

Teorema de Green

Tarcisio Praciano-Pereira¹

Sobral Matemática
Sobral, 5 de maio de 2013

¹tarcisio@member.ams.org

Há muitos tipos de generalização da integral, aqui vou tratar das generalizações simples, dentro do quadro dum curso de Cálculo Avançado com o objetivo de apresentar os teoremas integrais fundamentais que vão aparecer ao final do capítulo: Teoremas de Stokes e de Green.

0.1.1 Introdução

A idéia fundamental é que uma integral pode ser escrita no formato

$$\int_X f(x) \cdot dx ; x \in X$$

e dx significando a "unidade" de medida "natural" do domínio X , pode ser

- a unidade de medida sobre uma variedade de dimensão 1, *comprimento*
- ou, no caso de uma variedade de dimensão dois *área*.

Se f for um *campo vetorial* nós precisaremos que o produto pela diferencial seja um dos *produtos com vetor*, o produto vetorial ou o produto escalar, e esta escolha será feita em função do resultado que desejarmos: um vetor ou um número.

Esta introdução está sendo feita de propósito para mostrar à leitora que os conceitos em Matemática são construídos com um objetivo mais ou menos definidos sendo assim *conceitos relativos* e assim alertar a leitora que existem muitos tipos diferentes de integral pese que todos com uma mesma construção básica, uma *soma de Riemann*, *integração no sentido de Riemann* ou as generalizações destas que conduzem à *integração no sentido de Lebesgue*.

Vou usar, como material conhecido e necessário para esta exposição a integral de linha, o conceito de curva, a parametrização de um objeto no espaço, as fórmulas básicas de mudança de parametrização. Estes conceitos estão todos expostos no texto

http://www.multivariado.sobralmatematica.org/textos/IntegralDupla_2p.pdf

Algumas vezes serei forçado a usar a expressão "é conhecido que" quando pedirei à leitora que compreenda que estou me referindo a resultados que deveriam ter sido apresentados como prerequisites à este trabalho, o problema que esta frase representa pode ser resolvido com suas perguntas em sala de aula ou escrevendo-me por e-mail.

O símbolo $\int_a^b f(t)dt$ pode representar um vetor ou um número, tudo depende da "interpretação" que pudermos dar a f ou da operação que definirmos entre f e dt e, obviamente, qual o resultado que precisamos.

- No caso do "trabalho" fazemos um produto escalar entre uma função vetorial, comumente chamada "campo vetorial" f e o "vetor tangente" dt à curva ao longo da qual o trabalho é exercido.

- Quando quisermos calcular a distância percorrida por uma partícula sobre um caminho arranjamos para que dt represente comprimento de arco e f representa a intensidade variável do movimento (velocidade).

Neste último caso podemos usar uma função peso que pode ser interpretada como distribuindo a “dificuldade” ao longo do percurso cuja interpretação pode ser a existência dum comprimento de arco mais “qualificado” medindo algum fenômeno que se propaga ao longo do arco considerado, tais pesos são usados com frequência em teoria dos grafos para qualificar os distintos caminhos entre os nós, e a ideia é semelhante aqui ou lá (em teoria dos grafos).

A Física foi o motor central que impulsionou grande parte das construções matemáticas dos séculos 18 e 19 ainda que algumas vezes para responder às curiosidades naturais sobre o Universo que nos envolve. Vamos aqui estudar diversos tipos de operações usuais entre vetores e discutir a interpretação destes resultados. A Física dos séculos 18 e 19 influenciou fortemente as fórmulas que possuímos e inclusive deu-lhes os nomes: *fluxo*, *circulação*, *rotacional*, *divergente*

O resultado disto é que a nomenclatura que temos para as distintas interpretações que damos à integral guarda esta história.

Embora estes *instrumentos* tenham origem na Física, eles terminaram encontrando aplicações em outras ciências, mormente na biologia e na economia e mais recentemente na ecologia.

O plano do trabalho é

- pre-requisito integral de linha e a orientação dos caminhos;
- pre-requisito derivadas parciais, derivação implícita;
- pre-requisito a fórmula de mudança de variável na integral;
- Campo escalar, campo vetorial $(P(x, y), Q(x, y))$, a derivada de um campo escalar; diferencial exata
- exemplos
- O teorema de Clairot-Schwarz
- independência de caminhos e campo conservativo
- Teorema de Green - forma trivial
- Teorema de Green
- O teorema de Stokes para uma superfície $z = F(x, y)$
- Teorema de Stokes e o Teorema Fundamental do Cálculo Integral
- Esboço para uma demonstração geral do teorema de Stokes

Existem vários tipos de *integral de linha*, numéricas ou vetoriais, depende do tipo de operação que aparecer no integrando. Por exemplo, a Física define **trabalho**

$$\int_{\gamma} \vec{F}(s) \cdot ds$$

onde temos o produto escalar de uma *força* F aplicada a uma partícula que percorre uma curva γ no espaço. Vamos discutir este tipo de integral aqui como preparação para integral de superfícies.

Na linguagem habitual deste contexto as *funções multivariadas* de variável real são chamadas de *campos vetoriais* ou *campos escalares*.

Vamos nos fixar nesta seção nas integrais da forma

$$\int_X f(t) \cdot dt \tag{1}$$

que é a integral que define trabalho, em que um função vetorial, f é multiplicada escalarmente por um elemento do espaço vetorial, (do domínio) em que ela está definida.

Será, portanto, de funções vetoriais de variável vetorial, que trataremos aqui.

0.2 Teorema de Green

0.2.1 Campos vetoriais conservativos ou não

As funções univariadas têm uma derivada. As funções multivariadas e as funções vetoriais (campos vetoriais) têm várias derivadas parciais que formam sua matriz jacobiana que é a *derivada* destas funções. O nome de jacobiana que foi dado a desta matriz é consequência de que no começo os matemáticos não compreenderam que a *matriz jacobiana* era simplesmente a *derivada*, como a *hessiana* é a segunda derivada.

A *matriz jacobiana*, ou simplesmente a *jacobiana* é uma matriz de funções. Nem sempre uma matriz de funções é uma jacobiana, (uma derivada), e este pequeno detalhe se encontra no âmago de toda a história... é ele que irá dividir os campos entre *conservativos* e *não conservativos* ou as integrais em *independentes do caminho* ou *dependentes do caminho*.

A lista de exercícios seguinte é um laboratório preparatório para a demonstração do Teorema de Green.

Exercícios 1 Derivadas parciais

1. *Selecione os itens “verdadeiros” dentro as opções apresentadas.*

Derivadas parciais

- (a) (V)[](F)[] Sendo $F(x, y) = x \cos(y)$ a jacobiana de F é

$$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

(b) (V)[](F)[] Sendo $F(x, y) = x \cos(y)$ a jacobiana de F é

$$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

(c) (V)[](F)[] Sendo $F(x, y) = (1, xy, xy)$ a jacobiana de F é

$$J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,x} & F_{1,y} \\ F_{2,x} & F_{2,y} \\ F_{3,x} & F_{3,y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(d) (V)[](F)[] Sendo $F(x, y, z) = x \cos(y) + z \cos(x)$ que é um campo escalar, o gradiente de $F = \nabla(F)$ é a matriz formada por suas derivadas parciais

$$\begin{cases} \nabla(F) = J(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) - z \sin(x) & -x \sin(y) & \cos(x) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

é um campo vetorial.

(e) (V)[](F)[] Sendo $F(x, y, z) = (y, z, x)$ que é um campo vetorial, a jacobiana de F é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

e $\det(J(F)) = 1$

2. Quando um campo vetorial é uma derivada.

Derivadas e campo vetorial

(a) (V)[](F)[] Se $f(x, y) = xy$ então f é um função escalar de variável vetorial e pode ser uma derivada.

(b) (V)[](F)[] Potencial Como $f(x, y) = xy$ é um função escalar de variável vetorial, um campo escalar então f não pode ser uma derivada. Ela mede (ou descreve) uma quantidade, é um potencial.

(c) (V)[](F)[] Campo vetorial Sendo $F(x, y, z) = (x, y, xy, z)$, então F é um campo vetorial e pode ser uma derivada. Se for uma derivada de uma função continuamente diferenciável, as derivadas mistas serão iguais (teste).

(d) (V)[](F)[] Campo vetorial Sendo $F(x, y, z) = (x, y, xy, z)$, então F é um campo vetorial mas não é uma derivada porque, como tem três variáveis teria que ter apenas três derivadas parciais como coordenadas na imagem.

(e) (V)[](F)[] A função $f(x) = (x, 2y)$ está mal definida.

3. Curvas

Selecione os itens “verdadeiros” entre as opções listadas.

Círcuito fechado

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (7)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (8)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (9)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (10)$$

(a) (V)[](F)[] As curvas α_1, α_2 se encontram no ponto $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

(b) (V)[](F)[] As curvas α_1, α_2 se encontram no ponto $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

(c) (V)[](F)[] Como a curva α_1 passa nos pontos A, B , definidos nos itens anteriores, então podemos redefinir α_1 como

$$\alpha_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); t \in [-r, r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_1 é um caminho entre os pontos A, B .

(d) (V)[](F)[] Como a curva α_2 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos redefinir α_2 como

$$\alpha_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_2 é um caminho entre os pontos A, B .

(e) (V)[](F)[] curva fechada Como as curvas α_1, α_2 passam nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos definir α como

$$\alpha(t) = \begin{cases} t \in [-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}]; \alpha_1(t); \\ t \in [\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}]; \alpha_2(t); \end{cases} \quad (11)$$

e diremos que α é um círculo fechado começando em A e terminando em A .

4. Curvas fechadas

Selecione os itens “verdadeiros” entre as opções listadas.

Círcuito fechado Entender curvas e suas parametrizações.

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (12)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (13)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (14)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (15)$$

(a) (V)[](F)[] As curvas α_3, α_4 se encontram no ponto $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

(b) (V)[](F)[] As curvas α_3, α_4 se encontram no ponto $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

(c) (V)[](F)[] Como a curva α_3 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos **redefinir** α_3 como

$$\alpha_3(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); t \in [-r, r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_3 é um caminho entre os pontos A, B , (vai no sentido de B para A).

(d) (V)[](F)[] Como a curva α_4 passa nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos **redefinir** α_4 como

$$\alpha_4(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que α_4 é um caminho entre os pontos A, B , (vai no sentido de A para B).

(e) (V)[](F)[] Como as curvas α_3, α_4 passam nos pontos A, B definidos nos itens anteriores então podemos definir β como

$$\beta(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \alpha_3(t); \\ t \in [r, -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{\frac{13}{2}}; \quad (16)$$

e diremos que β é um círculo fechado começando em A e terminando em A .

5. Curvas fechadas e gnuplot

Selecione os itens “verdadeiros” entre as opções listadas.

Círculo fechado Objetivo usando gnuplot para entender curvas e suas parametrizações.

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (17)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (18)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (19)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (20)$$

(a) (V)](F)] Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_2(t)= t; y_2(t) = pow(t,2) - 4;
plot x_1(t) , y_1(t), x_2(t) , y_2(t);
```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_2 .

(b) (V)](F)] Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
plot x_3(t), y_3(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas α_3, α_4 sendo então possível definir o círculo (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_3(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (21)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ .

(c) (V)](F)] Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
plot x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_4 sendo então possível definir o círculo (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_1(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (22)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ .

(d) (V)](F)] Os comandos do gnuplot

```

pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
plot x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t)

```

mostram o gráfico das curvas α_1, α_3 sendo então possível definir o círculo (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_1(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_3(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (23)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ .

(e) (V)[](F)[] Os comandos do gnuplot

```

pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_2(t) = t; y_2(t) = pow(t,2) - 4 pow(t,2);
x_4(t) = t; y_3(t) = - pow(t,2) + 31/2.0;
plot x_2(t), y_2(t), x_4(t), y_4(t)

```

mostram o gráfico das curvas α_2, α_4 sendo então possível definir o círculo (curva fechada) γ com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_2(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (24)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$ e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva γ .

6. Integral de linha

Selecione os itens “verdadeiros” entre as opções listadas.

Derivadas Parciais

Considere o campo vetorial

$$(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)); \quad (25)$$

$$P(x, y) = y; Q(x, y) = -x; \quad (26)$$

e as curvas

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (27)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (28)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (29)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (30)$$

Solução 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\alpha_1} Pdx + Qdy + \oint_{\alpha_2} Pdx + Qdy = \\ \int_{-r, \alpha_1}^r ydx - xdy + \int_{r, \alpha_2}^r ydx - xdy = \\ \int_{-r, \alpha_1}^r (9 - t^2)dt - t(-2tdt) + - \int_{-r, \alpha_2}^r (t^2 - 4)dt - (t)(2tdt) = \\ \int_{-r}^r 9 - t^2 + 2t^2dt + - \int_{-r}^r t^2 - 4 - 2t^2dt = \\ \int_{-r}^r 9 + t^2 - (-4 - t^2)dt = \int_{-r}^r 9 + 4 + t^2 + t^2 = \\ \int_{-r}^r 13 + 2t^2 = 13t + 2/3t^3|_{-r}^r = 13 * (2r) + 2/3(2r^3) = \\ \approx 88.38300490227493705361 \end{array} \right. \quad (31)$$

que se encontram todas nos pontos $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ ou no ponto $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$.

O símbolo \oint representa uma integral que está sendo calculada ao longo de uma curva e é chamado de "integral de linha". O seu valor se reduz a uma integral comum do Cálculo I quando escrevermos uma parametrização para a curva sobre um intervalo $[a, b]$.

$$(a) \frac{(V)[](F)[]}{\alpha_1} \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt$$

em que $[A_1, B_1]$ é um intervalo de parametrização da curva α_1 .

$$(b) \frac{(V)[](F)[]}{\alpha_1} \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt$$

em que $[A_1, B_1]$ é um intervalo de parametrização da curva α_1 , a menos do sinal. Depende do sentido do percurso.

$$(c) \frac{(V)[](F)[]}{\alpha_1} \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt = \pm 13$$

$$(d) \frac{(V)[](F)[]}{\alpha_1} \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 13.4$$

$$(e) \frac{(V)[J(F)]}{\alpha_1} \oint P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 273.4$$

7. Seja uma função diferenciável $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Escolha e justifique como será sua derivada:

- 1) $J(F) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 2) $J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}^m$
 3) $J(F) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ 4) $J(F) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{nm}$

8. Escreva a expressão diferencial (o diferencial) da função

$$F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

9. Descubra uma função cuja derivada seja

$$a) \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2y & 2xy \\ -2xyy & 2y \end{pmatrix} \qquad (32)$$

10. Derive implicitamente

$$\frac{z = \quad z = \quad z =}{1) xy \quad 2) 2xz + xy \quad 3) x^2 + 2xyz + y^2}$$

0.2.2 Forma trivial do Teorema de Green

Vamos descobrir, nesta seção, um dos teoremas mais intrigantes e envolventes do Cálculo Diferencial e Integral. Ele representa uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo Integral e serve para associar integrais cujos domínios tem uma diferença na dimensão de uma unidade: uma região Ω e sua fronteira $\partial\Omega$.

Aqui a linguagem geométrica é deficiente e temos que usar um conceito que supere esta deficiência. Dentro do Cálculo Avançado $\Omega, \partial\Omega$ são uma *superfície* e a sua *borda*, no plano uma região e sua fronteira. No espaço abstrato uma *variedade não linear* de dimensão n e a sua fronteira, uma *variedade não linear* de dimensão $n - 1$.

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral diz que

$$\int_a^b df = \int_{[a,b]} df = \int_{[a,b]} df = \int_{[a,b]} g(t)dt = f_{\{a,b\}} = \int_{\{a,b\}} f \qquad (33)$$

onde podemos ver uma “variedade” de dimensão 1 representada pelo intervalo $[a, b]$ e a sua fronteira, uma “variedade” de dimensão zero representada pela reunião de dois pontos. Veremos que tanto o teorema de Green, como o teorema de Stokes podem ser escritos desta forma

$$\int_R dw = \int_{\partial R} w \qquad (34)$$

em que, numa visão mais geral do teorema, w é uma *forma diferencial* e dw é a derivada desta forma diferencial.

Eu não vou chegar aqui a apresentar o teorema nesta forma mais geral, vou me limitar à formulação típica do Cálculo Avançado, ver o livro de Cartan, *Formes différentielles* - Herman - 1970 que é o texto clássico em que se pode encontrar a teoria das formas diferenciais e possivelmente representa o *comptes rendues* de Henri Cartan que se diz que dedicou a sua vida a compreender as formas diferenciais e possivelmente explicar de maneira *simples* o teorema de Stokes.

Vou começar construindo a noção de campo conservativo. Discutir as propriedades dum campo escalar conservativo.

Precisamos dos conceitos de *curva fechada* γ ,

Definição 1 *Curva fechada é aquela que, em qualquer parametrização,*

$$[a, b] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in \mathbf{R}^n ; \gamma(a) = \gamma(b)$$

Em outras palavras, a extremidade final coincide com a inicial.

Se F for uma função diferenciável, então, *naturalmente*, dF é uma *diferencial exata*.

Definimos assim uma **diferencial exata**, uma expressão obtida pela derivação (implícita) de uma função.

A derivada implícita de uma expressão como $F(x, y, z) = 0$ produz uma *diferencial exata* se F representar uma expressão diferenciável. O resultado será

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0; \quad (35)$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} ; Q = \frac{\partial F}{\partial y} ; R = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (36)$$

Esta definição não é boa porque ela não oferece um método para verificar explicitamente quando uma expressão é uma *diferencial exata*, em breve estaremos em posição de fazer uma re-definição acompanhada de um método de verificação da mesma.

A forma típica com que escrevemos diferenciais é:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy ; P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \dots \quad (37)$$

e, por exemplo, se $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ for uma diferencial exata, então existe uma função bivariada, de classe \mathcal{C}^1 em um aberto do \mathbf{R}^2 , F , tal que

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} ; Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Vamos escrever a teoria aqui para \mathbf{R}^2 uma extensão para $n > 2$ é relativamente simples e isto será feita mais a frente. Estou usando a metologia da construção por exemplos que serão generalizados.

Exemplos 1 Derivadas e o teorema de Schwarz

1. Verifique quais das expressões abaixo é uma diferencial exata procurando por uma expressão cuja derivada implícita lhe corresponda.

dF	dF	dF
a) $3xdx$	b) $ydx + xdy$	c) $y^2dx + 2xydy$
d) $y^2dx + 2ydy$	e) $yzdx + xzdy + xydz$	f) $e^{-x^2} dx$

2. Para cada uma das expressões $Pdx + Qdy$ da questão anterior, calcule $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$ em que γ é o círculo unitário \mathbf{S}^1 orientado positivamente.

Ver na figura (fig. 2), página 16, o significado da orientação das curvas, \oint indica que a integral deve ser calculada no sentido positivo (contrário aos dos ponteiros do relógio) sobre a curva.

3. Prove que se γ for uma curva fechada e $Pdx + Qdy$ for uma diferencial exata, então

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$$

4. Calcule as derivadas mistas de ordem 2 das seguintes funções

$F(x, y)$	$F(x, y, z)$	$F(x, y, z, w)$
1) $x^2y \cos(xy)$	2) $xyz \sin(xy)$	3) $x^2 \cos(xz)y$
4) $\cos^2(xy)x^2y^3$	5) $x^2yz^2e^{xy}$	6) $e^{xyz^2}z^3$

5. Teorema de Schwarz Expanda os quocientes de diferenças que, respectivamente, definem $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ e verifique que, se cada uma das derivadas de primeira ordem for contínua, então

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Identifique exatamente onde é necessário a continuidade de cada uma das derivadas de primeira ordem.

6. independência da parametrização

(a) Considere a parametrização

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))_{t \in [0, 1]} = \mathbf{S}^1$$

para o círculo trigonométrico. Calcule o comprimento de arco considerando esta parametrização.

(b) Considere a parametrização

$$(\cos(t), \sin(t))_{t \in [-\pi, \pi]} = \mathbf{S}^1$$

para o círculo trigonométrico. Calcule o comprimento de arco considerando esta parametrização.

(c) Verifique que as duas curvas definidas nos itens anteriores são fechadas;

Observação 1 A independência de caminho

Trocar a parametrização força uma troca na escala, sem dúvida, isto não impede que falemos em independência de parametrização.

Outra coisa é independência de caminho. As funções multivariadas oferecem uma nova visão. Veja a figura (fig. 1) página 13,

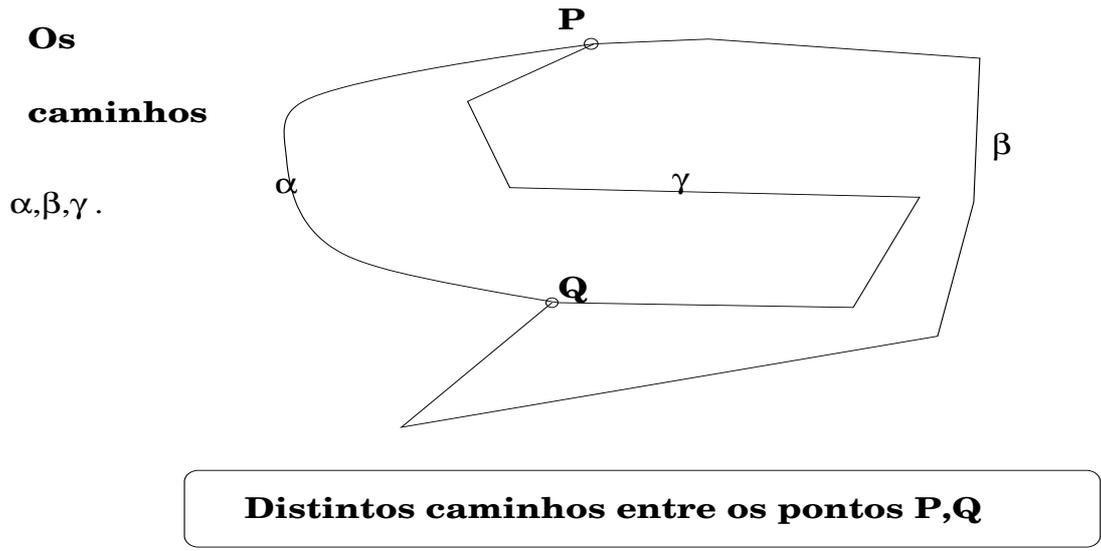


Figura 1: Os distintos caminhos entre P, Q no domínio Ω , ; α, β, γ

Vamos dizer que uma expressão diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

é independente de caminhos, se se dados dois pontos M, N e dados dois quaisquer caminhos que liguem estes dois pontos, γ, α então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\alpha} Pdx + Qdy$$

Se uma expressão diferencial for independente de caminhos, ela é uma diferencial exata, porque tem uma primitiva com uma condição inicial P escolhida dentro do domínio de definição da diferencial. Por que, dado um outro ponto qualquer X a integral

$$\oint_P^X Pdx + Qdy \tag{38}$$

está bem definida (pela independencia de caminhos).

7. Mostre que se $Pdx + Qdy$ for uma diferencial exata, então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$$

para qualquer curva fechada.

8. Mostre que a equação

$$F(X) = \oint_M^X Pdx + Qdy$$

define uma função no domínio em que

$$Pdx + Qdy$$

estiver definida, se $Pdx + Qdy$ for uma diferencial exata.

9. Considere uma diferencial exata $dF = Pdx + Qdy$ e um ponto M no domínio Ω em que dF está definida. Chame F a única função definida por

$$F(X) = \oint_M^X Pdx + Qdy$$

e calcule $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$. Sugestão, como dF não depende de caminhos, use caminhos paralelos aos eixos ao calcular os quocientes de diferenças.

10. Calcule $\oint_E (y + 3x)dx + (y - x)dy$ em que E é a curva $x^2 + 4y^2 = 4$

11. Qual das frases abaixo descreve o significado de

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$$

- É o comprimento de arco de γ .
- É o trabalho exercido pela força (P, Q) ao longo da trajetória γ .
- É nulo.
- É a área de uma região.

12. Considere a expressão diferencial $Pdx + Qdy$ em que P, Q são funções integráveis nas variáveis x, y . Verifique que

- $\int_{\Omega} \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy$
- $\int_{\Omega} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx$

em que Ω é uma região do plano limitada e sua fronteira $\partial\Omega$ tem um comprimento finito.

13. Teorema de Green Verifique que, se

$$Pdx + Qdy$$

for uma diferencial exata, e Ω for um domínio do plano limitado por uma curva curva fechada $\partial\Omega$, então

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

Observação 2 Campo conservativo

Como prometemos na introdução, vamos definir matematicamente o que os físicos chamam campo conservativo.

Definição 2 Campo conservativo Os campos conservativos são as campos escalares que definem diferenciais exatas, no formato da integral de linha do Teorema de Green

$$Pdx + Qdy$$

ou ainda aqueles que tornam o Teorema de Green trivial, ambas as integrais são nulas para qualquer curva fechada.

Isto quer dizer que o trabalho de um campo conservativo ao longo de uma curva fechada, é zero.

O pêndulo, sob a ação da gravidade e submetido ao atrito deixa de ser um campo conservativo produzindo um resíduo que leva o pêndulo a parar depois de algum tempo.

Mas o Teorema de Green vale em geral para campos conservativos ou não:

Teorema 1 Teorema de Green

Seja $(P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial. Então

$$\int_{\Omega} \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$$

O integrando da integral dupla é obtido pela derivação da forma diferencial $Pdx + Qdy$ de acordo com as regras da diferenciação exterior que foram criadas para produzir formas multilineares alternadas:

$$d(Pdx + Qdy) = \tag{39}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx dx + \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy dy = \tag{40}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx = \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy \tag{41}$$

em que $dx dx = 0$ e $dx dy = -dy dx$. O uso destas regras facilmente nos lembra o formato do teorema.

A integral de linha, que o símbolo \oint indica que ela deve ser calculada no sentido positivo da fronteira de Ω , mede a variação total do campo vetorial (P, Q) sobre Ω e é nestes termos que o Teorema de Green é uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo.

Veja que ele relaciona os valores da derivada (exterior) do campo diferencial sobre um domínio de dimensão dois, uma variedade não linear de dimensão dois, e calcula a variação da primitiva ao longo de um domínio de dimensão 1, uma variedade não linear de dimensão um, que é a fronteira de Ω .

A integral de linha trouxe um novo conceito que era pouco visível nas integrais simples (onde ele já existia), o sentido em que a integral é calculada. Este aspecto agora se reveste de uma outra característica, agora dizemos,

- Calculamos a integral de f sobre γ ;
- escrevemos $\int_{\gamma} f$
- A orientação de γ é positiva (ou negativa).
- Antes dizíamos: $\int_a^b f$ ou $\int_b^a f$ com a observação de que os sinais eram inversos.

Veja na figura (fig. 2) página 16,



Figura 2: A fronteira de um domínio inclui as fronteiras dos seus buracos... a orientação da fronteira pode ser determinada por tangência.

É fácil de falar de orientação e até expressar de forma geométrica o que isto significa. A definição formal é mais complicada, e nós a deixaremos de lado por enquanto uma vez que podemos facilmente expressar o conceito com auxílio de desenhos geométricos. Voltaremos a este assunto, como uma definição formal no estudo das superfícies quando o apoio geométrico se tornar difícil.

Diremos que uma orientação é a positiva se ela contrariar o sentido em que se movem os ponteiros do relógio. Na (fig. 2) você pode ver uma forma geométrica de definir orientação. Veja página 16. Observe que a orientação natural anti-horária do percurso dos ponteiros do relógio e mais do que uma simples convenção, ela surge, naturalmente quando calculamos a derivada de $(\cos(t), \sin(t))$ quando o vetor tangente indica qual é a orientação natural desta curva.

Uma curva, no interior de um domínio pode ter uma orientação incompatível com a orientação da fronteira.

Veja na figura (fig. 3) página 17, a curva γ , no interior de Ω que não pode ser orientada de forma compatível com a fronteira. Na figura mencionada, há tres curvas fechadas que estão sendo usadas para transferir a orientação. Elas mostram a compatibilidade da orientação da fronteira de Ω e se orientarmos a curva γ de forma compatível com alguma das componentes de $\partial\Omega$ esta orientação fica incompatível com alguma outra componente de $\partial\Omega$.

Na mesma figura você pode ver

- as componentes de $\partial\Omega$ em A, B, C,
- observar a compatibilidade da orientação destas componentes,
- e verificar que a orientação da curva γ é incompatível (contrária) com a orientação de $\partial\Omega$,
- Na região B um “transferidor de orientação” mostra que a orientação de γ é compatível com a orientação da componente de $\partial\Omega$ em B.

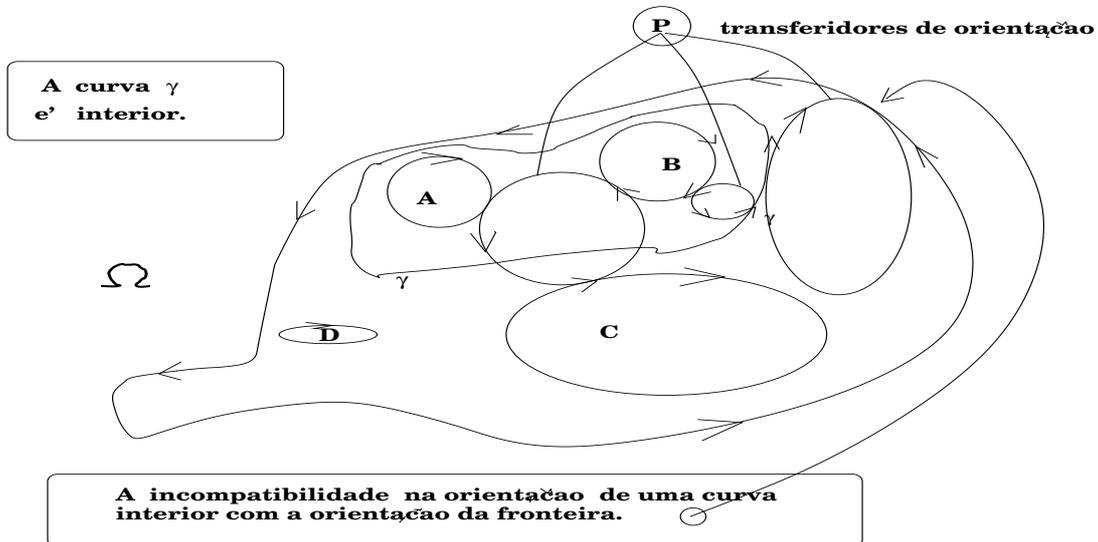


Figura 3: A orientação de uma curva pode ser incompatível com a orientação da fronteira.

14. Calcule o trabalho do campo vetorial

$$(y + x)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

ao longo da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

15. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy$$

em que γ é a fronteira do retângulo tendo por vértices

$$(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1).$$

16. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

em que γ é a fronteira do retângulo tendo por vértices

$$(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1).$$

17. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

em que γ é a fronteira do círculo trigonométrico.

18. Verifique que $\oint_{\partial\Omega} xdy$ é a área de Ω sob a suposição de que esta área exista e e que sua fronteira tenha comprimento finito. Calcule a área do círculo trigonométrico usando esta fórmula.

19. Analise a figura (fig. 4) página 18,

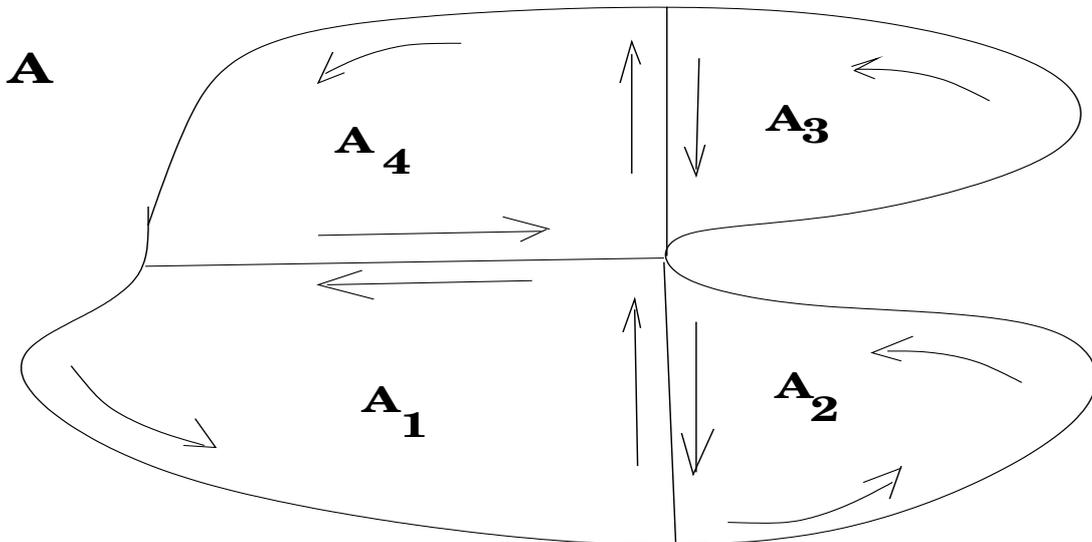


Figura 4: A independência de caminhos; as curvas são percorridas de acordo com a indicação das setas.

e mostre que

$$\oint_{\partial A} Pdx + Qdy = \sum_{k=1}^4 \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy$$

desde que nenhuma das curvas que aparecem no desenho passe por um ponto de singularidade de P ou de Q .

0.3 Primeira demonstração do Teorema de Green

Vou demonstrar o Teorema de Green num caso particular que o leitor logo verá que um dos *elementos* da demonstração geral, quando o domínio da integral dupla é um retângulo com lados paralelos ao eixos coordenados.

E mesmo assim vou considerar o retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$ para que os cálculos fiquem bem simples. O caso geral é obtido com deformações deste caso simples que chamamos de *reparametrização*.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \tag{42}$$

$$\int_0^1 (P(t, 1) - P(t, 0)) dt = I \tag{43}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \tag{44}$$

$$\int_0^1 (Q(1, t) - Q(0, t)) dt = J \tag{45}$$

A figura (fig. 5) página 19, ilustra o integrando nas integrais de linha

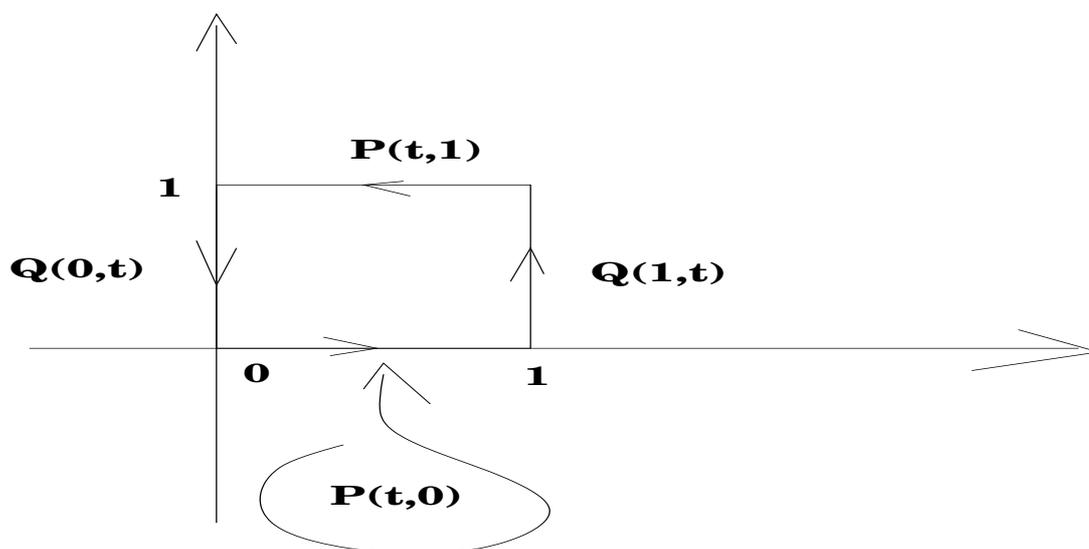


Figura 5: O caminho na fronteira do retângulo

parametrizadas sobre o intervalo $[0, 1]$. Em I fizemos uma escolha quanto à orientação do caminho que força a escolha feita em J para dotar a fronteira do retângulo a ter uma orientação homogênea. Claro que poderíamos ter começado pela escolha da orientação em J forçando posteriormente a escolha da orientação em I .

Somando as integrais em I, J temos

$$I - J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \quad (46)$$

$$= \int_0^1 (P(t, 1) - P(t, 0)) dt - \int_0^1 (Q(1, t) - Q(0, t)) dt = \quad (47)$$

$$= \int_0^1 (P(t, 1) - P(t, 0)) dt + \int_1^0 (Q(1, t) - Q(0, t)) dt = \quad (48)$$

$$= \int_0^1 (P(t, 1) dt + \int_1^0 P(t, 0)) dt + \int_1^0 (Q(1, t) + \int_0^1 Q(0, t)) dt = \quad (49)$$

$$= \int_0^1 (P(t, 1) dt + \int_0^1 Q(0, t)) dt + \int_1^0 P(t, 0) dt + \int_1^0 (Q(1, t) dt = \quad (50)$$

$$\int_{\partial R} P dx + Q dy \quad (51)$$

e obviamente uma compatibilização entre as expressões algébricas e geométrica pode ser obtida com uma parametrização adequada...

0.4 Teorema de Green

Uma motivação geométrica para uma demonstração do teorema nos é oferecida pela figura (fig. 4) na página 18. Um domínio arbitrário não é possível ser pensado, ter que ser no mínimo uma região que tenha medida (no sentido da teoria das medidas). As complicações teóricas de uma discussão deste tipo podem ser bem intrincadas. Vamos nos deter num domínio que poderíamos dizer possível de ser encontrado em aplicações do teorema, que é algo sugerido pela figura (fig. 4). Não é retangular, tão simples como o retângulo que usamos na primeira versão da demonstração, mas pode ser dividido em sub-domínios por retas paralelas aos eixos. Qualquer sub-domínio destes poderia ser obtido por uma parametrização adequada do retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$ e vamos então supor que temos n tais parametrizações sendo n o número de “peças” obtidas do domínio original com a subdivisão por um malha de retas paralelas aos eixos.

Vamos designar, sucessivamente cada um desses subdomínios com

$$A_1, p_1, \dots, A_n, p_n \quad (52)$$

em que p_i representa a correspondente parametrização de A_i sobre $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$\int_{A_i} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} d\rho d\theta \quad (53)$$

$$= \int_0^1 (P(x(\rho), y(1)) - P(x(\rho), y(0))) \frac{dx}{d\rho} d\rho = I_i \quad (54)$$

$$\int_{A_i} \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} d\rho d\theta \quad (55)$$

$$= \int_0^1 (Q(x(1), y(\theta)) - P(x(0), y(\theta))) \frac{dy}{d\theta} d\theta = J_i \quad (56)$$

$$(57)$$

em que podemos, com algum esforço, reconhecer na última equação

$$\int_{\partial A_i} P dx + Q dy \quad (58)$$

Na sucessão de equações acima $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}$ representa o determinante da Jacobiana da mudança de coordenadas p_i .

Somando os pedaços em que foi subdividido o domínio e somando as duas expressões I_i, J_i temos finalmente

$$\int_A \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \int_A \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy = \quad (59)$$

$$= \int_A \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \quad (60)$$

$$= \int_{\partial A} P dx + Q dy \quad (61)$$

como queríamos demonstrar.

Vimos que as peças centrais da demonstração do teorema foram um caso particular e uma mudança de variável transformando as contas do caso geral de volta para o caso particular. Vamos usar este mesmo método para obter a generalização do teorema de Green que é o teorema de Stokes na próxima seção.

0.5 O teorema de Stokes

Vamos apresentar e demonstrar o teorema de Stokes nesta seção. Se conta à voz pequena que este foi o projeto de vida Henry Cartan: entender a apresentar o Teorema de Stokes de uma forma *simples* em toda sua generalidade. Para isto construiu a teoria da integração em variedades diferenciáveis, ver [?].

É óbvio que estas palavras sugerem que um trabalho monumental como este tenha sido feito por um único homem, mas é claro que Cartan não teria conseguido produzir a teoria vivendo isolado em uma ilha. Podemos facilmente ver na teoria a contribuição de muitos mestres que foram companheiros de Cartan no grupo Bourbaki. Nesta exposição vamos nos resumir a uma apresentação que fica dentro do quadro de Cálculo Avançado, mas vamos fazer um uso moderado de derivada exterior.

O Teorema de Stokes estabelece a relação entre uma forma diferencial e sua derivada exterior definidas numa superfície. Vamos fazer a preparação geométrica para os cálculos. Temos que estabelecer as relações entre os diferenciais numa mudança de variáveis pois queremos aproveitar o Teorema de Green, então iremos transformar a expressão do Teorema de Stokes para a expressão do teorema que já demonstramos.

0.5.1 Mudança de variável no \mathbf{R}^3

Nem curvas nem superfícies podem em geral ser parametrizadas de uma única forma. É preciso deixar claro que estamos usando casos particulares, embora eles na verdade representem os *módulos* da construção geral. Para parametrizar objetos precisamos de um *atlas* que é um conjunto de parametrizações sobrepostas. Para calcular a integral de uma superfície associada a um *atlas* temos que levar em consideração as interseções à semelhança da fórmula

$$\text{area}(A \cup B) = \text{area}(A) + \text{area}(B) - \text{area}(A \cap B) \quad (62)$$

Vamos considerar numa demonstração inicial do Teorema de Stokes que a superfície \mathcal{S} tenha uma parametrização sobre um único retângulo. Seja a imagem de uma parametrização do retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$.

Nem sempre esta será a forma ideal de considerar a parametrização de uma superfície, por exemplo, a esfera se parametriza melhor sobre $[0, R] \times [0, 2\pi]$, entretanto este é um detalhe técnico que pode ser considerado em casos específicos, sem que a “restrição” ora considerada seja afetada.

Na sequência vou considerar uma superfície contida no \mathbf{R}^3 com a hipótese de que ela pode ser parametrizada em retângulo. Este é o caso comum de funções $z = F(x, y)$ definidas em uma região do plano que contenha o retângulo que vou considerar como domínio da parametrização. Vou fazer mais uma particularização que me vai deixar os cálculos ainda mais simples, o domínio da parametrização será $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{r} \mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3 \quad (63)$$

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3 \quad (64)$$

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v)} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y, Z)} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \quad (66)$$

A notação $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v)}$ nos libera de expressar de forma mais detalhada o conjunto das derivadas parciais que ficam implícitas na notação e ainda nos permitem escrever a Jacobiana da matriz recíproca de forma simples. Mas em algum momento vamos que ter desmembrar a notação matricial. $\frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y, Z)}$.

Se considerarmos agora uma forma diferencial definida em \mathcal{S}

$$PdX + QdY + RdZ \quad (67)$$

Podemos transformar o valor da integral, com a parametrização r obtendo

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \quad (68)$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv \quad (69)$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial v} dv \quad (70)$$

$$(71)$$

Vamos agora considerar uma forma diferencial definida sobre \mathcal{S} e calcular sua derivada exterior:

$$\omega = P(X, Y, Z)dX + Q(X, Y, Z)dY + R(X, Y, Z)dZ \quad (72)$$

$$d\omega = \quad (73)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} dY dX + \frac{\partial P}{\partial Z} dZ dX + \frac{\partial Q}{\partial X} dX dY + \frac{\partial Q}{\partial Z} dZ dY + \frac{\partial R}{\partial X} dX dZ + \frac{\partial R}{\partial Y} dY dZ = \quad (74)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right) dX dY + \left(\frac{\partial R}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}\right) dY dZ + \left(\frac{\partial R}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Z}\right) dX dZ = \quad (75)$$

$$- \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY + \frac{\partial P}{\partial Z} dZ dX + \frac{\partial Q}{\partial X} dX dY + - \frac{\partial Q}{\partial Z} dY dZ + - \frac{\partial R}{\partial X} dX dZ + \frac{\partial R}{\partial Y} dY dZ \quad (76)$$

pela linearidade da integral

$$\int \int_{\mathcal{S}} d\omega \quad (77)$$

é a soma das integrais destas expressões que vamos calcular separadamente:

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial Z} dZ dX - \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY = \int_S \frac{\partial P}{\partial Z} dZ dX - \int_S \frac{\partial P}{\partial Y} dX dY = \quad (78)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Z} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right) dudv - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Y} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right) dudv = \quad (79)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} dudv - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} dudv + \quad (80)$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} dudv + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} dudv = \quad (81)$$

$$= \int_{\partial U} P dX + \quad (82)$$

O cálculo das outras integrais é semelhante e por analogia temos

$$\int_S \frac{\partial Q}{\partial X} dX dY - \frac{\partial Q}{\partial Z} dY dZ = \int_{\partial U} Q dY \quad (83)$$

$$\int_S \frac{\partial R}{\partial Y} dY dZ - \frac{\partial R}{\partial X} dZ dX = \int_{\partial U} R dZ \quad (84)$$

em que estamos designado $U = [0, 1] \times [0, 1]$ e ∂U a fronteira deste retângulo.

Como havíamos calculado anteriormente, a soma destas integrais corresponde a

$$\int_{\partial U} \omega \quad (85)$$

provando portanto

$$\int_{\partial U} \omega = \int_S d\omega \quad (86)$$

como queríamos demonstrar.

0.5.2 O Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Stokes

A forma *limpa* como o resultado se apresenta, por um lado esconde uma quantidade muito grande de cálculos que eu apenas substitui pela informação representada pela parametrização r da superfície em cima do retângulo.

Também é possível calcular mais rápido e com mais segurança usando as definições e propriedades da *derivada exterior de formas diferenciais* que nos guiam na obtenção dos resultados.

Para evitar que um resultado tão importante fique reduzido a uma simples troca da dimensão das variedades envolvidas e da derivada da forma diferencial, vamos retornar ao seu significado comparativo com o caso do Teorema Fundamental do Cálculo.

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral nos fala da *distribuição* total sobre um intervalo

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\{a,b\}} f = f(b) - f(a) \quad (87)$$

e aqui, para apoiar a minha forma de escrever a última integral lembro $f(b)$ é o valor da integral relativamente à medida de Dirac concentrada no ponto b de f . Obviamente que é um abuso usar o sinal de integral sem indicar qual é a medida que está sendo usada, peço à leitora clemência para este deslize pedagógico.

Visto por este ângulo, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral nos diz que

$$\int_{[a,b]} df \quad (88)$$

representa o valor total da *distribuição* f no espaço $[a, b]$ uma variedade de dimensão 1 ou a variação total de f numa variedade de dimensão zero.

O Teorema de Green, ou sua generalização para superfícies, nos apresenta duas formas de calcular a variação total de *campo escalar* sobre um espaço, (o domínio de integração)

- percorrendo a fronteira e calculando a variação total de ω ou
- varrendo a superfície e calculando a variação total de $d\omega$

exatamente com faz o Teorema Fundamental do Cálculo Integral associando duas *formas diferenciais* a duas variedades cuja dimensão difere de 1, novamente.

Onde se aplicam este teoremas ? sempre que quisermos calcular a variação total de um campo escalar sobre um domínio ! Em Física, em Economia, na Engenharia !

A exposição acima em parte se aproxima da que se pode encontrar no livro [?] onde há uma quantidade grande aplicações voltadas principalmente para questões da Física.

0.5.3 Demonstração geral do Teorema de Stokes

O teorema de Stokes pode ser aplicado a superfícies realmente complicadas, esburacadas (e conseqüentemente com fronteira desconexa) ou mesmo superfícies desconexas. Estes casos aparentemente complicados terminam se reduzindo ao pequeno módulo que demonstramos acima através de um *atlas* adequado da superfície que se queira considerar.

Um *atlas* nada mais é do que uma família de parametrizações definidas em retângulos considerando-se entretanto as interseções entre os pedaços de superfícies ao longo desta família de parametrizações.

Isto pode realmente ser uma trabalho complicado em casos particulares.