O Teorema da Função Implícita e Equações Diferenciais Exatas

Ana Paula da Silva

Curso de Matemática
Universidade Estadual do Vale do Acaraú
2006

O Teorema da Função Implícita e Equações Diferenciais Exatas

Monografia apresentada à
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA,
como requisito parcial para colação de grau em
Licenciatura Plena em Matemática.

Ana Paula da Silva
Monografia aprovada em

Orientador: Prof. Tarcisio Praciano Pereira

1ºExaminador: Júlio Wilson Ribeiro

2ºExaminador: Márcio Nascimento da Silva

Prof. José Rodrigues Neto - Coordenador do Curso

SOBRAL - CEARÁ
2006

Agradecimentos

Aos meus queridos pais que tanto lutaram para que eu concluísse o curso.
Aos meus professores pelos ensinamentos que levarei por toda a vida.
Ao professor Tarcisio Praciano Pereira, por sua paciente
e dedicada orientação demonstrada na elaboração deste trabalho.
Aos amigos que almejaram comigo a realização deste sonho.

"A educação é aquilo que sobrevive
depois que tudo o que aprendemos for esquecido."
B.F.Skinner

Resumo :

Esta monografia tem como objetivo principal apresentar um importante teorema usado no *Cálculo Diferencial a várias variáveis*, *Teorema das Funções Implícitas*, que serve de justificativa teórica para explicitar uma variável relativamente às demais numa expressão algébrica.

Ele nos permite concluir que, se tivermos uma equação

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$$

a equação de uma *variedade de dimensão n*, de *nível c*, que generaliza o conceito de *curva de nível*, ela define, implicitamente, x_{n+1} como uma função

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

em uma vizinhança do ponto

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\ )$$

pertencente à *variedade de nível c*

A importância deste teorema vem do fato de que facilmente encontramos expressões envolvendo mais de uma variável sem que seja possível, escrever uma delas como função das demais. Não é possível encontrar a expressão de f, mas é possível encontrarmos uma aproximação linear para f que é uma consequência crucial do teorema que será discutida no terceiro capítulo deste trabalho.

O *Teorema da Função Implícita* também serve de base para a solução das equações diferenciais exatas e isto será mostrado no quarto capítulo do trabalho e que, neste trabalho será apresentado como uma especie de *resultado inverso* do teorema.

Neste trabalho vou usar a locução *expressão algébrica* de uma forma ampla com expressões nada algébricas como $x^2 sen(x^3 + y^5)$, por falta de uma forma mais simples de referir a tais expressões.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução e exemplos

Neste capítulo vou descrever os pré-requisitos necessários para apresentação do Teorema da Função Implícita, a linguagem que estende a nossa limitada linguagem geométrica para tratar de objetos em dimensão maior do que três e relembrar os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral também ao enunciado e à demonstração do teorema.

1.1 A estrutura do trabalho

Vou inicialmente apresentar dois exemplos que servirão de motivo para a teoria que será apresentada nas seções seguintes. No último capítulo, mostrarei como aplicação, a solução das *equações diferenciais exatas*.

Vou mostrar, com dois exemplos simples, como podemos calcular a derivada de uma função sem que conheçamos a equação desta função. O método consiste em "*derivar implicitamente*".

O primeiro exemplo que vou usar é o da equação de um círculo de centro na origem, e, neste caso, podemos explicitar uma das variáveis, em função de uma outra. Vou usar esta facilidade para, depois, voltar a calcular a derivada, mostrando que posso chegar ao mesmo resultado.

A razão deste exemplo inicial é a de que ele me permite comparar resultados, o que não poderei fazer em casos gerais, e nem se quer no segundo exemplo que vou apresentar.

Depois vou apresentar um segundo exemplo em que não mais terei a facilidade indicada no caso da equação do círculo, mas, por ele ser um pouco mais complexo, servirá de motivação ao teorema que é o ponto central deste trabalho.

Motivada por estes dois exemplos vou deduzir a expressão do *Teorema da Função Implícita* que é a ferramenta que nos permite o *cálculo de derivadas de* *funções sem conhecer-lhes as equações* e também para a solução das equações diferenciais exatas.

A demonstração que vou fazer do *Teorema da Função Implícita* também vai ser moldada nos exemplos e vai assim representar uma forma diferente de demonstrar este importante teorema.

1.2 Dimensão e variedade

É na `Álgebra Linear` que se define de forma adequada o conceito de dimensão. Aqui vamos usar este conceito de forma intuitiva. Precisamos falar com frequência da dimensão de um objeto definida por uma equação como

$$z = F(x, y) \tag{1.1}$$

para estabelecer a *dimensão* de um tal *objeto* vamos usar uma regra empírica que tem suas falhas como mostraremos com exemplos, mas que responde às nossas necessidades nos casos comuns que precisaremos aqui.

Definição 1 *Dimensão*
Considere-se um objeto *definido por uma* "equação algébrica" *como*

$$F(\ x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = c \tag{1.2}$$

Direi que a dimensão deste objeto *é dada pelo número de variáveis subtraída de uma unidade. A equação (1.2) representa, portanto, um* objeto *de dimensão* n

Exemplo 1 *Uma falha da definição*
É fácil ver que a definição *que dei de* `dimensão` *é falha. Considere, por exemplo*

$$x^2 + y^2 = 0 \tag{1.3}$$

que é a equação de um círculo de raio zero, portanto representa um único ponto, cuja dimensão é zero e não 1 como nos diria a definição.

Tais falhas representam, infelizmente, a grande maioria das expressões que podemos apresentar, entretanto, em todos os casos que discutirei neste trabalho a definição funciona e situações como a representada pela equação (1.3) serão contra-exemplos relativamente simples e poderei usar esta definição tranqüilamente na maioria dos casos que vou precisar discutir aqui.

Usei a palavra *objeto* como um substitutivo para um vocábulo geométrico e agora quero apresentar a palavra que vou passar a usar ao longo de todo este trabalho.

Definição 2 *Variedade*
Os objetos geométricos serão chamados aqui de variedades. *Uma curva será designada aqui como uma* variedade de dimensão *1. Um plano, ou uma superfície, serão chamadas de* variedades de dimensão *dois.*

Uma reta e um círculo são variedades de dimensão 1, vou distinguí-las dizendo que uma dessas variedades é linear *e se necessário direi que a outra é* não linear, *o círculo.*

Exemplo 2 *Variedade e dimensão*

1. *Assim um ponto é uma* variedade de dimensão zero, *retas são* variedades lineares de dimensão 1 *e uma curva qualquer é* variedade de dimensão 1 *que sendo necessário direi ser* linear *ou* não linear.
2. *Retas e curvas são variedades de dimensão 1.*
3. *Planos e superfícies são* variedades de dimensão 2.
4. *O objeto definido por uma equação como a equação (1.2) é uma variedade de dimensão n. O exemplo do círculo de raio zero mostra que, na verdade, nós sabemos que esta variedade é no máximo de dimensão n podendo inclusive ser de dimensão zero.*
5. *A equação (.2) define uma* variedade *cuja dimensão é menor ou igual a n. Mesmo assim em geral eu vou dizer que se trata de uma* variedade de dimensão n.

O conceito de *variedade* nos libera da linguagem geométrica.

1.3 Curva de nível

No Cálculo se discute um instrumento que é fundamental para os `engenheiros e topógrafos` na descrição do relevo de um terreno, *as curvas de nível*.

Como o gráfico de uma função de duas variáveis, $z = F(x, y)$ é uma variedade de dimensão dois, se ela for cortada por um plano paralelo ao plano $z = 0$ esta interseção produz uma variedade de dimensão 1, uma curva determinada sobre o gráfico de F. Podemos projetar esta curva sobre o domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ definindo

Definição 3 *Curva de nível c*

$$\{(x, y) \in \Omega \ ; \ F(x, y) = c\} \tag{1.4}$$

como o conjunto dos pontos no domínio que satisfazem a equação da interseção do gráfico de F com o plano $z = c$

$$z = F(x, y) \tag{1.5}$$
$$z = c \tag{1.6}$$

Observe que não é o resultado da interseção que interessa, mas sim a projeção desta interseção sobre o domínio. Como esta projeção preserva a dimensão, teremos uma curva no plano XOY, contida no domínio Ω da função F.

Exemplo 3 *Curvas de nível*

O gráfico do conjunto destas curvas permitem aos engenheiros e topógrafos ter uma idéia bem precisa do relevo de uma região. É a determinação de tais curvas que podemos ver alunos dos cursos de engenharia traçando quando usam aparelhos que determinam a altura fixando o olhar do observador numa escala métrica. A figura (1.1) página 4, pretende dar um exemplo de curvas de nível.

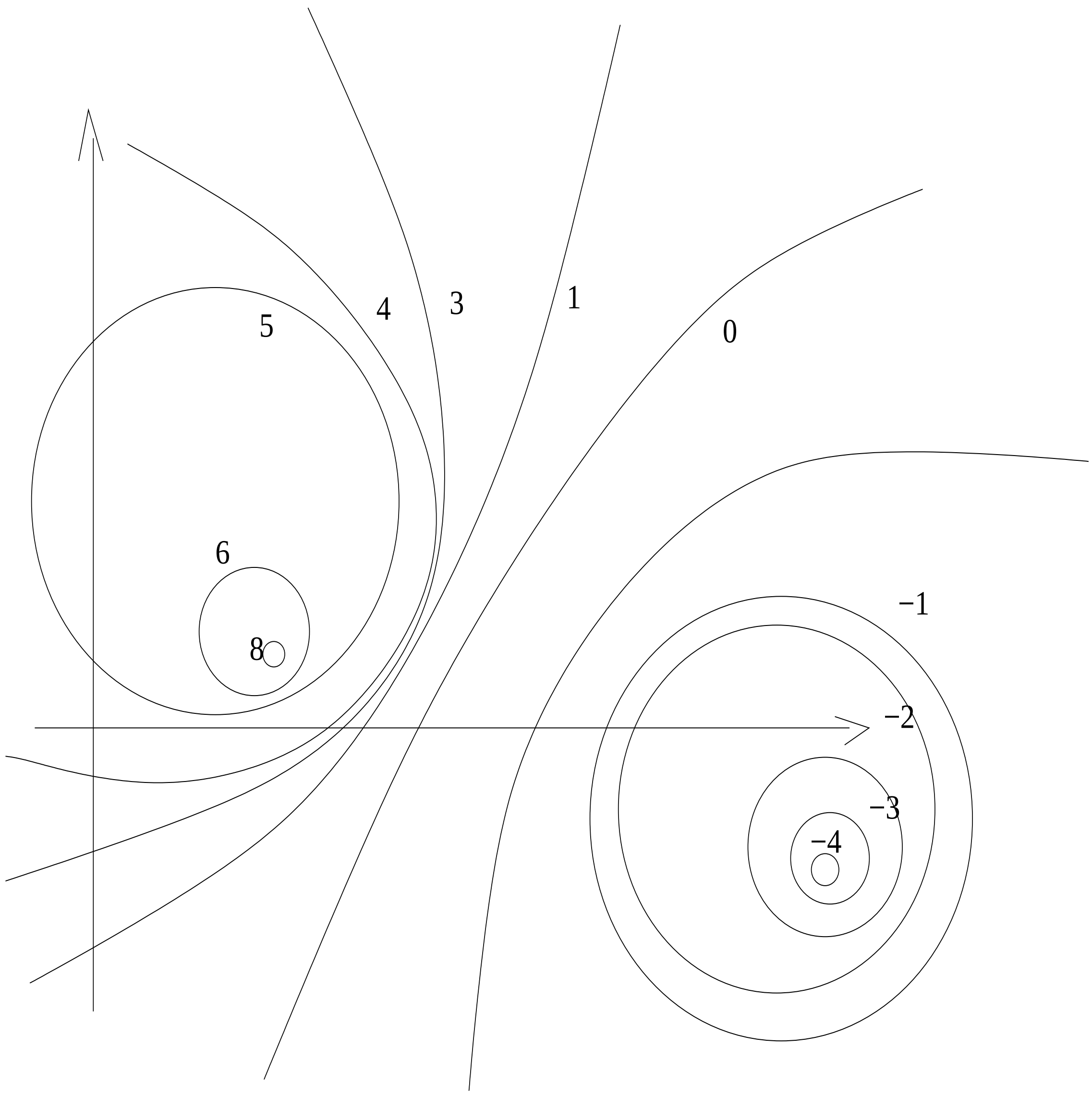


Figura 1.1: Exemplos de curva de nível

Os números que aparecem ao lado de cada uma das curvas indicam a altura do corte feito na superfície. Se positiva representa uma elevação, se negativa representa uma depressão.

Veja mais a respeito, por exemplo, em [1, página 97].

Vou me referir com freqüência às *variedades de nível* em lugar das curvas de nível que são variedades de nível de dimensão 1.

1.4 Derivada e diferencial

Dizer que uma função de uma variável tem derivada significa dizer que o gráfico da função admite em todos os pontos uma reta tangente. Podemos construir um método que facilmente se estende ao Cálculo de Varias Variáveis para interpretar a derivação. Vamos fazer isto de trás para frente para obter uma metodologia.

A equação da reta que passa por um ponto (a, b) com coeficiente angular m é

$$y = b + m(x - a) \ ; \quad (a, b) \ ; \quad m \tag{1.7}$$

os dados que usamos para obter esta equação estão colocados ao lado da equação, na expressão (1.7).

Quer dizer que se a função for diferenciável em uma vizinhança do ponto $x = a$ podemos obter a equação da reta tangente usando a derivada da função

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \ ; \ (a, f(a)) \ ; \quad m = f'(a) \tag{1.8}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{1.9}$$

$$dy = \ f'(a)dx \tag{1.10}$$

Na seqüência de equações (1.8), (1.9), (1.10), vemos surgir de forma natural um objeto que intrigou os matemáticos dos séculos 18 e 19 e que inclusive fez surgir uma denominação mística que atrapalhou fundamentalmente a compreensão da *Análise Matemática*, o *infinitesimal* e que somente na metade do século 20 foi devidamente explicada por pessoas como *Henri Cartan*. A sucessão de equações (1.10), (1.9), (1.8), tomadas agora no sentido inverso, mostram que a equação de uma reta, *nas variáveis* dx, dy está associada com o gráfico da função $y = f(x)$, e que partindo desta equação de reta, que chamaremos *diferencial*, podemos rapidamente obter a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ com as substituições

$$x := a \tag{1.11}$$

$$y := b \tag{1.12}$$

$$dx := (x - a) \tag{1.13}$$

$$dy := (y - b) \tag{1.14}$$

O conceito místico de *infinitesimal* que buscava objetos inexistentes para fazer a divisão na *fração inexistente de Leibniz* que por sua vez representa uma regra lógica que funciona como se fosse uma fração, precisou de muito pensamento para ser destruido e colocado em seu devido lugar.

Não existem *infinitesimais* e o diferencial é uma equação linear, (1.10), que nos permite rapidamente obter a equação da variedade linear tangente ao gráfico de uma função num ponto em que ela for derivável.

A equação (1.10) é apenas a equação de uma reta que passa na origem e é paralela à equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, o diferencial, escrita de uma forma que permite confusões pela introdução de novas variáveis, dx, dy mas que poderia ter sido escrita como

$$h = f'(a)k \tag{1.15}$$

usando duas novas variáveis h, k. O magnífico na *fração inexistente de Leibniz* é que ela funciona como se fosse uma fração e nós a usamos seguidamente em *mudanças de variáveis* no Cálculo em que ela nos permite saltos lógicos entre expressões algébricas.

Na próxima seção vou generalizar esta construção para o caso de duas variáveis e finalmente para um caso de um número qualquer de variáveis.

1.5 Método de Derivação Implícita

Definição 4 *Função derivável*

Por analogia com o caso de dimensão 1, direi que uma função $z = F(x, y)$ é derivável, nas vizinhanças de um ponto $(a, b) \in \Omega$, se houver um plano tangente ao gráfico de F no ponto

$$(a, b, c)\ ;\ c = F(a, b) \tag{1.16}$$

A equação de um tal plano, à semelhança da equação de uma reta, é então da forma

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) = G(x, y) \tag{1.17}$$

e vamos reconhecer nos números A, B as derivadas parciais da função do primeiro grau em duas variáveis

$$G(x, y) = A(x - a) + B(y - b) \tag{1.18}$$

$$G(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial G}{\partial y}(y - b) \tag{1.19}$$

e então, por analogia direta com o caso da reta, agora usando o fato de que temos um plano tangente, concluímos que

$$A = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \tag{1.20}$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \tag{1.21}$$

Os planos tangentes "*lembram*" os coeficientes angulares instantâneos das funções, no ponto de tangência, como as retas tangentes "*lembram*" o único coeficiente angular instantâneo de uma função univariada, no ponto de tangência.

Assim, uma forma geométrica de calcular as derivadas parciais consiste em aplicar um plano, tangencialmente, no ponto (a, b, c) do gráfico da função $z =$

$F(x, y)$, e calcular os coeficientes angulares, neste ponto, ao longo das direções determinadas pelos eixos OX, OY. Os resultados seriam

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \tag{1.22}$$

Da mesma forma como poderíamos calcular geometricamente a derivada de uma função $y = f(x)$, univariada, aplicando-lhe uma reta, tangencialmente, no ponto (a, b) do gráfico e calculando o coeficiente angular desta reta, o resultado seria

$$f'(a). \tag{1.23}$$

Podemos agora copiar a seqüência de equações que produziram o diferencial, no caso de uma variável, para obter

$$z - c = \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) \tag{1.24}$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{1.25}$$

em que a equação do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$ foi obtido do diferencial

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{1.26}$$

pelas substituições

$$x := a \tag{1.27}$$

$$y := b \tag{1.28}$$

$$z := c \tag{1.29}$$

$$dx := (x - a) \tag{1.30}$$

$$dy := (y - b) \tag{1.31}$$

$$dz := (z - c) \tag{1.32}$$

e aqui, como no caso de uma variável, o *diferencial* nada mais é do que uma equação linear, escrita com as variáveis dx, dy, dz, *um modelo para a equação da variedade linear de dimensão 2, tangente ao gráfico de F no ponto* $(a, b, F(a, b))$.

Novamente aqui entre a beleza da *notação de Leibniz*, que volta estabelecer uma *fração inexistente de Leibniz*, mas que formalmente funciona como se fosse uma fração, e à qual eu vou voltar, no final do capítulo três, com expressão do *Teorema da Função Implícita*.

Neste momento os cálculos que acabamos de fazer nos conduzem a um método de derivação, *a derivação implícita*, que é importante para se entender o Teorema da Função Implícita, ponto central deste trabalho.

Para isto vamos analisar a equação (1.24) e fazer aparecer uma fórmula típica dos livros de Cálculo à duas ou três variáveis, o *diferencial total*.

Considere uma função de duas variáveis,

$$z = F(x, y) \tag{1.33}$$

para a qual os livros de Cálculo definem o *diferencial total*

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{1.34}$$

que podemos identificar no segundo membro o produto escalar dos vetores

$$grad(F) = (\tfrac{\partial F}{\partial x}, \tfrac{\partial F}{\partial y}) \tag{1.35}$$

$$(dx, dy) \ = (h, k) \tag{1.36}$$

O produto escalar generaliza o produto usual do caso de uma variável. Ou seja, se tivermos uma função de n variáveis

$$x_{n+1} = F(x_1, \dots, \ x_n) \tag{1.37}$$

teriamos o produto escalar entre os vetores

$$grad(F) = (\tfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dots \tfrac{\partial F}{\partial x_n}) \tag{1.38}$$

$$(dx_1, \dots dx_n) \ = (h_1, \dots, h_n) \tag{1.39}$$

$$dx_{n+1} = grad(F) \cdot (dx_1, \dots dx_n) \tag{1.40}$$

$$dx_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\partial F}{\partial x_k} dx_k \tag{1.41}$$

em que novamente vemos, na sucessão de equações (1.38), (1.39), (1.40), (1.41), aparecer finalmente o modelo de uma variedade linear de dimensão n, tangente ao gráfico de F no ponto

$$(a, F(a)) = (a_1, \dots, a_n, F(a_1, \dots, a_n)) \tag{1.42}$$

A equação (1.41), recebe um nome místico, de *diferencial total*, quando nada mais é que do que o modelo de equação linear da variedade linear tangente ao gráfico de F no ponto $(a, F(a))$.

Aqui temos, novamente, na História da Matemática, mas uma noção *mística* que tornou difícil de entender coisas simples. O *diferencial total* nada mais é do que a expressão do diferencial e, como já dissemos, acima, o modelo da variedade linear tangente ao gráfico de uma função num ponto em que ela for diferenciável, escrito com um sistema de variáveis que permitiram a existência dos *infinitesimais*, estes sim, simplesmente, inexistentes.

O nome usado tem sentido, apesar de esconder a presença de uma transformação linear, ele soma a *variação total* da função em volta do ponto

$$(a_1, \dots, a_n, F(a_1, \dots, a_n)) \tag{1.43}$$

é o erro total que vamos cometer se substituirmos a função F pela função linear dF.

As equações (1.38), (139), (1.40), (1.41) definem um método de derivação que chamamos *derivação implícita* .

Exemplo 4 *Derivação implícita*
Seja a equação

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 - z \tag{1.44}$$

que pode ser escrita como

$$z = F(x, y) = x^6y^2 - 3x^4y^6 - x^2y^2 \tag{1.45}$$

e da qual podemos deduzir o diferencial total *ou a equação da* variedade linear tangente, de dimensão 2,

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{1.46}$$

$$dz = (6x^5y^2 - 12x^3y^6 - 2xy^2)dx + (2x^6y - 12x^4y^5 - 2x^2y)dy \tag{1.47}$$

$$z - c = (6a^5b^2 - 12a^3b^6 - 2ab^2)(x - a) + (2a^6b - 12a^4b^5 - 2a^2b)(y - b) \tag{1.48}$$

em que nas equações (1.1.46), (1.1.47),(1.48), fizemos as substituições

- $dx := x - a$; $dy := y - b$; $dz := z - c$
- $x := a$; $y := b$

deduzindo do diferencial *a equação da variedade linear tangente no ponto* $(a, b, F(a, b))$.

Este exemplo nos mostra como, historicamente, surgiram os símbolos "dx" e "dy". Eles eram naturais indicadores da "variável" que estava sendo diferenciada. Mostrarei, quando apresentar o Teorema da Função Implícita *como eles servem para construir as derivadas de uma nova função com auxílio da* fração inexistente de Leibniz, *a* notação de Leibniz

Capítulo 2

O Teorema da Função Implícita

Vou construir o Teorema da Função Implícita como uma Conseqüência natural de dois exemplos que vou começar por apresentar.
Os dois exemplos foram escolhidos por razões estratégicas.
O primeiro é relativamente simples, a equação do círculo em que eu vou poder explicitar uma variável deduzindo uma função cuja derivada sabemos calcular o que será feito de duas formas, uma delas usando a expressão do Teorema que nos interessa.
No segundo exemplo não será possível explicitar nenhuma variável, entretanto a metodologia, sendo idêntica, nos levará a conclusão de que existe um teorema que tudo justifica.
A conseqüência natural é o Teorema da Função Implícita cuja demonstração será feita ao final deste capítulo.

2.1 Equação do círculo de centro na origem

Considere a função

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \tag{2.1}$$

cujo gráfico é uma variedade não linear de dimensão 2, um *paraboloide*, que vamos cortar com planos paralelos ao plano coordenado XOY

$$z = c \tag{2.2}$$

tendo como resultado variedades não lineares de dimensão 1, (*curvas*)

$$F(x,y) = x^2 + y^2 = c \quad , \tag{2.3}$$

$$F(a,b) = c \tag{2.4}$$

$$y^2 = c - x^2 \tag{2.5}$$

$$y = \sqrt{c - x^2} \tag{2.6}$$

$$y = h(x) \tag{2.7}$$

Neste caso pudemos explicitar $y = h(x)$ com facilidade e agora vamos calcular a derivada dessa função

$$y' = h'(x) \tag{2.8}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{c - x^2}} \tag{2.9}$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} \tag{2.10}$$

Calculando a derivada no ponto (a, b) em que passe o círculo, temos:

$$y'(a) = \frac{-2a}{2b} = \frac{-a}{b}$$

agora vamos calcular a derivada da equação usando a derivação implícita.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = c \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \tag{2.12}$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \tag{2.13}$$

Vamos aplicar a expressão acima em um ponto (a, b) sob a suposição de que $F(a, b) = c$, quer dizer um ponto que pertence à curva $F(x, y) = c$, para obter a equação da variedade linear tangente à curva no ponto (a, b). Para fazê-lo usamos a tecnica de substituir

$$dx := x - a \tag{2.14}$$

$$dy := y - b \tag{2.15}$$

$$x := a; y := b \tag{2.16}$$

escrevendo

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) = 0 \tag{2.17}$$

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0 \tag{2.18}$$

esta expressão é a equação de uma reta tangente à curva $F(x, y) = c$ no ponto (a, b). Explicitando y nesta equação temos:

$$(y - b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}}{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}}(x - a) = m(x - a) \tag{2.19}$$

$$m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}}{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}} = -\frac{2a}{2b} = -\frac{a}{b} \tag{2.20}$$

e voltamos a obter, usando outro método, o mesmo resultado anterior mostrando que podemos obter a derivada de uma curva em um ponto (a, b) a partir da derivada implícita da expressão $F(x, y) = c$ que definia originariamente a curva.

Veja que esta expressão somente pode ser escrita se

$$\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \neq 0$$

vamos nos lembrar disto mais a frente quando enunciarmos o Teorema da Função Implícita. Caso esta derivada parcial seja zero, podemos eventualmente explicitar x se a outra derivada parcial for diferente de zero. Se ambas as derivadas parciais forem zero, se tem um ponto crítico que será interessante estudar em outro trabalho.

O número m costumamos usar para o coeficiente angular da reta, corresponde ao coeficiente angular instantâneo da curva no ponto de tangência. Portanto se conseguirmos pôr evidência y na equação $F(x, y) = c$, teríamos

$$y = h(x)$$

e

$$h'(a) = m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}}{\frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}} = \frac{-2a}{2b} = \frac{-a}{b} \tag{2.21}$$

2.2 Uma equação que não pode ser explicitada

Vou agora apresentar o outro exemplo anunciado incialmente. Neste caso não vou conseguir explicitar $y = h(x)$ e nem $x = g(y)$ e assim a única forma que terei para calcular a derivada de h ou de g é a *derivação implícita* da função F.

Considere

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^3 \tag{2.22}$$

Esta é uma expressão simples que não sabemos fatorar e conseqüentemente não temos meios para explicitar

$$y = h(x) \text{ ou } \; x = g(y)$$

mas iremos agora, usando o método desenvolvido acima, calcular a

$$h'(a)$$

em um ponto $(a, b) \in F(x, y) = c$, uma curva obtida com um valor adequado para c. Esta curva pode ser obtida, aproximadamente, usando-se um programa de computador, veja o resultado na figura (2.1) página 13.

Observe que a figura (2.1), não é uma curva. Com um programa de computador não podemos resolver a equação algébrica $F(x, y) = c$ e resolvemos a desigualdade

$$\{(x, y) \in Q; |F(x, y) - c| < \epsilon\} \; ; \epsilon \in \mathbf{R}$$

que produz não uma curva, mas uma faixa que em alguns pontos pode ficar mais larga, que é o que podemos ver na figura. Veremos adiante que este resultado pode ser melhorado com auxílio do Teorema da Função Implícita e das aproximações que ele permite fazer.

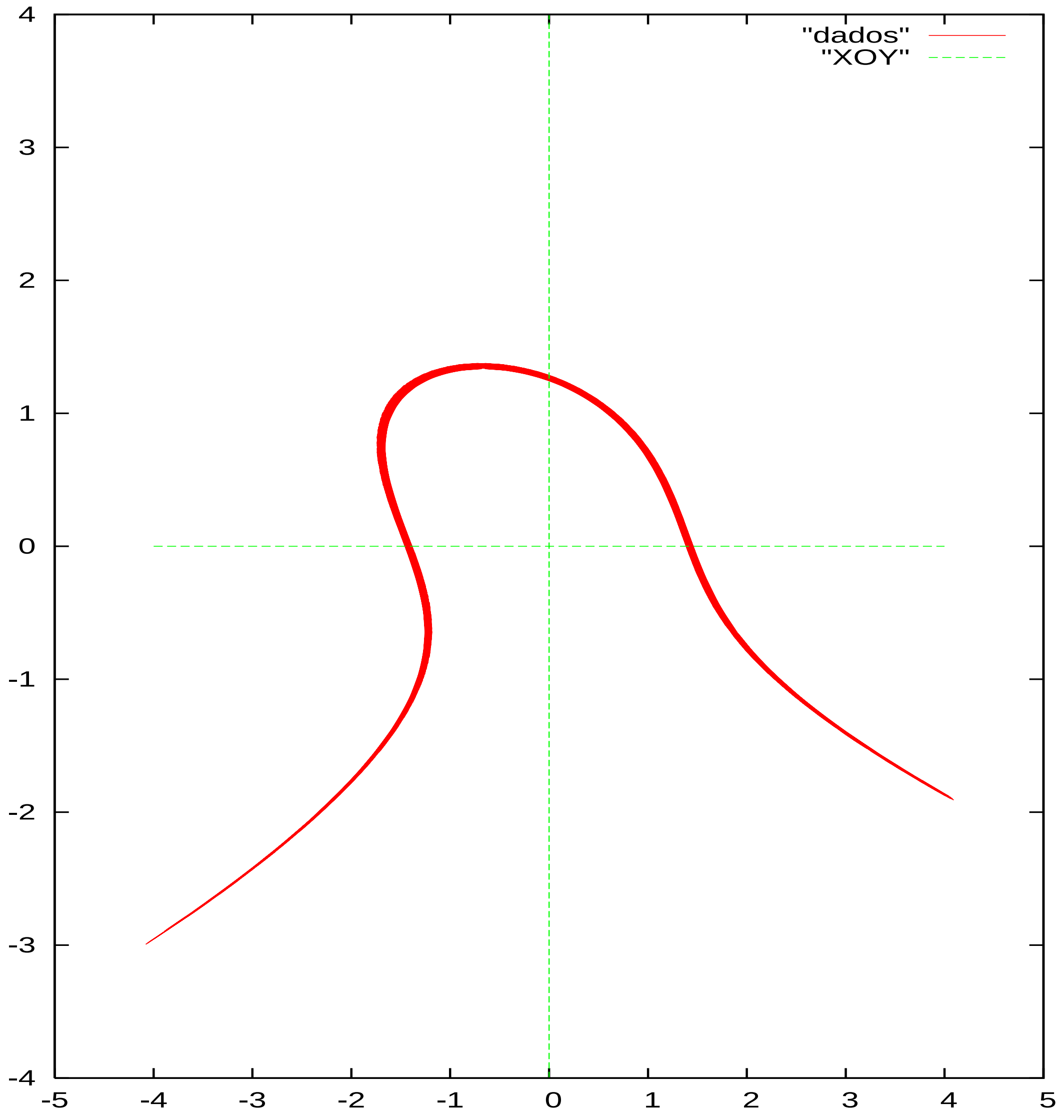


Figura 2.1: Uma curva obtida com um programa

Retornando à equação $F(x, y) = x^2 + xy + y^3$ se derivarmos implicitamente, vamos obter uma expressão diferencial que fornece a equação de um objeto linear tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{2.23}$$

$$(2x + y)dx + (x + 3y^2)dy = 0 \tag{2.24}$$

fazendo as substituições mencionadas no sistema de equações (2.14)-(2.16) temos

$$dx = (x - a), dy = (y - b), \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) = 0 \tag{2.26}$$

$$(2x+y)|_{(a,b)}dx + (x+3y^2)|_{(a,b)}dy = 0 \quad (2.27)$$
$$(2a+b)(x-a) + (a+3b^2)(y-b) = 0 \quad (2.28)$$

sendo

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.29)$$
$$B = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.30)$$

temos

$$A(x-a) + B(y-b) = 0 \quad (2.31)$$
$$y - b = -\frac{A}{B}(x-a) = m(x-a) \quad (2.32)$$
$$m = -\frac{2a+b}{a+3b^2} = h'(a) \Leftarrow a + 3b^2 \neq 0 \quad (2.33)$$

esta é a equação da reta tangente. Como é a reta tangente, o seu coeficiente angular coincide com o coeficiente angular instântaneo da curva no ponto de tangencia. Quer dizer, *se pudessemos escrever $y = h(x)$ em volta do ponto* (a,b), então, $h'(a) = m$.

Este é o conteúdo do Teorema da Função Implícita que vamos apresentar na próxima seção.

2.3 Primeira versão do teorema

Os dois exemplos estudados tratam do caso $F(x,y) = c$, *variedades de nível de dimensão 1* tangenciadas em um ponto (a,b) por uma *variedade linear de dimensão 1.* Neste caso a linguagem geométrica ainda funciona e podemos dizer que são *curvas de nível* tangenciadas por uma reta.

O *diferencial*, o modelo da equação da *variedade linear tangente* é

$$dz = \tfrac{\partial F}{\partial x}dx + \tfrac{\partial F}{\partial y}dy \quad (2.34)$$
$$F(x,y) = c \Rightarrow \tfrac{\partial F}{\partial x}dx + \tfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad (2.35)$$
$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial F}{\partial y}(y-b) = 0 \quad (2.36)$$
$$A(x-a) + B(y-b) = 0 \quad (2.37)$$

Na equação (2.37) podemos explicitar x, y dependendo de que o coeficiente da variável seja diferente de zero:

- $A = \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ podemos explicitar x escrevendo

$$x - a = -\frac{B}{A}(y-b) \Rightarrow x = a - \frac{B}{A}(y-b) \quad (2.38)$$

- $B = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ podemos explicitar y escrevendo

$$y - b = -\frac{A}{B}(x - a) \ \Rightarrow \ y = b - \frac{A}{B}(x - a) \tag{2.39}$$

Isto nos conduz às hipóteses do teorema que precisamos. Vou inicialmente redigir o resultado no caso de duas variáveis e posteriormente apresentar a forma mais geral do teorema.

- **hipótese** O teorema se refere a uma função $z = F(x, y)$ e sobre um ponto $(a, b) \in \Omega$ em que Ω é o domínio de F tal que $(a, b, c) \in graf(F)$ ou $c = F(a, b)$. Vou precisar de uma solução da equação $F(x, y) = c$.

- **hipótese** A variedade $F(x, y) = c$ é de dimensão 1 enquanto que a variedade $z = F(x, y)$ é de dimensão 2. A variedade tangente à $F(x, y) = c$ pode ser obtida por derivação implícita e vou precisar deste fato, logo $z = F(x, y)$ tem que ser uma função derivável no domínio Ω deve ser uma hipótese do teorema.

- **tese do teorema** Nas variedades lineares sempre que o coeficiente de uma variável for diferente de zero, esta variável pode ser explicitada e a equação assim resultante ainda é de uma variável tangente e quero deduzir deste fato que a mesma variável poderá ser explicitada em $F(x, y) = c$. Quer dizer, se o coeficiente de x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$$

então podemos explicitar

$$x = g(y)$$

tendo a variedade linear tangente

$$x - a = -\frac{B}{A}(y - b) = -\frac{F_2}{F_1}|_{(a,b)}(y - b)$$

e assim o coeficiente angular desta reta, $-\frac{F_2}{F_1}|_{(a,b)}$ é o coeficiente angular instântaneo de g no ponto $y = b$.

De forma análoga, se o coeficiente de y,

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

então podemos explicitar

$$y = h(x)$$

tendo a variedade linear tangente

$$y - b = -\frac{A}{B}(x - a) = -\frac{F_1}{F_2}|_{(a,b)}(x - a)$$

e assim o coeficiente angular desta reta, $-\frac{F_1}{F_2}|_{(a,b)}$ é o coeficiente angular instântaneo de h no ponto $x = a$.

Vou apresentar o teorema.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1** *Teorema da Função Implícita*
Seja $z = F(x, y)$ uma função diferenciável definida em um domínio Ω.

- *Se houver um ponto $(a, b) \in Omega$ tal que $F_x|(a, b) \neq 0$ então existe uma função $x = g(y)$ definida numa vizinhança de b tal que $a = g(b)$ e $g'(b) = -\frac{F_y}{F_x}$ em que as derivadas estão sendo calculadas no ponto (a, b).*
- *Se houver um ponto $(a, b) \in Omega$ tal que $F_y|(a, b) \neq 0$ então existe uma função $y = h(x)$ definida numa vizinhança de a tal que $b = h(a)$ e $h'(a) = -\frac{F_x}{F_y}$ em que as derivadas estão sendo calculadas no ponto (a, b). Ver [1,página 327][1] mais a respeito sobre a demonstração do teorema da função implícita.*

O Teorema da Função Implícita se refere a uma equação

$$F(x, y) = c \; ; \; F(a, b) = c \tag{2.40}$$

em que $\vec{a} = (a, b)$ é uma solução conhecida da equação $F(x, y) = c$, ou em outras palavras (a, b) é um ponto por onde a curva de nível passa, e se $\frac{\partial F}{\partial y}|_{(\vec{a,b})} \neq 0$ então a variável y pode ser explicitada como função de x:

$$y = g(x) \quad g'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{2.41}$$

com as derivadas parciais de F calculadas no ponto $\vec{a}$.

Ou vice-versa a respeito de uma função $x = h(y)$.

Quer dizer, tudo que sabemos sobre a função g que explicita a variável y relativamente a outra variável, é a derivada de g no ponto a.

Isto permite escrever aproximações de g usando-se a derivada e o ponto $(a, b\ )$ por onde passa a curva. Vamos desenvolver este aspecto no próximo capítulo.

Veja na figura (2.2) página 17,

Ver [página 314][1] a respeito da vizinhança de um ponto onde a função pode ser explicitada.

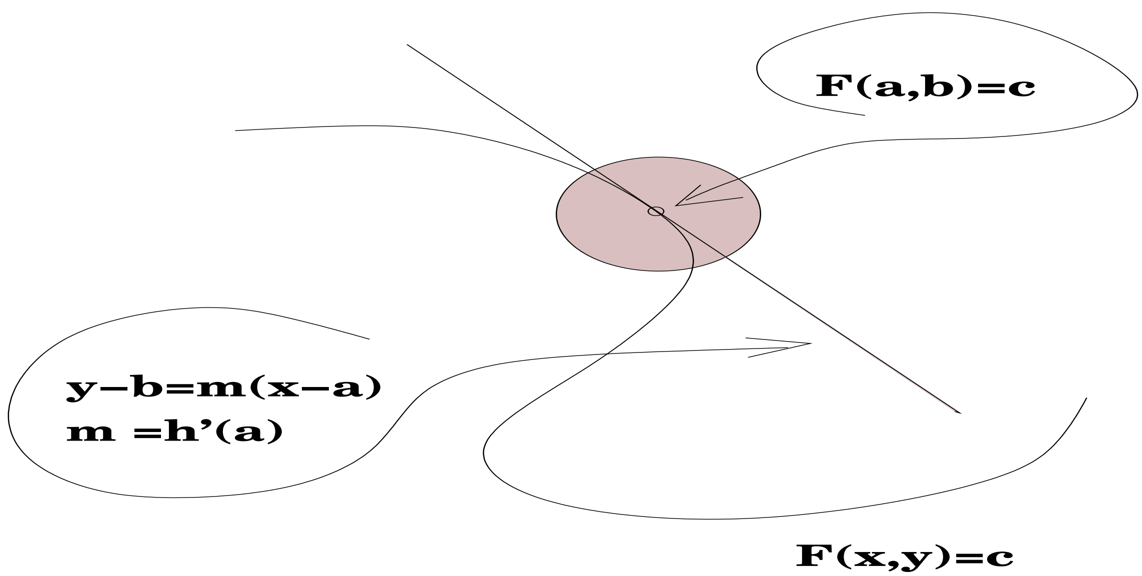


Figura 2.2: Explicitando y em $F(x, y) = c$ na vizinhança de um ponto

Capítulo 3

Aproximação poligonal de curvas

Neste capítulo vou mostrar uma aplicação imediata do Teorema da Função Implícita, aproximação poligonal de curvas.
Se conhecermos um ponto $(a, b, F(a, b)) = (a, b, c)$ que seja solução da equação

$$F(x, y) = c$$

pelo Teorema da Função Implícita é possível explicitar x ou y o que nos permite dizer que existe uma reta tangente a uma curva.
O diferencial, que durante muitos anos mistificou o signficado da derivada com o conceito confuso do *infinitesimal* surge agora como a forma de aproximar uma curva com uma reta tangente. Iterando este processo podemos obter uma poligonal e reduzindo o tamanho dos lados desta poligonal somos conduzidos a impressão visual que temos uma curva.

3.1 O diferencial

Eu já fiz diversas vezes menção ao conceito mistificado que surgiu ao longo da construção da derivada, de *infinitésimo*, que deve ser compreendido como uma tentativa de fuga do conceito de aproximação.

A equação

$$dz = J(F) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$dz = grad(F) \cdot (dxdy) \tag{3.2}$$

representa uma função linear que modela a equação da variedade linear tangente num ponto qualquer em que F for diferenciável.

3.2 O método iterado computacionalmente

Para funções de uma variável podemos fazer um gráfico simples e intuitivo, veja a figura (3.1) página 21,

O diferencial é apenas um modelo para a variedade linear tangente. Na figura (3.1) estou apresentando o diferencial, como um gráfico de uma reta que passa na origem, portanto uma função linear, e uma reta tangente, que é paralela ao diferencial.

A reta tangente representa uma aproximação da função em uma vizinhança do ponto de tangência. Esta aproximação pode ser iterada. Veja o gráfico na figura (3.2) página 22,

em que três segmentos de reta,

- o primeiro partindo do ponto $(a, f(a))$, sobre a reta tangente;
- o segundo partindo de um ponto escolhido sobre a reta tangente;
- e o terceiro partindo de um ponto escolhido sobre a segunda reta,

nos dá uma poligonal que aproxima, visivelmente mal, o gráfico de f.

Com auxílio de um programa de computador, este método pode ser significativamente melhorado oferecendo aproximações que visualmente parecem muito boas, como veremos neste capítulo.

3.3 Aproximação poligonal de curvas

Vamos apresentar, como exemplo, a construção de uma imagem mais perfeita da curva apresentada em (fig. 2.1) página 13.

Lembrando o que foi dito no capítulo dois, quando apresentei a *variedade não linear de dimensão 1*, uma curva, no gráfico (2.1) ela é o resultado de uma desigualdade da forma

$$|F(x, y) - c| < \epsilon \tag{3.3}$$

resolvida, computacionalmente, num retângulo contido no domínio da função F. O resultado é uma faixa de largura ϵ que contém a variedade em seu centro.

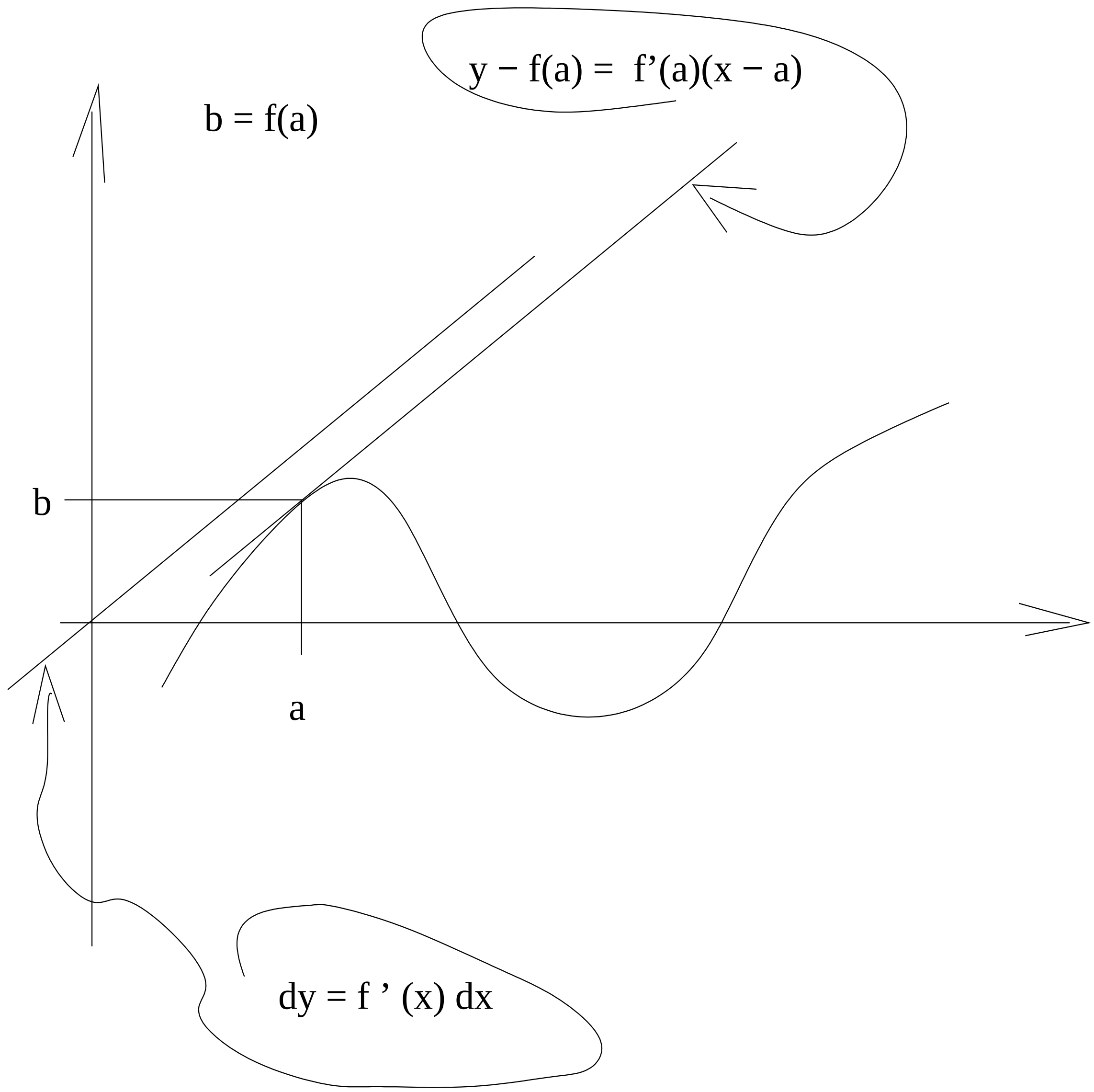
A técnica que vamos empregar agora é a seguinte:

- conhecido um ponto $(a, b) \in F(x, y) = c$;
- traçamos uma poligonal cujo primeiro lado tem o ponto $(a_0, b_0) = (a, b)$ como extremidade inicial e o ponto (a_1, b_1) na reta que passa em (a_0, b_0) com coeficiente angular $m = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}$ em que as derivadas parciais serão calculadas no ponto (a, b);
- pelo que discutimos anteriormente, este segmento de reta pertence à reta tangente à curva no ponto (a, b);
- iteramos este processo usando (a_1, b_1) como inicial de um novo segmento e assim calculando (a_2, b_2) e assim sucessivamente calcularemos uma poligonal com n lados em que n é uma constante inteira por nós escolhida afim de parar o processo computacional.

Veja o resultado disto com na figura (3.3) página 23, em que obtivemos a mesma curva já apresentada anteriormente com um erro muito menor (e conseqüentemente com muito maior tempo de processamento).

É uma poligonal com lados muito grandes para evidenciar o erro. Em seguida apresentaremos o mesmo resultado com erro menor.

Veja agora o mesmo resultado usando a medida dos lados da poligonal 0.1 na figura (fig. 3.4) página 24, em que deixamos a poligonal anterior para servir de comparação. Se tivessemos escolhido um valor menor para medida do lado da segunda poligonal, ela se teria confundido com a curva (que na verdade é uma faixa) obtida pela desigualdade.



[página 314][1]

Figura 3.1: A reta tangente no ponto $(a, f(a))$

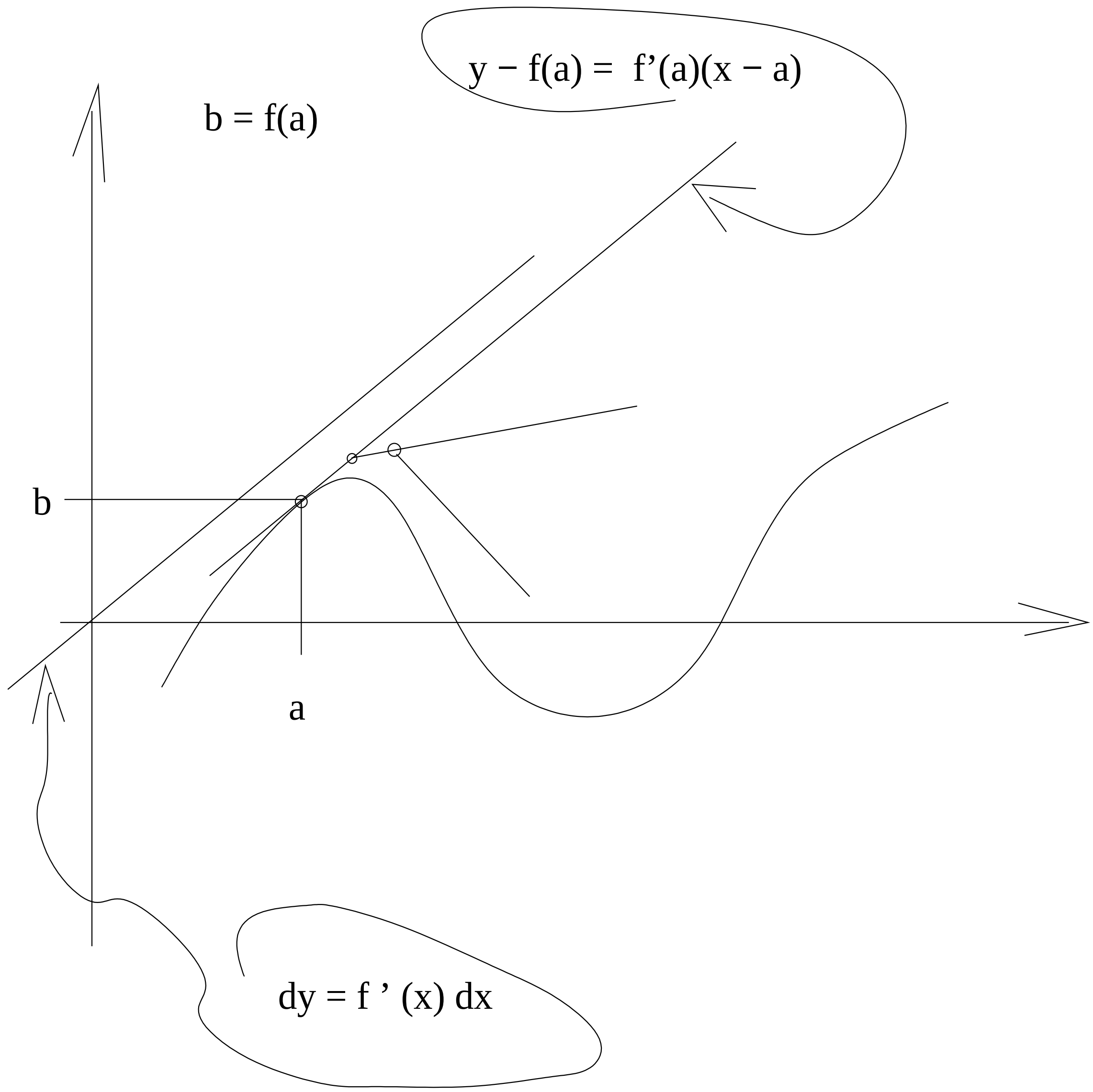


Figura 3.2: Um novo segmento de reta

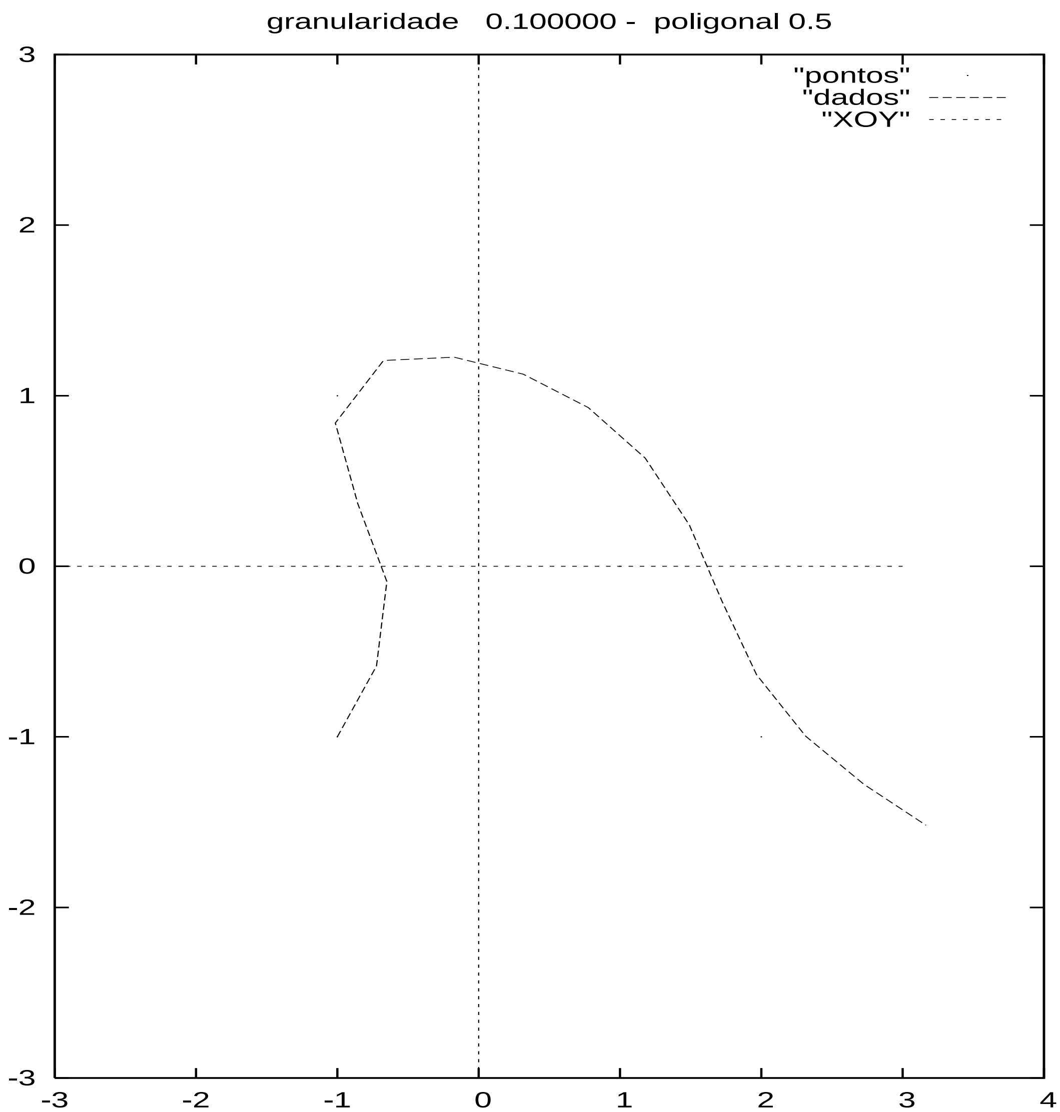


Figura 3.3: Curva com uma poligonal

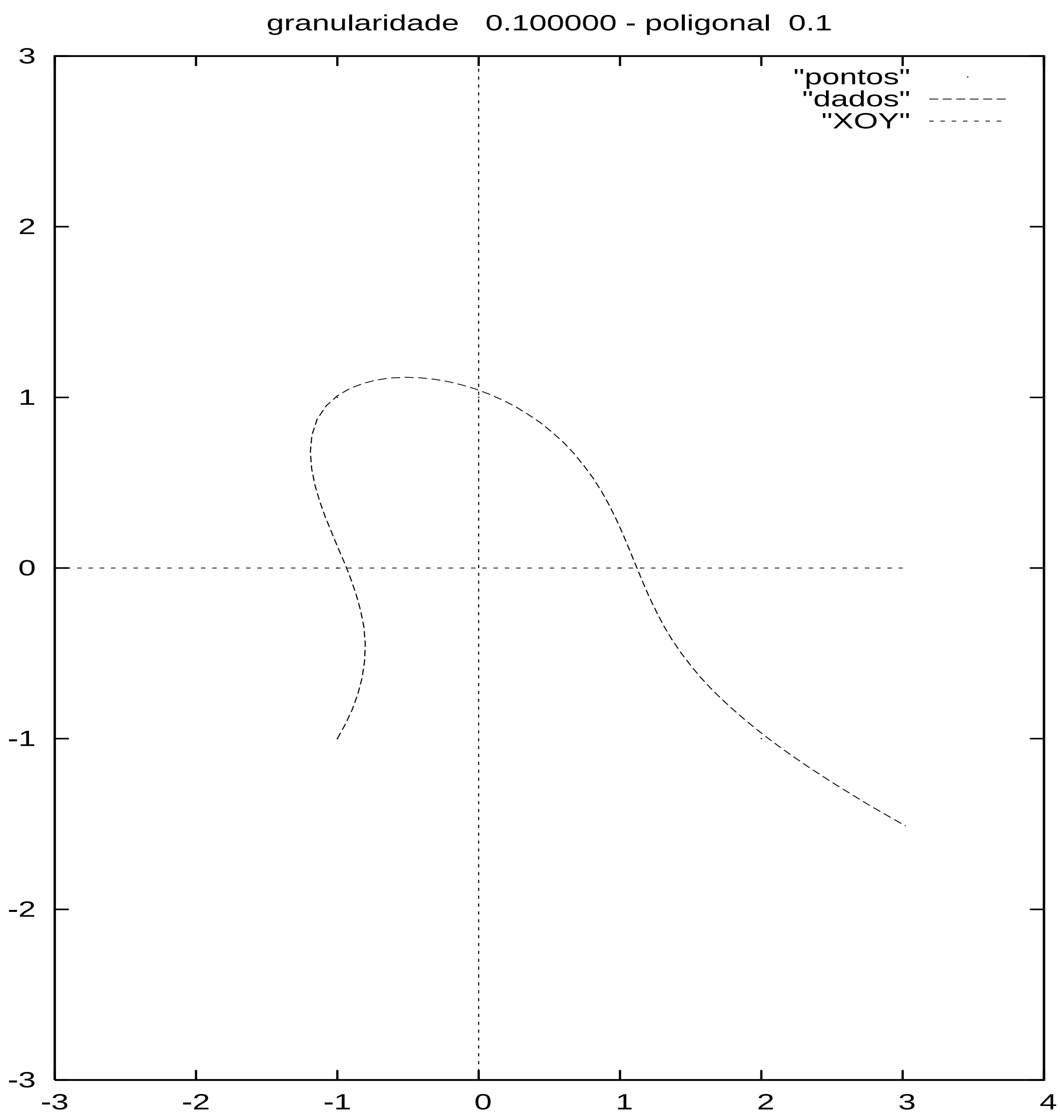


Figura 3.4: Curva com duas poligonais de lados medindo $1, 0.1$

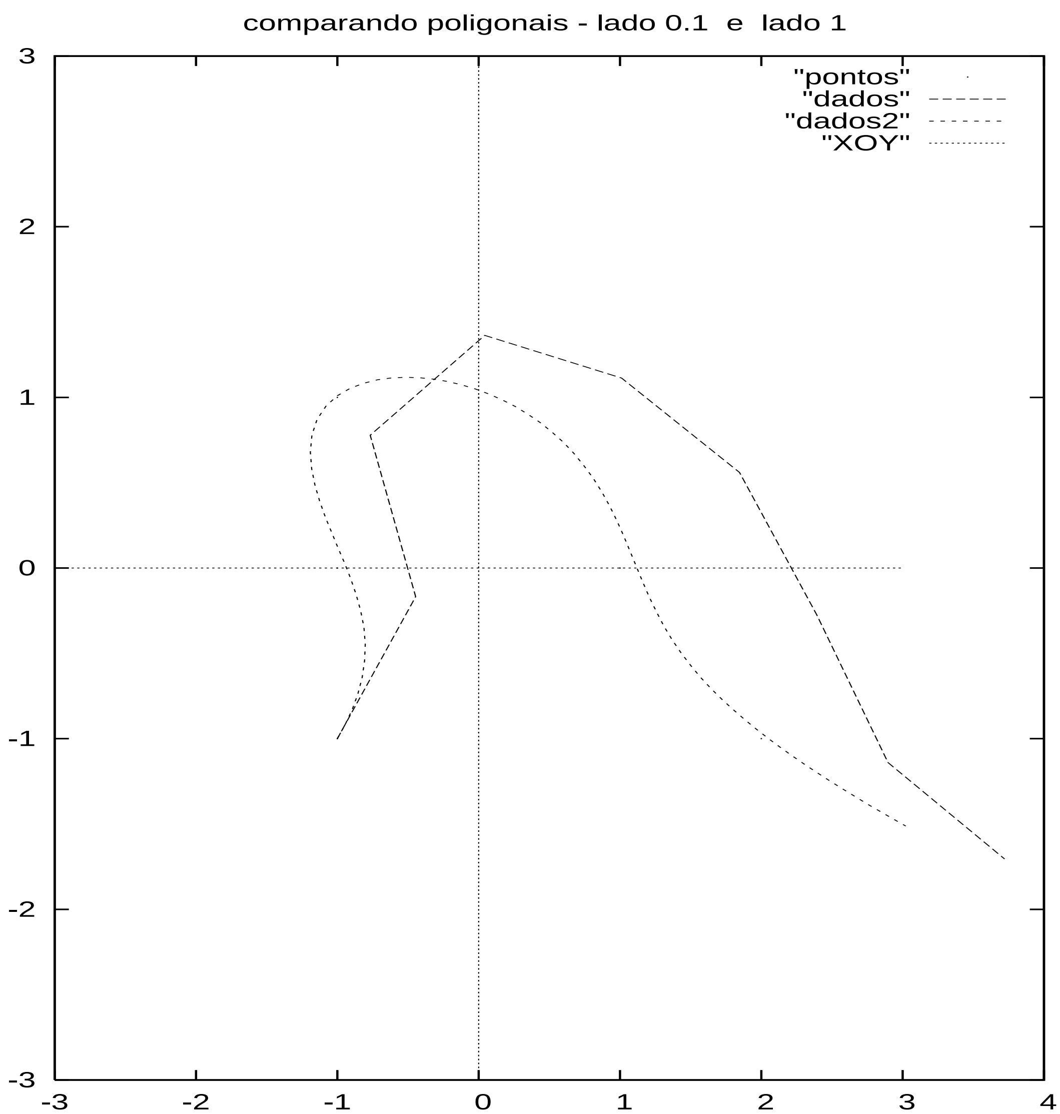


Figura 3.5: Curva com duas poligonais de lados medindo $1, 0.1$

Capítulo 4

Equações Diferenciais Exatas

Para compensar as críticas que fiz à nomenclatura em Matemática, eivada de preconceitos dos nossos antepassados, pese o grande esforço intelectual que nos legaram, e todo o respeito que lhes devemos ter, agora temos uma denominação de uma precisão respeitável, *equações diferenciais exatas*. Elas se originam de um *diferencial exato*.

4.1 Diferencial exato

Ao derivarmos, implicitamente, uma expressão como

$$F(x, y) = c \tag{4.1}$$

vemos surgir uma expressão da forma

$$A(x, y)dx \ + \ B(x, y)dy = 0 \tag{4.2}$$

Se, inversamente nos deparmos com a expressão (4.2), podemos nos perguntar se existiria alguma função

$$z = F(x, y) \tag{4.3}$$

da qual a equação (4.2) se tenha originado.

Se a resposta for `sim`, diremos que a equação (eq.4.2) é um diferencial exato, o que é equivalente a dizer que

$$(A(x, y), \ B(x, y)) \ = \ (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \tag{4.4}$$

para alguma função $z = F(x, y)$ que conhecemos ou que podemos encontrar.

Definição 5 *Diferencial exato*
Uma expressão da forma

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1, \dots, x_n)dx_k \tag{4.5}$$

é um diferencial exato se houver uma função

$$x_{n+1} = F(x_1, \dots, x_n) \tag{4.6}$$

tal que

$$A_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_k} \tag{4.7}$$

isto é, os coeficientes na equação (4.5) são as derivadas parciais de uma função nas variáveis

$$x_1, \dots, x_n \tag{4.8}$$

Vamos supor que a equação (eq.4.5) seja um diferencial exato e portanto que

$$A_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_k} \tag{4.9}$$

Se calcularmos, em ambos os termos a derivada de índices diferentes teremos

$$\frac{\partial A_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_k} \tag{4.10}$$

e se comutarmos a ordem de derivação, teremos

$$\frac{\partial A_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_j} \tag{4.11}$$

e o teorema de Clairaut veja [3, partial derivatives] estabelece que se F tiver derivadas contínuas de segunda ordem numa vizinhança do ponto a então as derivadas mistas são iguais

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_j} \tag{4.12}$$

O teorema de Clairaut nos oferece, assim, uma condição necessária para que uma expressão seja um diferencial exato.

4.2 Equações Diferenciais Exatas

As *equações diferenciais* são *equações funcionais* porque a *variável*, ou a *incógnita*, o objeto desconhecido, nelas, é uma função.

Uma expressão na forma da equação (4.5) é uma *equação diferencial* que chamamos de *equação diferencial exata* se os coeficientes $A(x, y), B(x, y)$ satisfizerem à condição de Clairaut (12).

Se a equação (4.5) for *exata* então podemos, em princípio, encontrar uma função

$$z = F(x, y) \tag{4.13}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = A(x, y) \tag{4.14}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = B(x, y) \tag{4.15}$$

e integrando parcialmente (em relação a x) a função $A(x, y)$ e em relação a y a função $B(x, y)$, e comparando os resultados, podemos descobrir a função F.

Como a equação (4.5) é uma reta tangente, (uma variedade linear de dimensão 1), então estamos procurando uma curva, (uma variedade não linear de dimensão 1), que tenha esta reta por tangente. Isto significa que a solução de uma equação diferencial exata na forma da equação (4.5) é uma curva de nível

$$F(x, y) = c \tag{4.16}$$

para alguma constante c adequada.

Vemos assim uma segunda aplicação do Teorema da Função Implícita, a solução de uma classe de equações diferenciais, as chamadas *equações diferenciais exatas.*

4.3 Teste de uma equação diferencial exata

Para que possamos saber se uma expressão diferencial é exata ou não recorre-se ao teorema de Clairaut

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2** *Teorema de Clairaut As derivadas mistas de segunda ordem são iguais:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

do qual podemos concluir quando uma expressão diferencial é uma equação diferencial é exata:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **3** *Teste da equação diferencial exata Seja uma expressão diferencial*

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0 \tag{4.17}$$

se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{4.18}$$

então

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0 \tag{4.19}$$

é uma equação diferencial exata.

Mostraremos agora alguns exemplos de equações diferenciais exatas.

Exemplo 5 *Equação diferencial exata*
Seja a equação diferencial

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 + y^3)dy = 0$$

a qual observando não sabemos ser ou não exata, vamos verificar pelo teorema (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 + xy^2) \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2xy \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 y + y^3) \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 2xy \tag{4.23}$$

então

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 2xy$$

Logo a equação é exata. Agora iremos encontrar sua solução.

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 + y^3)dy = 0 \tag{4.24}$$

$$(x^3 + xy^2)dx = \int x^3 dx + \int xy^2 dx = \tag{4.25}$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + C(y) \tag{4.26}$$

$$(x^2 + y^3)dy = \int x^2 y dy + \int y^3 dy = \tag{4.27}$$

$$\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C(x) \tag{4.28}$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \tag{4.29}$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C \tag{4.30}$$

está será nossa solução

Exemplo 6 *Equação Diferencial Exata*

$$ysin(xy)dx + xsin(xy)dy = 0$$

Vamos verificar se esta equação é exata,usando o mesmo teorema que usamos anteriormente

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ysin(xy) \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = yxcos(xy) + sin(xy) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xsin(xy) \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = yxcos(xy) + sin(xy) \tag{4.34}$$

Então temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = yxcos(xy) + sin(xy)$$

ou seja esta equação possui uma função que a originou.Agora vamos encontra-la.

$$ysin(xy)dx = \int ysin(xy)dx = \tag{4.35}$$

$$y \int sin(xy)dx = \tag{4.36}$$

$$-y\frac{cos(xy)}{y} + C(y) = \tag{4.37}$$

$$-cos(xy) + C(y) \quad ; y \neq 0 \tag{4.38}$$

$$xsin(xy)dy = \int xsin(xy)dy = \tag{4.39}$$

$$x \int sin(xy)dy = \tag{4.40}$$

$$-x\frac{cos(xy)}{x} = \tag{4.41}$$

$$-cos(xy) + C(x) \quad ; x \neq 0 \tag{4.42}$$

$$F(x,y) = -cos(xy) \tag{4.43}$$

$$F(x,y) = -cos(xy) = C \tag{4.44}$$

Esta será a função, ou seja a solução procurada

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Bortolossi,Humberto José. *Cálculo Diferencial a várias variáveis:uma introdução á teoria de otimização.*Rio de Janeiro:ED.PUC-Rio;São Paulo:Loyola,2002.

[2] Praciano-Pereira, T. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*

http://www.uvanet.br/matematica/livros.php

[3] Wikipedia - uma enciclopédia livre na Internet http://www.wikipedia.org

[4] Louis Leithold*O Cálculo com Geometria Analítica*-Vol 1-Copyright 1994 por editora HARBRA ltda.

[5] Louis Leithold*O Cálculo com Geometria Analítica*-Vol 2-Copyright 1994 por editora HARBRA ltda.

[6] Gonçalves,Mirian Buss. *Cálculo B:Funções de Várias Variáveis Integrais Duplas e Integrais Triplas*Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming-São Paulo:MAKRON BOOKS,1999.