocínio leva naturalmente ao método de Dedekind para construção dos números reais, mas ela tem o defeito de oferecer uma grande dificuldade para introduzir no novo conjunto os métodos algébricos que existem em $\mathbf{Q}$. Eu vou deixar de lado este método, apenas guardando o fato de que o conjunto $\mathbf{Q}$ tem uma representação geométrica que se chama de *reta numérica*, que é qualquer reta na qual se tenha eleito um *ponto* para representar o *zero* e outro *ponto* para representar 1, definindo, deste modo, as semirretas, *positiva* e *negativa*. O que leva a definir a *ordem* na *reta numérica*. Confira a figura (fig 2), página 3,

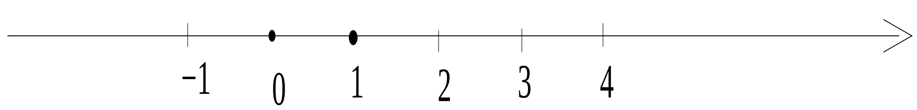

Figura 2: reta numérica

E eu vou aproveitar esta construção geométrica do *novo conjunto* que contém $\mathbf{Q}$ para apresentar-lhe este *novo conjunto* de forma diferente. Mas se você for crítica, deverá estar observando que estou falando de três coisas sem estabelecer a conexão entre elas:

- dízimas,
- pontos da *reta numérica*,
- sucessões de números.

Eu vou fazer, nas próximas seções, esta relação entre estes objetos.

4 dízimas, sucessões de números racionais

Mas como definir as operações neste novo conjunto? Para responder a esta questão é que eu preciso apresentar uma forma de construir o novo conjunto dos números reais aproveitando a estrutura algébrica existente, e conhecida, dos números racionais.

Alguma conexão eu já estabeleci entre *dízimas* e sucessões de números, quando mostrei que posso identificar os números racionais na *reta numérica*, a figura (fig 2), página 3, apresenta os inteiros, mas já fiz menção às médias que preenchem os intervalos entre dois inteiros com frações, as *dízimas periódicas*, e também já mostrei, geometricamente, que algumas *dízimas não periódicas* se encontram na *reta numérica*. Falta-me completar o quadro estabelecendo a estrutura algébrica da *reta numérica*.

- Primeiro mostrando que uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*. O conjunto das *dízimas*, que é $\mathbf{R}$, é um subconjunto de S que é o conjunto de todas as sucessões de números racionais.

$$\mathbf{R} \subset S; \tag{9}$$

  Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um <u>subconjunto próprio</u> de S, e com isto vou chegar ao conceito de *limite*. Este ponto é crítico, a partir dos números racionais, como material conhecido, ou ainda como *material primário* que vou usar para construir o novo conjunto, eu crio um novo conjunto, S das sucessões de números racionais que herdam de maneira natural a estrutura algébrica de $\mathbf{Q}$ e é deste conjunto que eu vou retirar um subconjunto que é o conjunto dos números reais. O processo de escolha é um novo conceito, *limite*. Desta forma eu estou colocando em funcionamento dois processos completamente integrados, a criação dum novo conjunto e apresentação dum novo conceito. Um número real é um limite e com isto eu vou eliminar um doloroso processo que é o estudo das propriedades do limite, são nada mais do que as propriedades dos números reais.

  Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um <u>subconjunto próprio</u> de S, e com isto vou chegar ao conceito de *limite*.

- Depois mostrando que em S está definida uma estrutura algébrica que vai ser então *estampada* em $\mathbf{R}$, deixando o projeto completo.

Sempre que eu *produzir* uma dízima o que estou *produzindo* é uma sucessão

$$\begin{cases} s_0 = 1, s_1 = 1.4, s_2 = 1.41, \dots s_{19} = 1.4142135623730950488, \dots \\ s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19} \in \mathbf{Q}, \dots ; s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19}, \dots) = \sqrt{2}; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = .3, t_2 = 0.33, \dots t_{19} = 0.3333333333333333333, \dots \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19} \in \mathbf{Q}, \dots ; t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19}, \dots) = \frac{1}{3}; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1, \dots, \sigma_k = (-1)^k, \dots ; \\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots \sigma_k \in \mathbf{Q}, \dots ; \sigma = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots); \end{cases} \tag{12}$$

quer dizer que o conjunto de *todas as dízimas* é um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais. Repetindo, uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*, mas *sucessão de números racionais* não precisa ser uma *dízima*. O terceiro exemplo, na equação (eq.12), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima.

Uma dízima é uma sucessão, na equação (eq.10) você tem uma *dízima não periódica* e na equação (eq.11) você tem uma *dízima periódica*.

Mas tem *sucessões de números racionais* que não são *dízimas*, que é o exemplo da sucessão da equação (eq.12), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima. O que diferencia estes dois conceitos no conjunto das sucessões, *dízimas* de *não dízimas* é um novo conceito, *limite*, sobre o qual eu pretendo oferecer-lhe uma introdução aqui. Este conceito é um dos mais difíceis que a estudante encontra quando começa a estudar a Matemática superior.

Mas fique alerta, "*difícil*" não é sinônimo de "*impossível*"! Aquilo que é difícil, o é porque representa um salto no conhecimento. Sim, o conhecimento é feito de saltos, nem sempre os dados se conectam facilmente. E *limite* representa um destes saltos. Mais a frente eu vou voltar a discutir o *salto lógico* que representa a passagem de $\mathbf{Q}$ para $\mathbf{R}$, e ele representa este salto do conhecimento que você pode encontrar procurando pela palavra chave *salto de cardinalidade*. Quem descobriu este salto foi o matemático Cantor e que, ao morrer, começava a duvidar de sua descoberta que somente ficou devidamente esclarecida 100 anos depois num grande esforço que foi feito na década de 40 para entender os fundamentos da Matemática que estavam seriamente desestruturados por várias correntes de pensamento. Está é uma outra história que merece um artigo a parte.

Para romper este salto eu vou usar duma estrategia, dos exemplos de onde eu vou tirar a teoria. A Matemática é uma linguagem, e a melhor maneira de aprender uma linguagem é pelos exemplos, foi assim que você aprendeu a falar a sua língua materna, talvez português, como é o meu caso.

rimeiro eu vou definir um tipo particular de *limite*, na verdade uma *classe de limites*. Não se assuste com esta referência a uma *classe*, lembre-se que um número racional, uma fração, é uma classe:

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{2}{6} \equiv \frac{10}{30} \dots \tag{13}$$

e você convive muito bem com as classes de números racionais. A primeira fração que eu escrevi desta classe de números racionais, $\frac{1}{3}$ é um *representante* desta classe, a *fração irredutível* da classe. Mas todas as outras são tão boas como a primeira. Quer dizer que existe uma infinidade de representações para $\frac{1}{3}$, e você convive perfeitamente com isto. O conjunto dos números reais é formado também de classes e é o *limite* que caracteriza cada uma das classes, e agora eu vou apresentar-lhe a classe do zero, o limite zero.

5 O limite zero

A palavra chave agora é *convergir*, que é quase que um sinônimo de *limite*. Eu vou definir a *classe das sucessões de números racionais que convergem para zero*. Começo com a definição de convergência para zero e mostro que o conjunto de tais sucessões não é vazio e tem uma estrutura algébrica interessante.

Eu vou usar esta classe para definir um tipo particular de *limite* que vai me permitir a construção da teoria dos limites que é necessária ao Cálculo Diferencial e Integral.

Deixe-me começar com um exemplo do qual vou tirar todos os dados para fazer uma definição.

$$t = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots); t_k = 0; \tag{14}$$

$$s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}; \left\{ \begin{array}{lll} k > 0 & \Rightarrow & s_k = \frac{1}{k}; \\ k = 0 & \Rightarrow & s_0 = 0; \end{array} \right. \tag{15}$$

A sucessão identicamente nula definida na equação (eq.14) é um exemplo de sucessão que converge para zero, é a sucessão constante zero. Um outro exemplo de sucessão que converge para zero está definida na equação (eq.15). em que eu incluí uma *regra de proteção* para o índice $k = 0$, entretanto a definição poderia ser arbitrária, porque o que interessa numa sucessão é o seu *comportamento para grandes valores do índice* e chama-se isto de *comportamento assintótico*.

Na figura (fig 3), página 6, cola você pode ver o gráfico da sucessão definida na (eq.15). Nela você também pode ver retas horizontais marcando a abertura dum "*paquímetro*" com diâmetros $d \in \{1, 0.5, 0.2, 0.1\}$, a última "*abertura*" ficou pouco visível.

Paquímetro é o instrumento que você pode ver na figura (4), página 7. É um instrumento de alta precisão que serve para medir os diâmetros, interno ou externo, de figuras cilíndricas e usado pelos *torneiros mecânicos*.

coisa que uma br
diu com encanado
Presidente Lula
é *torneiro mecâni*

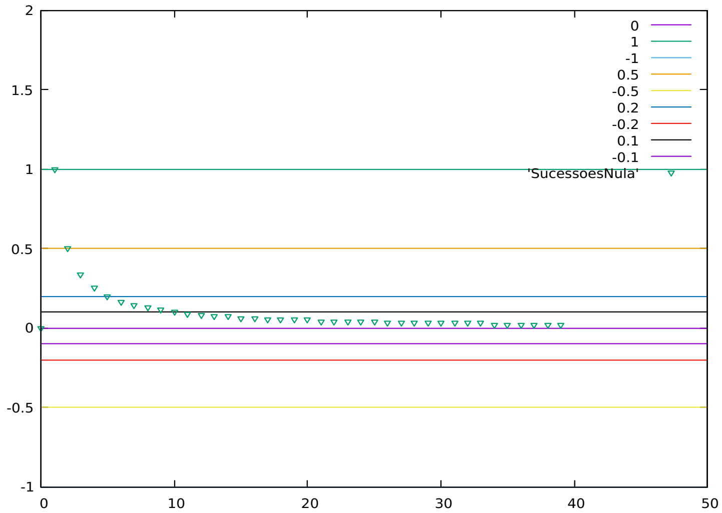

Figura 3:

Aqui eu estou usando um paquímetro para determinar quando

$$|s_k| < \epsilon; \epsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}; \tag{16}$$

e você pode verificar na figura

1. $\epsilon = 0.5$ vale para todo $k > 2$;
$$k > 2 \quad \Rightarrow \quad |s_k| < 0.5 = \epsilon;$$
2. $\epsilon = 0.2$ vale para todo $k > 5$;
$$k > 5 \quad \Rightarrow \quad |s_k| < 0.2 = \epsilon;$$
3. $\epsilon = 0.1$ vale para todo $k > 10$;
$$k > 10 \quad \Rightarrow \quad |s_k| < 0.1 = \epsilon;$$

Procure entender as "*traduções*" que eu fiz de cada sentença nos três casos que eu considerei. É esta *tradução* que eu vou usar na definição.

Eu estou querendo determinar a partir de qual índice k é verdade que "$|s_k| < \epsilon$" e a figura me mostra três respostas para esta indagação.

Agora vou fazer a a definição de *sucessão que converge para zero* usando a experiência com sucessão da equação (eq.15).

Definição 1 (sucessão) *que converge para zero Seja $s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que*

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k| < \epsilon)\,; \tag{17}$$

Então s_k converge para zero e se usa a notação

$$s_k \to 0; \tag{18}$$

para indicá-lo. Há também outra notação sobre a qual vou fazer comentários mais adiante. erro! corrigido!

O exemplo da equação (eq.15) me deu as três respostas listadas acima, mas não provou nada. Mas logo eu fazer esta demonstração.

Geometricamente, melhor dizendo, "*figurativamente*", se você pegar um *paquímetro*, cuja imagem você pode ver na figura (4), página 7, você pode estabelecer uma abertura ϵ, como estabelece a definição e percorrer o gráfico duma sucessão até encontrar o índice K, a partir do qual a sucessão fica confinada numa faixa de raio ϵ em volta do eixo OX como mostra a figura (fig 4), página 7. Lembre-se, o *paquímetro* serve para determinar *diâmetros*, aqui estou usando para encontrar a *largura* ϵ duma faixa em que os termos da sucessão ficam confinados a partir de um índice K. Se isto for possível, para qualquer que seja ϵ, você obteve

$$(k > K \ \ \Rightarrow \ \ |s_k| < \epsilon)\,; \tag{19}$$

você encontrou o índice K que corresponde à abertura ϵ e a partir de K todos os termos da sucessão ficam confinados numa faixa de largura ϵ.

Agora eu preciso ter uma demonstração de que afirmação vale para valores arbitrário de ϵ, então a sucessão se encontra no conjunto S_0. Preciso demonstrar por que exemplos nada provam.

Vou fazer *demonstrações*, e vou começar com exemplos simples para que você compreenda a *razão da coisa*. Deixe-me provar que a sucessão do exemplo apresentado na (eq.15) pertence ao conjunto S_0.

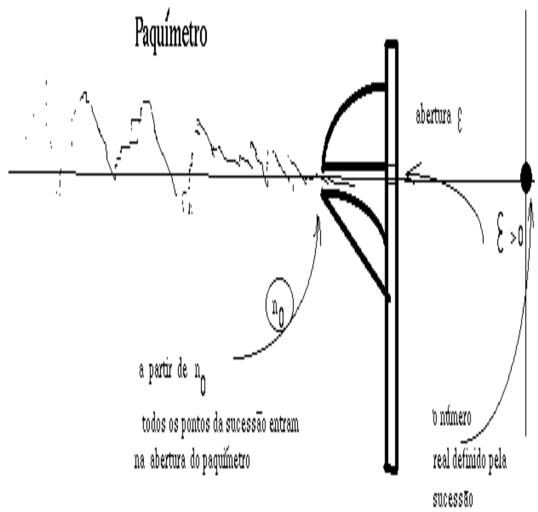

Figura 4: paquímetro e uma sucessão nula

$$\tfrac{1}{k} < \epsilon \ \ \Rightarrow \ \ k > \tfrac{1}{\epsilon}; \tag{20}$$

$$K = \lfloor \tfrac{1}{\epsilon} \rfloor; \tag{21}$$

$$k > K \ \ \Rightarrow \ \ |\tfrac{1}{k}| < \epsilon \tag{22}$$

Então $K > \frac{1}{\epsilon}$, entretanto eu procuro o *menor inteiro* que satisfaz esta condição, porque eu preciso especificar um inteiro a partir do qual fica garantido que s_k entra dentro da faixa de raio ϵ que fica em volta do eixo OX porque estou definindo quando s_k tem limite zero.

Deixe-me trocar em miúdos o conteúdo da sentença da equação (eq.21). Você viu na figura (fig 3)

$$k > \frac{1}{0.5} = 2 \ \ \Rightarrow \ \ \frac{1}{k} < 0.5 \tag{23}$$

mas nem sempre $\frac{1}{\epsilon}$ é um número inteiro e os índices das sucessões são números inteiros é por isto que eu preciso estipular o *menor inteiro que seja maior ou igual* $\frac{1}{\epsilon}$ que é o conteúdo da notação $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$. A maioria das linguagens de programação entendem este símbolo da Matemática que elas chamam de `ceil`, que significa *teto* em inglês, na *linguagem do império*.

- O menor inteiro que é maior ou igual a 0.5 é 1
- O menor inteiro que é maior ou igual a 1.5 é 2
- O menor inteiro que é maior ou igual a 2.5 é 3
- O menor inteiro que é maior ou igual a 3.5 é 4
- O menor inteiro que é maior ou igual a 4.5 é 5
- O menor inteiro que é maior ou igual a 5.5 é 6

- O menor inteiro que é maior ou igual a 6.5 é 7
- O menor inteiro que é maior ou igual a 7.5 é 8
- O menor inteiro que é maior ou igual a 8.5 é 9
- O menor inteiro que é maior ou igual a 9.5 é 10
- O menor inteiro que é maior ou igual a 10.5 é 11
- O menor inteiro que é maior ou igual a 11 é 11

para obter estes exemplos eu rodei o comando

```
for(k=0.5;k<11; k++) {
print "
item O menor inteiro que é maior ou igual a ",
"é ", ceil(k)
}
```

num terminal, executando `calc`. O último exemplo, como o número 11, eu acrescentei manualmente! Mas bastava acrescentar um `if()` para obter tudo automaticamente e depois apenas raspar e colar dentro do editor.

Na prática esta definição me permite encontrar uma *aproximação* para o *valor assintótico* que a sucessão representa, quer dizer um valor que eu posso colocar no lugar de $s_k = \frac{1}{k}$ para ser usado como *representante* para esta sucessão com um erro da ordem ϵ.

Esta frase não é fácil, e ela representa um primeiro passo para a compreensão do limite que Richard Courant dizia que "*era o limiar do ensino superior*, e ele falava isto em 1940…Continua ainda sendo a porta de entrada para o Cálculo. Se você passar por esta porteira o resto é bem mais simples. E eu vou justificar isto ao longo deste texto.

O que me interessa numa *sucessão que convirja para zero* é que ela tenha *propriedades*, e isto quer dizer, satisfaça a sentenças que possam ser traduzidas para um programa de computador que, pelo menos, mostrem graficamente a relação K, ϵ para um valor de ϵ estipulado.

Foi o que usei para obter dois dos gráficos que aparecem neste texto que foram produzidos com auxílio de duas linguagens de programação, `calc`,[1] para fazer as contas, e `gnuplot`, [3], para produzir os gráficos. O programa que usei para obter estes gráficos pode ser baixado de [2, SucessoesNulas.calc].

O caso destes dois gráficos é um exemplo simples da *intrínsica praticidade* que tem o *formalismo matemático*.

Não somente para eu possa traduzir para um programa de computação, mas eu preciso de *sentenças* que caracterizem logicamente o conjunto que eu quero definir que eu preciso escrever formalmente para usar tanto em demonstrações como em programas de computação.

Vou estabelecer isto de forma algébrica. Como já dei dois exemplos de tais sucessões, posso tranquilamente falar que existe um conjunto de tais sucessões e dar-lhe um nome.

$$S_0 = \{s; s \text{ sucessão que converge para zero}\}; \tag{24}$$

e os dois exemplos acima mostram que $S_0 \neq \emptyset$

6 Propriedades do conjunto S_0

1. Para todo número $K \in \mathbf{Q}$, se $s \in S_0 \quad \Rightarrow \quad Ks \in S_0$.

   E que significa esta afirmação? Significa que o conjunto S_0 é estável por multiplicação: $KS_0 \subset S_0$ para qualquer número racional K.

   E aqui eu posso falar baixinho um segredo, $K * 0 = 0$? Sim, eu vou querer depois definir S_0 como a *classe do zero*! É isto que é *limite*, são *classes de equivalência* que definem números.

2. $s, t \in S_0 \quad \Rightarrow \quad s + t \in S_0$ que significa que S_0 é fechado para adições. Isto já começa a fornecer uma estrutura algébrica ao conjunto S_0. Pode ser que $(S_0, +)$ seja um *grupo* com a operação de adição. A propriedade anterior confirma, porque se $s \in S_0$ então $-s \in S_0$ tomando agora $K = -1$. Quer dizer que todo elemento em S_0 tem um inverso aditivo.

   Olha o segredo: $0 + 0 = 0; -0 = 0; K * 0 = 0 \ldots$

3. A propriedade comutativa é nata, uma vez que estarei somando sucessões de números racionais, assim como as propriedades associativa e distributiva. Repetindo a soma de sucessões é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* do produto em relação à soma. Com isto cheguei a que $(S_0, +)$ é um *grupo* comutativo. Confira a definição de *grupo*, mas é a mesma estrutura que tem $(\mathbf{Z}, +)$ que é um *grupo*.

4. Se $s, t \in S_0 \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon$ quando eu escolher $\epsilon < 1$, para um valor máximo das escolhas de K que satisfizerem à condição para cada uma das sucessões s, t. Esta frase ficou complicada! Para cada uma das sucessões s, t e tenho índices K_1, K_2 que eu posso colocar na definição de limite e garantir que

$$|s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon \tag{25}$$

   mas considere o maior dos dois K_1, K_2 e chame-o de K e agora vale

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon; \tag{26}$$

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon; \tag{27}$$

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon; \tag{28}$$

   *E*sta explicação extra que dei agora é um exemplo interessante, os autores muitas vezes atropelam as leitoras tirando conclusões curtas como eu fiz, antes de me corrigir. Desconfie sempre que você não entender um texto de Matemática, muito provavelmente o autor está atopelando-a, tente *abrir as contas* que é uma gíria muito usada entre os estudantes de Matemática quando encontram um resultado meio complicado. É porque ficaram escondidos os passos intermediários. Abra as contas!

   ntão $(S_0, \cdot)$ é fechado para multiplicação isto faz com que $(S_0, +, \cdot)$ seja um anel. Ou seja este conjunto de sucessões que convergem para zero é uma estrutura algébrica semelhante à $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

   E porque eu fiz a restrição $\epsilon < 1$? Porque interessa-me garantir que $s \in S_0$ então s é uma sucessão assintoticamente pequena, quer dizer, na desigualdade

$$|s_k| < \epsilon; \tag{29}$$

   eu vou precisar de escolher valores pequenos para ϵ.

   E olha o segredo, $S_0 * S_0 \subset S_0; 0 * 0 = 0;$

7 Definição geral de limite

O maior sucesso de S_0 consiste em que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é um conjunto de sucessões que "*convergem para r*" que é a próxima definição. Esta frase é incomum nos textos de Matemática, ninguém costuma fazer previsões antes de estabelecer a definição, mas acho que cria um suspense pedagógico fazer desta maneira. Quero mostrar que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é o conjunto da sucessões que convergem para r e preciso agora definir o que significa uma sucessão convergir para r, o que vou fazer alterando a definição de convergência para zero. Depois vou voltar para provar que $S_0 + r$ é *o conjunto das sucessões que convergem para* r.

O trágico quando construímos Matemática e que nos vem ideias brilhantes, que funcionam, apenas não sabemos depois como prouzí-las na prática, entretanto este é um item irrelevante para a Matemática. Neste caso eu simples não como calcular $S_0 + r; r \notin \mathbf{Q}$! Isto vai me forçar a encontrar outra saída.

Na busca desta saída eu vou agora definir limite expandindo a definição de limite zero, se achar complicado, leia logo o comentário que se segue à definição.

Definição 2 (sucessão) *que converge para $r \in \mathbf{Q}$ Seja $s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que*

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(k > K \quad\Rightarrow\quad |s_k - r| < \epsilon)\,; \tag{30}$$

Eu defini a convergência para $r \in Q$, porém, como incluir nas contas $r \notin Q$? Esta é uma *dificuldade psicológica* de quem está passando inicialmente pelo estudo do limite. Se estou "*construindo*", como posso fazer uso dum elemento de um conjunto que ainda não está construído? o que significa $r \notin Q$ nesta definição. Isto é mais do que um problema psicológico, é um problema de lógica. Deixe-me mostrar uma alternativa e desarme sua mente se souber que ela é difícil. Aliás, não espere nada fácil em Matemática, mas lembre-se que Matemática é uma construção de seres humanos, como você. E o que for difícil apenas exige mais concentração e trabalho, nada é *impossível*. erro! corrigido!

Se $r = \sqrt{2}$ ainda poderia ser possível fazer algumas contas alterando a expressão $|s_k - \sqrt{2}| < \epsilon$ para encontrar

$$k > K \quad\Rightarrow\quad |s_k - \sqrt{2}| < \epsilon \tag{31}$$

mas, se $r = \pi$ ficaria complicado! Avançando no curso de Cálculo você vai encontrar fórmulas que lhe vão permitir calcular um pedaço da dízima que fornece uma aproximação par π mas ainda assim vai ser trabalhoso operar com a desigualdade, dado um erro ϵ.

Preciso encontrar uma alternativa, e ela existe, e está no ponto de apresentá-la.

Exemplos sempre mostram o caminho para construir a teoria. Deixe-me começar com

$$r = \tfrac{4}{3} = 1.33333333333333333333\ldots \tag{32}$$
$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \tag{33}$$

acompanhe as contas

$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \tag{34}$$
$$s_{40} = 1.3333333333333333333333333333333333333333; \tag{35}$$
$$|s_{40} - s_{20}| = 0.0000000000000000000033333333333333333333 < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{36}$$
$$|s_{40} - s_{20}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{37}$$
$$|s_{40} - s_{2000}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{38}$$
$$|s_{40} - s_{2000000}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{39}$$

você precisa ler os cálculos feitos nas equações (eq.36)- (eq.39) para entender o que vou agora comentar. O *erro* ao considerar o limite de s como sendo $s_{20} = 1.33333333333333333333$ é menor do que $\frac{3}{10^{21}}$.

Repetindo, $\frac{4}{3} \neq 1.33333333333333333333$ mas tomar 1.33333333333333333333 em lugar de $\frac{4}{3}$ representa cometer um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Claro, $\frac{4}{3} \in \mathbf{Q}$ e nós sabemos, os computadores sabem, fazer contas com este símbolo. O que *nem os computadores* e *nem nós* sabemos é fazer contas com π. E é esta a razão deste texto. Como é que vamos *falar com os computadores* e lhes passar um valor para π, ou qualquer outro número que não seja racional? A única forma de fazê-lo é passando um *valor aproximado* como

$$\frac{4}{3} \approx 1.33333333333333333333; \tag{40}$$

Repetindo, no caso dos números racionais eu posso passar a um programa de computador o seu valor exato $\frac{p}{q}$ que também é um valor simbólico. No caso de π eu tenho que usar

$$\pi \approx 3.14159265358979323848 \tag{41}$$

sabendo que estou cometendo um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Observe que eu *sei* que estou cometendo um erro desta ordem, o que ainda significa que eu tenho o controle do erro que estou cometendo. Isto ainda quer dizer que *sei* qual é o limite duma sucessão de números racionais que se *aproxima* de π e posso parar o processo algorítmico do cálculo de π quando for atingida a precisão que eu precisar.

Estes cálculos me deixam no ponto de mostrar-lhe o método para verificar se uma sucessão tem limite ou não, se ela é convergente ou não e finalmente se for convergente como tomar decisão pela escolha dum valor aproximado. As diferenças $|s_m - s_n|$ é que vão controlar a escolha de m como o ponto de decisão e então o limite $r \approx s_m$ e assim eu cheguei no *critério de Cauchy* para determinação de duas coisas:

1. se s_n é convergente,
2. a decisão de quando parar o algoritmo quando a precisão atingida for a desejada.

É raro um autor se referir ao *critério de Cauchy* como um *método prático de aproximação*. Usualmente ele é apresentado como um *método teórico*, o que ele é, mas é importante o seu aspecto de determinação da aproximação desejada, ou necessária. Deixe-me enunciar o *critério de Cauchy* que é simples reformulação das contas que eu fiz nas equações (eq.36)- (eq.39).

critério de Cauchy é uma condição de existência!

Definição 3 (critério) *de Cauchy*

$$(\forall\epsilon)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(m,n > K \;\;\Rightarrow\;\; |s_m - s_n| < \epsilon) \;\;\Longleftrightarrow\;\; s_n \; \textit{converge}; \tag{42}$$

A sucessão s converge se e somente se satisfizer ao critério de Cauchy.

Um erro! Corrigido!

Observe que o *critério de Cauchy* garante que a sucessão *converge* mas fica *silencioso* a respeito do valor do limite. Quando o *critério de Cauchy* for verificado, então eu sei que qualquer um dos dois valores s_m, s_n podem ser usados como uma aproximação para o valor do limite com a *garantia* de que o erro cometido é da ordem de ϵ.

O critério de Cauchy é uma garantia de que o limite existe, ele estabelece quando um sucessão é convergente. É ele que divide as sucessões em duas grandes classes: a *classe das sucessões convergentes*, aquelas que definem *dízimas* e a *classe das sucessões divergentes*, aquelas que não definem *dízimas*.

Deixe-me dar-lhe um exemplo usando $\frac{4}{3}$, *exatamente* porque eu sei tudo a respeito deste símbolo. s_n é a dízima periódica que aparece na (eq.40). Eu quero que o erro máximo envolvido com uma aproximação seja 0.1 *para ser modesto...*

$$|s_m - s_n| < 0.1 = \epsilon; \tag{43}$$

$$|1.33333333333333333333 - 1.3| = 0.03333333333333333333 < 0.1; \tag{44}$$

então $s_1 = 1.3$ é o *valor do limite* com um erro $\epsilon = 0.1$, bem modesto.

Observe que eu evitei de usar os exemplos com π porque o algoritmo para determinar as decimais desta dízima é bem complicado e mais adiante, no Curso de Cálculo você irá encontrá-lo quando estiver estudando integral. Neste momento seria difícil de fazer uso deste exemplo.

Agora eu posso redefinir S_0, como o conjunto de todos os elementos do anel das sucessões convergentes que têm limite zero. É a classe das sucessões de Cauchy que definem o zero. $\pi + S_0$ é a classe das sucessões de Cauchy que definem π, apenas eu não sei fazer esta conta.

Então eu vou encontrar uma saída bem a gosto dos Matemáticos que adoram brincar de *faz de contas*. Vou fazer de contas que eu sei, e é incrível como este método funciona, e por isto que Matemática é uma grande diversão, que infelizmente também serve para os banqueiros colocarem para funcionar o vídeo-game que eles chamam de *mercado*.

Vou fazer exatamente a mesma coisa que se faz com os números racionais, com as frações, se define uma relação de equivalência. Agora vou usar o *critério de Cauchy* que é uma relação de equivalência.

Definição 4 (critério) *Cauchy como relação de equivalência Considere duas sucessõess*$, t$ *se*

$$(\forall \epsilon)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(n, m > K \quad \Rightarrow \quad |s_m - t_m| < \epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad s \equiv t; \tag{45}$$

As duas duas sucessõess$, t$ *são equivalentes à Cauchy. Se uma delas for convergente, a outra também será e terão o mesmo limite, ou melhor, definirão o mesmo número real. Se uma delas for divergente, a outra também será.*

Agora S_0 é a classe do zero, é uma classe de equivalência desta relação recém definida. É uma classe de sucessões de Cauchy de números racionais. Embora esta definição possa, inicialmente, parecer esdrúxula, é precisa e exata. Compare com um número racional, que também é uma classe frações equivalentes, embora não seja isto dito com frequência. Em geral se diz, erradamente, que um número racional é uma fração $\frac{p}{q}; q \neq 0$, quando na verdade é uma classe de equivalência de tais frações.

Da mesma forma um número real é uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy um dos exemplos mais fáceis é o caso de *raiz de dois*.

π pode ser obtido de forma muito rudimentar com uma definição geométrica que os gregos tonaram muito conhecida, é mais simples do que $\sqrt{2}$, porque uma aproximação para π pode ser obtida com polígonos regulares convexos inscritos num círculo de raio 1, a sucessão dos perímetros destes polígonos é uma sucessão crescente para o limite que é π. Outra forma de obter uma aproximação para π é com polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio 1, resulta numa sequência decrescente para o limite que é π. Aqui você vê duas sucessões de Cauchy, que têm o mesmo limite, consequentemente duas sucessões de Cauchy equivalentes, dois exemplos da classe designada pelo símbolo π.

Na figura (fig 5), página 12, você pode ver duas sucessões, uma decrescente e a outra decrescente que

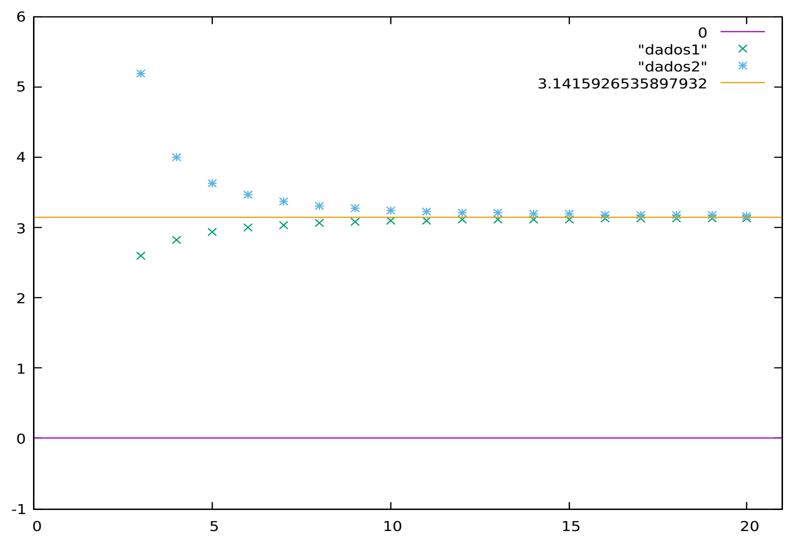

Figura 5:

convergem para π. Elas foram obtidas considerando os perímetros de poligonos regulares circunscritos e inscritos. Este é um exemplo corrupção lógica, o programa que rodei usa π para calcular o perímetro dos polígonos e naturalmente esta não pode ser uma forma de construir uma sucessão que convirja para π. Mas como já disse, avançando no estudo das integrais você vai encontrar uma que fornece um algoritmo para calcular a constante de Arquimedes. Na figura (fig 5), a linha horizontal cheia representa a dízima π.

O programa você encontra em [2, NumerosReais.calc].

Qualquer sucessão convergente de números racionais é uma sucessão de Cauchy. Outra forma de dizer isto é *toda dizima* é um sucessão de números racionais congergente definindo um número real.

Para $\sqrt{2}$ se pode usar o algoritmo do cálculo da raiz escolhendo-se ora uma casa inferior ora uma cada superior, no algoritmo, para obter duas sucessões equivalentes que convergem para $\sqrt{2}$,

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \dots \tag{46}$$
$$2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, \dots \tag{47}$$

Esta é uma introdução à construção dos números reais, uma das três mais conhecidas que é a minha preferida: via sucessões de Cauchy. Fazendo uma rápida defesa das *sucessões de Cauchy*, ou melhor do *teste de Cauchy*, este teste provê uma aproximação para um número real com o erro estipulado ϵ:

$$\forall \epsilon > 0; \exists K \in \mathbf{N}; \tag{48}$$
$$n, m > K \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x_m\| < \epsilon \tag{49}$$

querendo parar o processo de construção dum número real com precisão ϵ basta descobrir $K \in \mathbf{N}$ do teste de Cauchy, então qualquer $x_n; n > K$ é uma ϵ aproximação para o número real procurado. Portanto um método prático e não um difícil método teórico como algumas vezes é pintado o método de Cauchy.

Os passos desta construção eu vou apenas mencionar como uma lista de exercícios, não muito fáceis, para a leitora interessada:

1. O conjunto de todas as sucessões de números racionais, seja S este conjunto, é uma álgebra com divisores de zero. Dê pelo menos um exemplo de divisor de zero.

2. O conjunto de todas as sucessões que convirjam para zero (logo sucessões de Cauchy) é um *ideal maximal* da álgebra S. Deixe-me chamar este ideal maximal de S_0.

3. O quociente por um ideal maximal, numa álgebra, é um corpo, neste caso o corpo dos números reais: $S/S_0 = \mathbf{R}$.

Uma das consequências desta construção são as propriedades do *limite* que se tornam óbvias neste contexto e praticamente impossível de serem demonstradas, como se pretende, no Cálculo Diferencial e Integral a não ser que os exercícios acima sejam feitos.

8 Uma notação do limite

Eu fujo fortemente da regra no que diz respeito à notação do *limite*. Para começar o próprio conceito de limite deve ser discutido. O *limite* é um *operador* que se aplica a distintos tipos de função e você vai ver isto ao longo do Curso de Cálculo. No caso das sucessões, que são funções cujo domínio é o conjunto $\mathbf{N}$, interessa-me saber qual é o comportamento assintótico duma sucessão que é o seu *valor* no ∞. Se ela tiver um valor no ∞, quer dizer que *ela tem limite* ou ainda é convergente.

Então a notação que eu uso é

$$s \in S_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k=\infty} s_k = 0; \tag{50}$$
$$\lim_{k=\infty} 1.333\cdots = 1.(3) = \tfrac{4}{3}; \tag{51}$$
$$\lim_{k=\infty} 3.1415926\cdots = \pi; \tag{52}$$

são exemplos do valor do operador *limite* atuando sobre algumas das dízimas conhecidas.

9 Porque Cantor morreu doido

Foi Cantor que descobriu o *salto de cardinalidade* e que tentou demonstrá-lo sem sucesso e nem mesmo convencer os matemáticos de sua época de havia um salto de cardinalidade, a tal ponto que ao final da vida nem mesmo ele acreditava em sua descoberta. Morreu doido!

Se um conjunto S tiver $n \in \mathbf{N}$ elementos, então o *conjunto das partes* de S, $\mathbf{P}(S)$ terá 2^n elementos. Isto é uma consequência imediata do binômio de Newton que descreve em cada linha as combinações de n elementos tomados $p - a - p$ porque dado um conjunto com n elementos os seus subconjuntos são as combinações dos seus elementos. Em outras palavras *combinação* é sinônimo de *subconjunto*.

Mais,

$$S \subset \mathbf{P}(S) \tag{53}$$

subconjunto próprio valendo logo para o $\emptyset$.

Uma sucessão é um *arranjo* dos elementos do conjunto de chegada contendo portanto todas as combinações dos elementos do conjunto de chegada como um subconjunto próprio então o conjunto S das sucessões de números racionais contém como subconjunto próprio o conjunto $\mathbf{Q}$ e contém também como subconjunto próprio $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$.

Cantor descobriu que a cardinalidade de $\mathbf{Q}$ e de $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ eram distintas e que, se eu pudesse escrever a desigualdade sem sentido

$$card(\mathbf{Q}) < card\mathbf{P}(\mathbf{Q}) \tag{54}$$

não havia nenhum conjunto com cardinalidade intermediária. Portanto havia um salto de cardinalidade. Na verdade a *cardinalidade* é uma classificação das *complexidades*. Eu entendo que cardinalidade e complexidade se equivalem. Cantor não conseguiu uma demonstração para sua descoberta e nem mesmo conseguiu convencer a ninguém que tal salto existia. Foram precisos passar 100 anos para que Paul Cohen completando a tese de Gödel e estabelecendo que não é possível ter em Matemática uma única teoria dos conjuntos e sim pelo menos duas, uma delas é a chamada teoria dos conjuntos de ZFC (Zermelo-Fraenkel). Na teoria dos conjuntos de ZFC o salto de cardinalidade é um axioma que Cantor estava tentando demonstrar.

É o que Richard Courant sentia e expressou dizendo que *limite*, quer dizer, *número real* era o limiar da Matemática Superior. Em boa parte é isto que torna tão difícil provar as propriedades do limite, na verdade o que se está tentando provar são as propriedades dos números reais que eu aqui contornei produzindo $\mathbf{R}$ a partir dum conjunto que tem uma estrutura algébrica bem estabelecida e de fácil demonstração. $\mathbf{R}$ herda as propriedades de $\mathbf{Q}$ deixando de existir uma coisa chamada *propriedades do limite* que são simplesmente as propriedades de $\mathbf{R}$.

Finalizando, a cardinalidade de $\mathbf{R}$ é um novo salto na escala de cardinalidades que é chamada de c a cardinalidade do contínuo.

Índice Remissivo

$\mathbf{R}$
  números reais, 2

algébrico
  número, 3
arquimediana
  propriedade, 2
assintótico
  comportamento, 5

cardinalidade
  complexidade, 14
  de $\mathbf{R}$, 14
  do contínuo, 14
    c, 14
  salto de, 5, 14
Cauchy
  critério de, 11
  sucessão de, 13
  teste de, 13
classe das
  sucessões convergentes, 11
  sucessões divergentes, 11
Cohen
  Paul, 14
complexidade
  cardinalidade, 14
critério
  de Cauchy, 11

Dedekind
  cortes, 1
dízima
  não periódica, 1
  número real, 1
  periódica, 1
dízimas
  limite, 4

equivalência
  critério
    de Cauchy, 12
erro
  Foi corrigido, 11
existência
  condição, 11

figura
  π, 12
  $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, 2
  converge
    para zero, 6
  paquímetro
    sucessão nula, 7
  reta numérica, 3
formalismo
  praticidade, 8

geratriz, 3
Gödel, 14

ideal
  maximal, 13
intervalos
  encaixados, 1
irracional
  número, 1

lógica, 14
limite, 4, 5
  dízimas, 4
  propriedades, 13
  valor
    no ∞, 13
linguagem
  do império, 7

mercado
  vídeo-game, 12
média, 2

número
  irracional, 1
  racional, 1
  real
    dízima, 1
    irracional, 1
    racional, 1
número real, 1

propriedades
  do limite, 14

relação

de equivalência
critério de Cauchy, 1
relação de ordem, 2
reta numérica, 2, 3

salto
de cardinalidade, 14
sucessão
converge para zero, 6, 10
sucessões
de Cauchy, 1

teoria dos conjuntos
de ZFC, 14

Zermelo-Fraenkel, 14

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[3] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.