

Introdução à integral múltipla

Praciano-Pereira, T ¹

15 de abril de 2013

¹<http://www.sobralmatematica.org>

Introdução à integração múltipla Praciano-Pereira, T <http://www.sobralmatematica.org>
15 de abril de 2013

0.2 Integral geométrica

Este texto se encontra na versão preliminar, quando tiver atingido a versão definitiva esta observação irá desaparecer. Sou grato se me apontarem erros, inclusive de sintaxe. Já encontrei erro que corrigi deixando no local uma nota de rodapé indicando o erro que havia.

Como apêndice deste texto sobre integral dupla há uma tabela de integrais bastante extensa cuja autoria se encontra declarada ao final.

Inclui também como apêndice um texto do meu livro de Cálculo I (em preparação) sobre integrais simples que complementam as ideias aqui apresentadas.

0.2.1 O plano do trabalho

Nesta introdução vou mostrar:

1. com auxílio de exemplos, que o Teorema Fundamental do Cálculo se aplica e é intuitivo.
2. Vou apresentar programas com os quais vou calcular integrais conhecidas mostrando que os programas podem ser usados para testar (verificar) os exercícios que você venha a fazer para lembrar o cálculo de integrais.
3. Finalmente também vou aplicar as somas de Riemann para deduzir uma propriedade importante de uma função cuja integral vou calcular conduzindo ao logaritmo neperiano.
4. Depois vou passar às integrais duplas que serão interpretadas, geometricamente, como volumes de sólidos no espaço tridimensional. Também neste caso vou mostrar como elas podem ser calculadas aproximadamente usando somas de Riemann duplas. Neste ponto veremos as dificuldades que aparecem quando passamos para dimensões maiores que um e aos poucos vamos aprender a contornar tais dificuldades quando veremos que vale a pena *aprofundar a abstração* para conseguir programas mais efetivos.

Uma forma de compreender o símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

é a (figura 1), página 2,

Na (figura 1) você pode ver o contorno do gráfico de uma função preenchido com retângulos representando uma aproximação da área limitada entre o gráfico de f o eixo OX e dois números, $a = -3, b = 3$, chamados de limite de integração.

O gráfico foi feito por um programa em **C++** com auxílio de **gnuplot** observe o detalhe no cálculo das alturas dos retângulos, são sempre os valores que a função f no início de cada subintervalo.

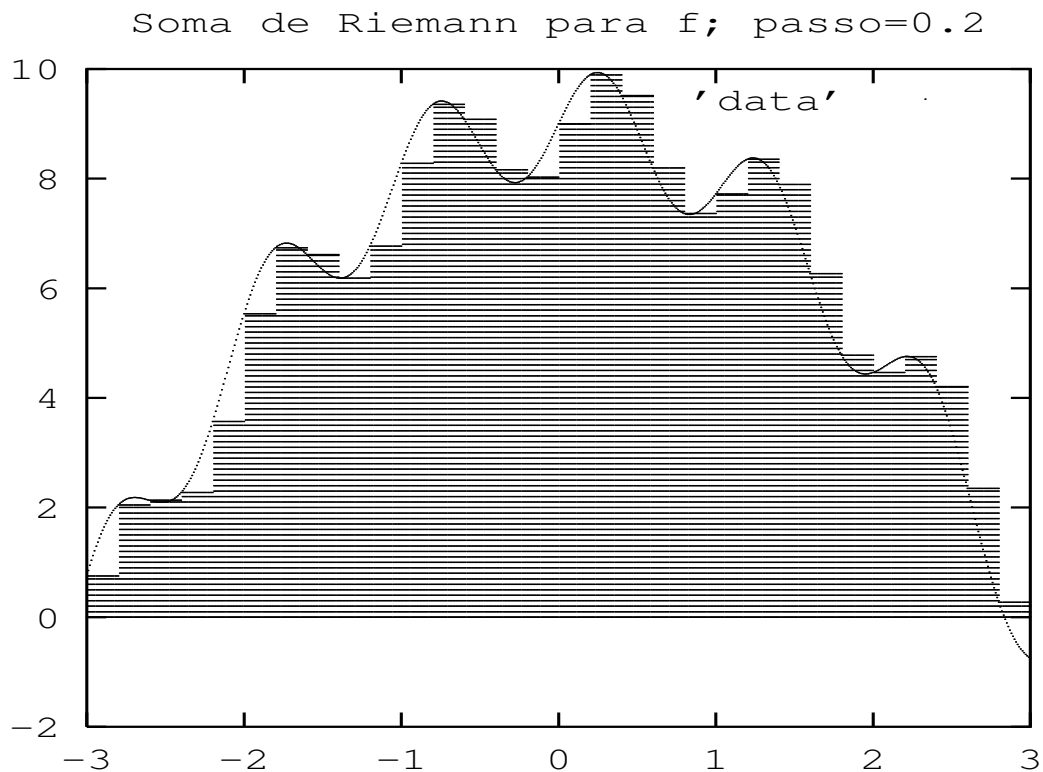


Figura 1: soma de Riemann no cálculo da integral da função f

Preste atenção ao último retângulo, com área positiva quando a função ao final do intervalo, troca de sinal, passando a ser negativa num ponto do último subintervalo.

Este cálculo aproximado é feito com um *erro* ao substituírmos a área do conjunto de retângulos pela área delimitada pelo gráfico da função. Este erro pode ser minorado se aumentarmos o número de retângulos, diminuindo a base dos mesmos o que pode ser facilmente feito com um programa de computação.

0.3 Interpretação geométrica da integral

0.3.1 Aceleração nula

A figura (2), página 3,

representa a velocidade constante em qualquer momento do tempo como $v(t)$. A distância percorrida entre o momento $t = a$ e $t = b$ é

$$\int_a^b v(t)dt = v_0(b - a); v_0 \text{ é a velocidade constante} \quad (1)$$

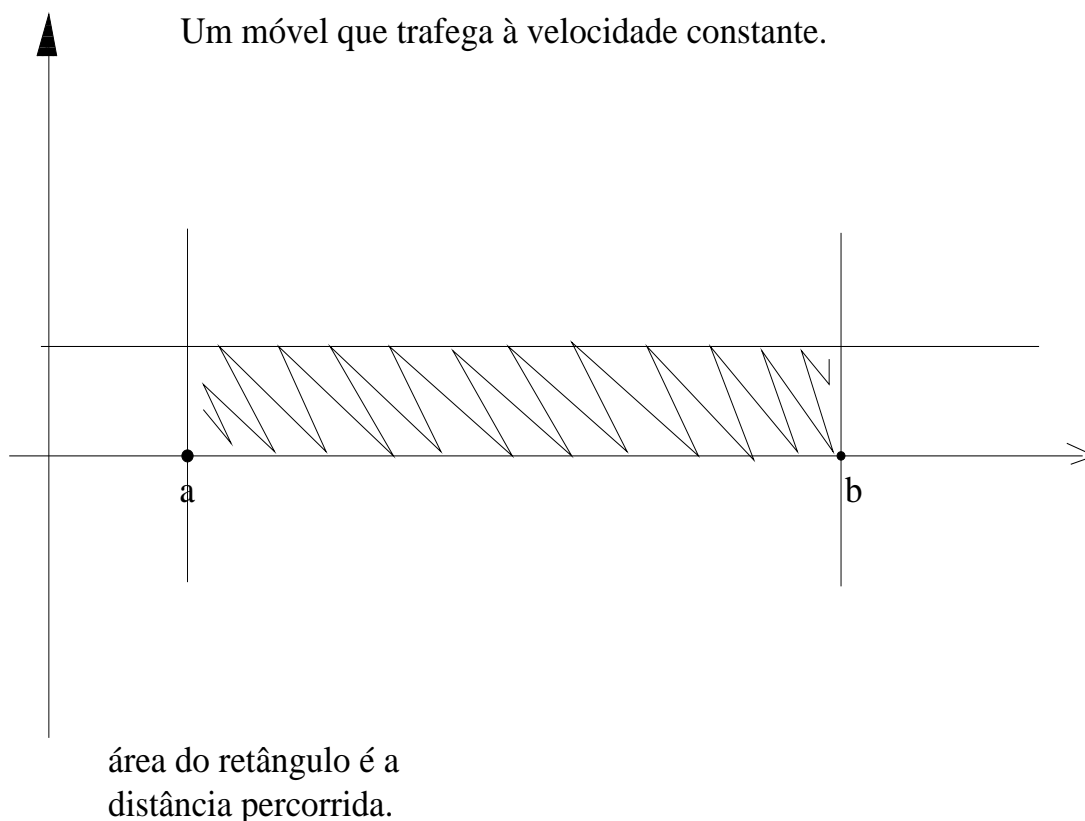


Figura 2: A integral da velocidade constante

Posso transformar este cálculo para fazer aparecer a expressão do Teorema do Fundamental do Cálculo:

$$v_0(b - a) = v_0b - v_0a \quad (2)$$

$$S(t) = v_0t; \int_a^b v(t)dt = S(t)|_a^b \quad (3)$$

$$\int_a^b v(t)dt = S(t)|_a^b = S(b) - S(a) = v_0b - v_0a \quad (4)$$

$$(5)$$

e o Teorema do Fundamental do Cálculo é uma expressão algorítmica que usa uma das primitivas de v para escrevermos a variação $S(b) - S(a)$ produzindo o valor da integral.

0.3.2 Quando a aceleração é constante e diferente de zero

O próximo exemplo que também é fácil de construirmos seria a distância percorrida por um móvel em movimento uniformemente acelerado, agora a aceleração é que é constante. O próximo gráfico é um exemplo deste movimento em que a velocidade tem aceleração constante, a derivada da velocidade é a

aceleração, é o coeficiente angular constante da reta $y = v(t)$ que representa o gráfico da velocidade na (figura 3), página 4,

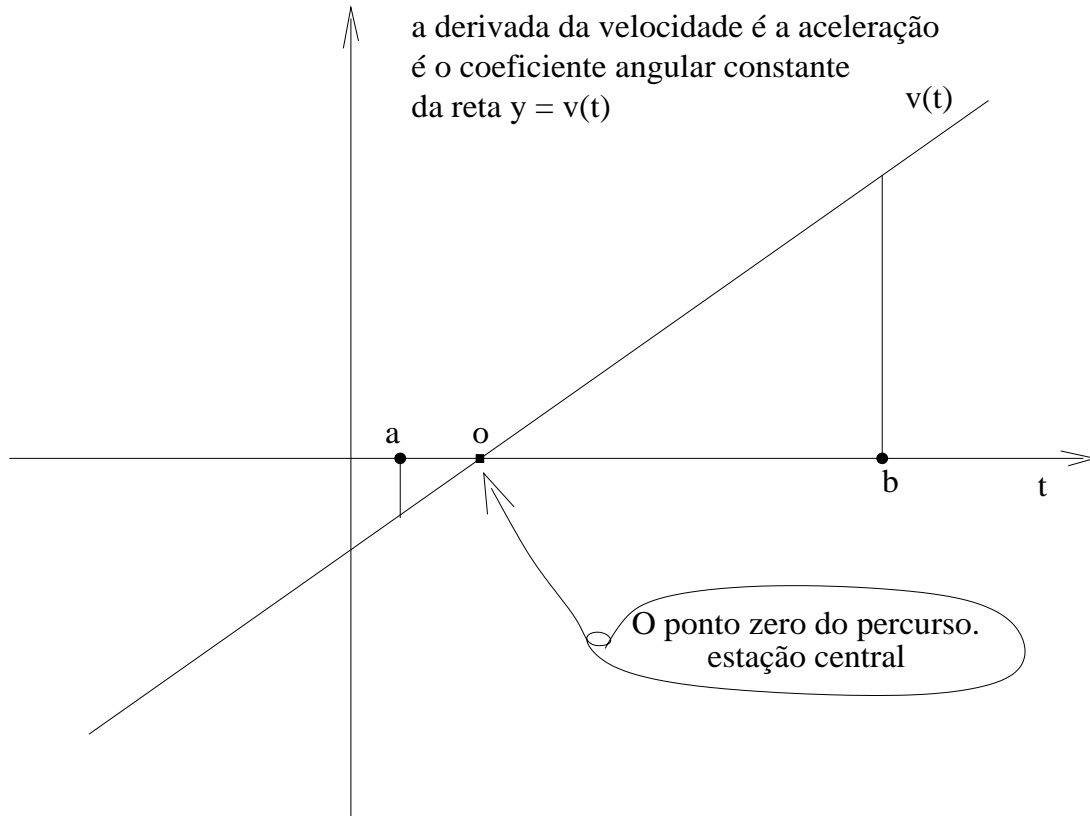


Figura 3: velocidade com aceleração constante

As etiquetas do gráfico na (figura 3)

1. O pequeno retângulo mostra o ponto inicial do percurso, por exemplo a estação principal dum metro suburbano, então a estação $t = a$ representa uma distância negativa sendo percorrida, o gráfico aparece abaixo do eixo dos tempos.
2. Se um passageiro tomar o trem no *ponto zero*, mas na direção errada, na direção da estação a, quando desejava ir para a estação b, então o cálculo da distância percorrida

$$s = \int_a^b v(t)dt = \int_a^o v(t)dt + \int_o^b v(t)dt \quad (6)$$

3. Quando o passageiro apresentar a conta na empresa que lhe paga a viagem, o *patrão mesquinho* lhe dirá que $\int_a^o v(t)dt$ tem valor negativo e vai

ser deduzida (subtraída) do valor da viagem $\int_a^b v(t)dt$ porque a empresa somente paga as viagens da *estação central* até a estação mais próxima do local de trabalho. A *integral* “atende ao ponto de vista” do *patrão mesquinho* e no valor $\int_a^b v(t)dt$ já ficará subtraída a parte da viagem da estação a até a estação central o.

Nste caso ainda sabemos calcular a integral, é área de trapésio e podemos ver que a *integral de uma função do primeiro grau* é dada por *uma função do segundo grau*:

$$v(t) = a_0(t - o); a_0 \text{ é a aceleração constante.} \quad (7)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2} [v(a) + v(b)] (b - a) \text{ regra do trapésio.} \quad (8)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2} [a_0(a - o) + a_0(b - o)] (b - a) \quad (9)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2} [a_0(a + b) - 2a_0o] (b - a) \quad (10)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2} [a_0(b^2 - a^2) - 2a_0o(b - a)] \quad (11)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2} [a_0b^2 - a_0a^2 - 2a_0ob + 2a_0oa] \quad (12)$$

$$\int_a^b v(t)dt = \frac{1}{2}a_0b^2 - a_0ob - \left[\frac{1}{2}a_0a^2 - a_0oa\right] \quad (13)$$

$$\int_a^b v(t)dt = S(b) - S(a); S(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 - a_0ot; \quad (14)$$

1. Na equação (7) $v(t)$ é uma função do primeiro grau em que o coeficiente angular é a derivada constante, a aceleração.
2. Na equação (8) estou calculando a integral usando a expressão da área de um trapésio, porque triângulos são trapésios degenerados.
3. Da equação (9) até a equação (14) está a “álgebra” necessária para construir a expressão do segundo grau de $S(t)$.

Somente uma observação, *en passant*, estas contas mostram porque na equação de um movimento em queda livre aparece o coeficiente $\frac{1}{2}g$ no termo do segundo grau da equação do movimento, porque a aceleração constante do movimento é a aceleração “*nada constante*” da gravidade que é designada por g .

0.3.3 O movimento do pêndulo

Um outro exemplo mais claro para o valor negativo da integral poderia ser dum pêndulo que você soltasse de uma certa altura, sob a suposição de que não haja resistência do ar e nem atrito no ponto de apoio consumindo a energia cinética do peso preso à corda. A (figura 4), página 6, mostra o ponto de partido

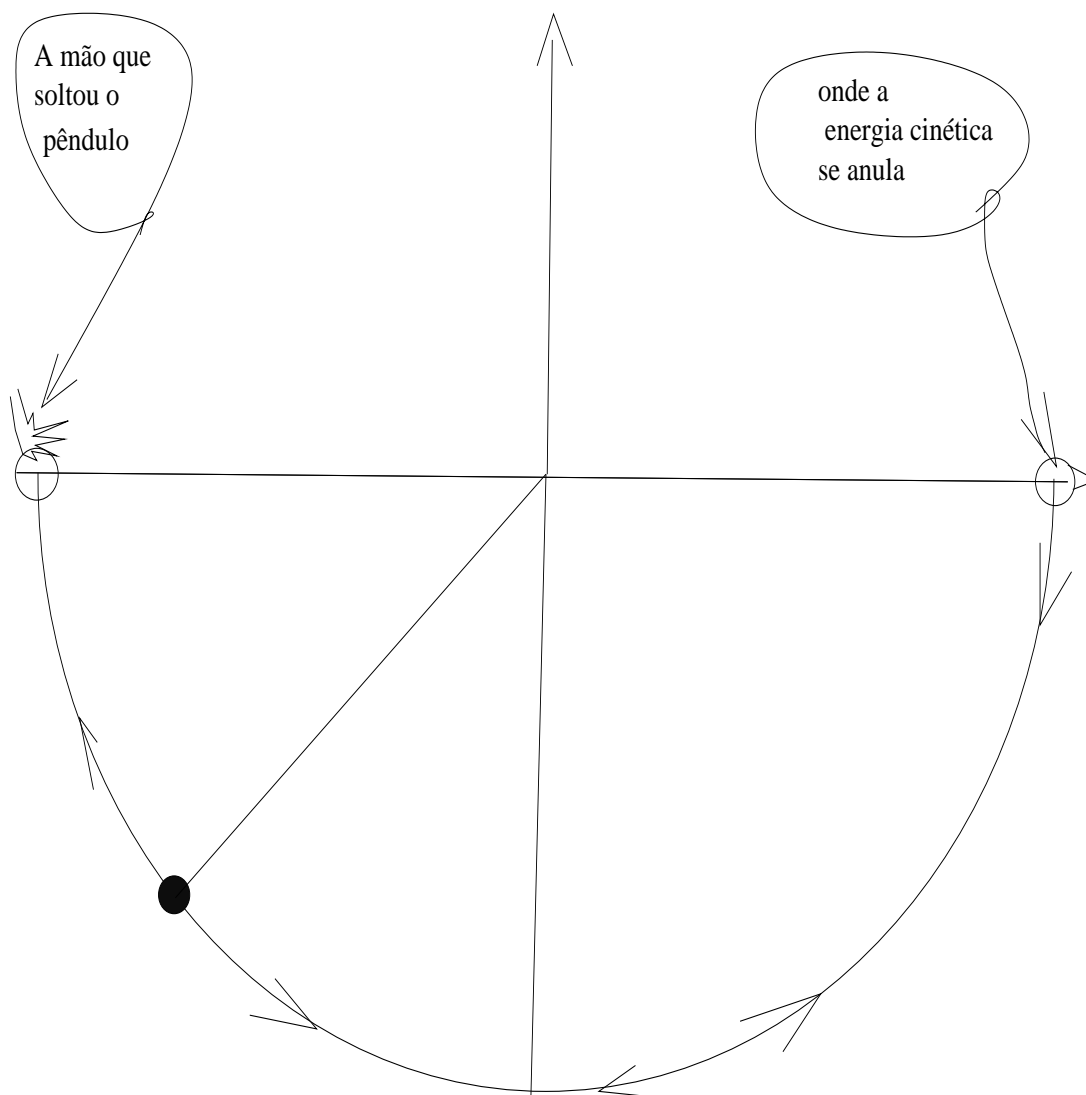


Figura 4: A mão que soltou o pêndulo o pega de volta

quando a mão se abre liberando a energia potencial para o pêndulo até o ponto final onde a energia cinética irá se anular. O movimento do pêndulo (a curva da velocidade) que aparece na (figura 5), página 7, é uma curva errada, porque o tempo não anda para trás...apenas estou sugerindo que as curvas da distância percorrida no sentido do ponto em que a mão solta o peso até onde a energia cinética se esgota é simétrica à curva do percurso de retorno para o ponto em que a mão irá agarrar de volta o peso. A verdadeira curva que representa o movimento se encontra na (figura 6), página 8, é a curva da velocidade cuja integral vou

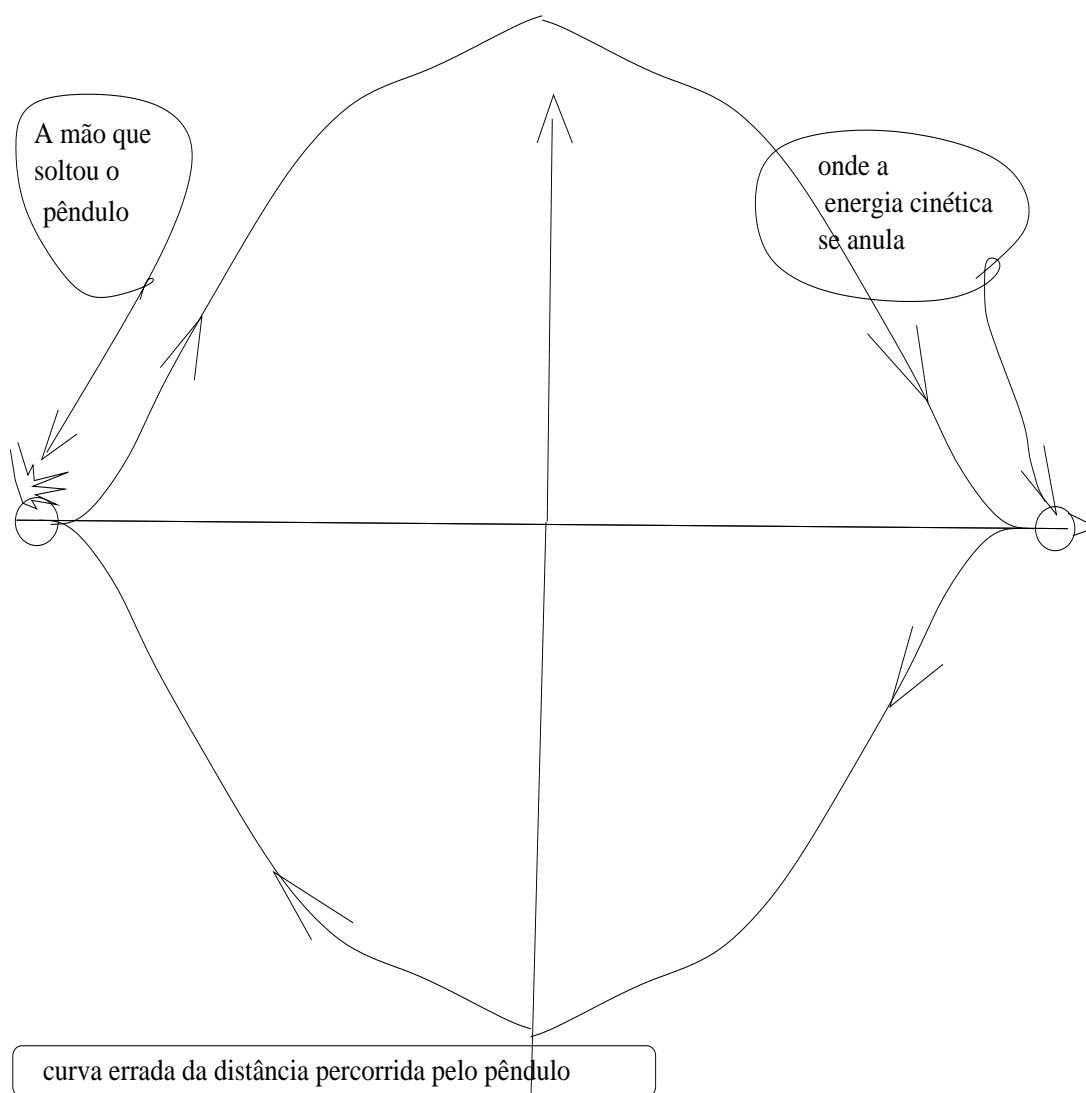


Figura 5: A figura errada da curva da distância percorrida pelo pêndulo

agora discutir.

Os gráficos foram feitos à mão usando `xfig` e têm alguns defeitos, há pontos em que não poderia ter derivada, isto está errado, a derivada existe em qualquer ponto do gráfico destas funções. Eu usei técnicas de edição de gráficos copiando e simetrizando e translatando os pedaços o que produz estes erros.

Se $y = v(t)$ for a curva que vemos na (figura 6) podemos nela ler alguns dados interessantes:

1. Nos extremos do intervalo a velocidade é zero, quando a mão solta ou quando pega de volta o peso.
2. A velocidade novamente é zero no ponto central, quando se esgota a energia cinética e a energia potencial atinge o seu valor máximo (lei da conservação da energia). Este é um ponto em que a curvatura do gráfico

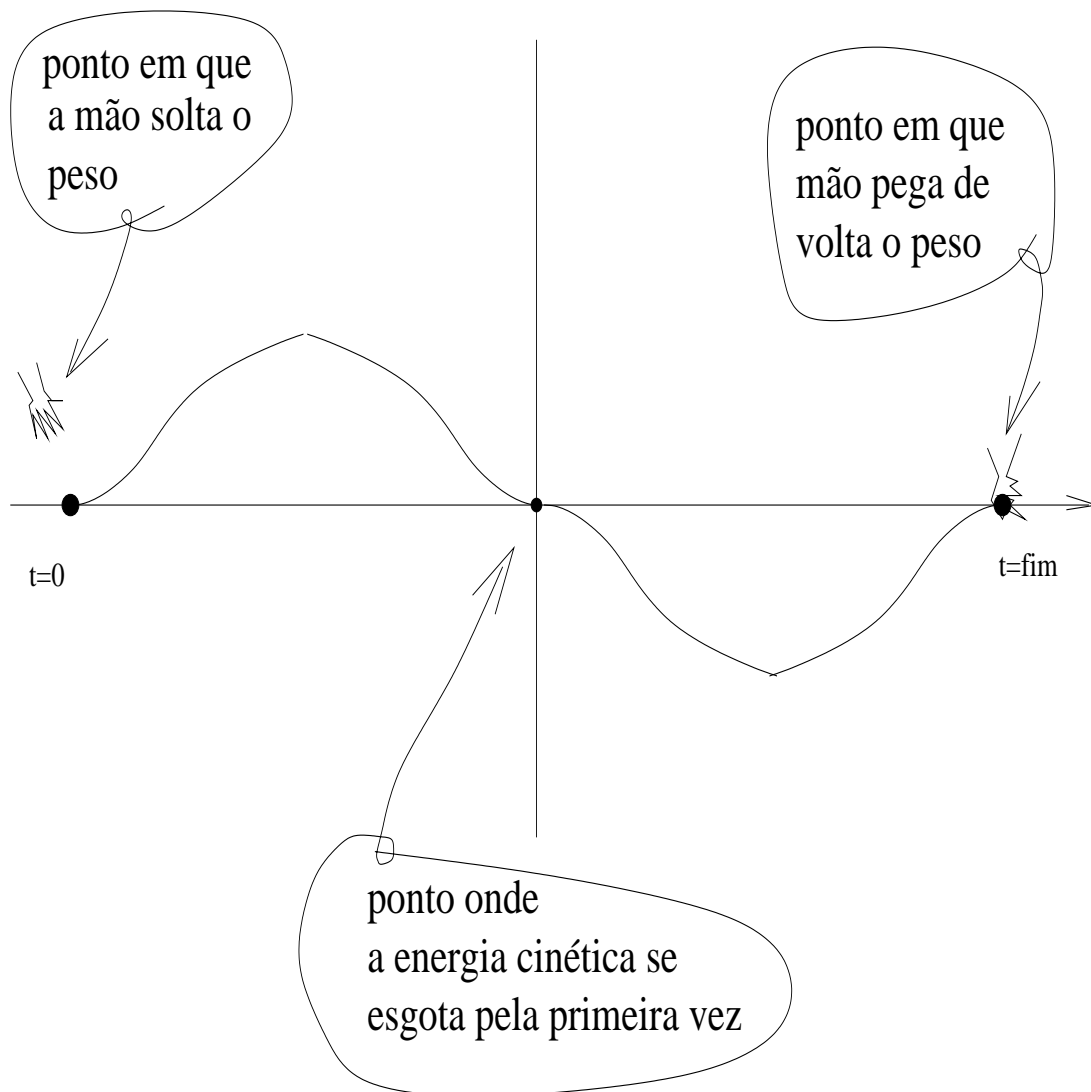


Figura 6: A curva da velocidade no percurso do pêndulo

se altera, um ponto de inflexão do gráfico. Nós estamos vendo, na (figura 6) a curva da *derivada da distância* que é a velocidade.

3. Como as duas bolhas que aparecem na (figura 6) são anti-simétricas, uma é negativa e a outra é positiva, mas representam a “mesma área geométrica” então a “área algébrica” representada pelo movimento total será nula: *o pêndulo está de volta à mão que o soltou.*
4. Há um ponto de *máximo da velocidade* e outro ponto de *mínimo da velocidade.*

5.
$$\int_{t=0}^{t=fim} v(t)dt = 0$$
 a distância percorrida.

6. O ponto final parece ser igual ao ponto inicial, mas são dois valores difer-

entes do tempo em que ocorrem os dois eventos, a saída (da mão) e a volta (para a mão):

$$\int_{t=0}^{t=fim} v(t)dt = S(t)|_0^{fim} = S(fim) - S(0) = 0$$

é o Teorema Fundamental do Cálculo em ação.

A equação $y = S(t)$ do movimento do pêndulo é um pouco complicada para que eu possa deduzí-la aqui, ela não é uma equação do segundo grau até mesmo porque a equação da velocidade do pêndulo não é do primeiro grau, é a composição de dois movimentos, um vertical que é queda livre, e um movimento horizontal. Nos poderemos mais à frente retornar a esta bela equação.

0.3.4 Cálculando a integral com um programa

Antes de escrever o programa vou relembrar as fórmulas de integração para as funções polinômiais porque depois vou testar o programa com as fórmulas exatas. Este exemplo vai servir-lhe de modelo quando você recorrer aos livros de Cálculo I para relembrar a integração univariada, você poderá usar o programa que vou apresentar mais abaixo para testar se os seus cálculos foram feitos corretamente e assim não irá precisar de recorrer às respostas no final do livro (quando houver...).

As fórmulas de integração

1. Vimos que a primitiva de uma função constante, o caso do movimento com velocidade constante, é uma função do primeiro grau.

$$f(t) = m; F(t) = m(t - t_0);$$

a integral depende do ponto inicial do movimento (e também do ponto final...). É por isto que existe uma constante de integração, ou ainda porque há múltiplas primitivas de uma função.

2. A primitiva de uma função do primeiro grau, o caso do movimento com aceleração constante, como é o caso do movimento em queda livre com a aceleração “constante” da gravidade.

$$f(t) = mt; F(t) = \frac{mt^2}{2} + C = \int_{t_0}^t f(x)dx$$

a constante de integração é o resultado do *valor inicial* da integral.

3. E você deve se lembrar que

$$f(t) = mt^n; F(t) = \frac{mt^{n+1}}{n+1} + C = \int_{t_0}^t f(x)dx$$

como sempre a constante de integração é o resultado do *valor inicial* da integral.

O programa

Vou mostrar-lhe um programa em python porque vou poder rodá-lo de forma mais bonita do que o poderia fazer em C++.

```
from math import *
def f(x):
    return pow(x,2);

def riemann(f, inicio, fim, n):
    x=0
    soma=0
    deltax = (fim-inicio)/float(n);
    while(x < fim):
        soma += f(x); ## incrementa soma com f(x)
        x += deltax;
    return(soma*deltax);

print riemann(f,0,1,100);
print riemann(f,0,1,1000);
print riemann(f,0,1,10000);
print riemann(f,0,1,100000);
print riemann(f,0,1,1000000);
print riemann(f,0,1,10000000);
```

0.3.5 Função definida via integral

Logaritmo neperiano

Nesta seção vou mostrar-lhe o uso da *soma de Riemann* como instrumento teórico para fazer a demonstração de uma propriedade de uma classe de funções: $f(x) = \frac{K}{x}$. A propriedade que vou demonstrar somente é válida para as funções desta classe, portanto não espere poder usá-la com uma função qualquer.

Antes de prosseguir deixe-me salientar a importância das funções desta classe. Elas estão envolvidas com a lei de Newton para a gravitação universal - *matéria atrai matéria na razão direta de suas massas e na razão inversa do quadrado da distância entre elas*. Aqui interessa-me “a razão inversa”, o parâmetro r que mede a distância entre os corpos aparece no denominador, neste caso da lei da gravitação universal, ao quadrado, mas no fundo é a mesma classe de problemas, quanto maior for r , menor será a influência da gravidade.

Outros exemplos de importância das funções do tipo $\frac{K}{x}$ são o decaimento radioativo, a razão de diluição de um composto químico num solvente. Em

todos estes casos a integral destas funções se encontra envolvida para calcular a “quantidade do fenômeno em consideração”.

Isto mostra que é importante saber calcular

$$\int_a^b \frac{K}{x} dx; a, b > 0; \quad (15)$$

Como

$$\int_a^b K f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

então vou usar $K = 1$ nas contas que seguem. Para chegar à propriedade que desejo demonstrar, vou usar uma soma de Riemann uniforme que neste caso conduz à demonstração geral porque podemos provar que a integral na equação (eq 15) existe, então as somas de Riemann uniforme convergem para a integral da mesma forma com as não uniformes. Entretanto a demonstração se apoia fortemente no fato de que estou usando somas de Riemann uniformes.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}; \quad (16)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x); \quad (17)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k\Delta x}; \quad (18)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/a}{1+k\frac{\Delta x}{a}}; \quad (19)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx \approx \frac{\Delta x}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\frac{\Delta x}{a}}; \quad (20)$$

$$\frac{\Delta x}{a} = \Delta x'; \text{ um novo valor para } \Delta x; \quad (21)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx \approx \Delta x' \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\Delta x'}; \quad (22)$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{a} = \frac{b-a}{an} = \frac{b/a-a/a}{n} = \frac{b/a-1}{n} \quad (23)$$

Na equação (eq. 23) estou mostrando que $\Delta x'$ é a medida de um elemento da partição do intervalo $[1, b/a]$. Se observarmos agora que a soma de Riemann na (eq. 22) corresponde à função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, b/a]$ então, nesta equação temos uma aproximação para a integral

$$\int_1^{b/a} \frac{1}{x} dx \quad (24)$$

concluimos (e demonstramos) que

Teorema 1 Propriedade de $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_1^{b/a} \frac{1}{x} dx; a, b > 0;$$

isto, para esta classe de funções, podemos “cancelar o primeiro limite de integração”. Cálculos semelhantes mostram que vale, para o segundo limite de integração, esta lei do cancelamento:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{a/b}^1 \frac{1}{x} dx; a, b > 0;$$

Os cálculos seguintes mostram que esta propriedade é prática:

$$\int_1^{10000} \frac{1}{x} dx = \tag{25}$$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx + \int_{10}^{100} \frac{1}{x} dx + \int_{100}^{1000} \frac{1}{x} dx + \int_{1000}^{10000} \frac{1}{x} dx = \tag{26}$$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx + \int_1^{10} \frac{1}{x} dx + \int_1^{10} \frac{1}{x} dx + \int_1^{10} \frac{1}{x} dx = \tag{27}$$

$$\int_1^{10000} \frac{1}{x} dx = \int_1^{10^4} \frac{1}{x} dx = 4 \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \tag{28}$$

Assim, para calcular $\int_1^{10000} \frac{1}{x} dx$ basta calcular $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$ e multiplicá-la pela potência de 10 correspondente. Isto vale para qualquer potência:

$$\int_1^{a^n} \frac{1}{x} dx = n \int_1^a \frac{1}{x} dx \tag{29}$$

e vale para produtos que não sejam da mesma base..

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx \tag{30}$$

O que justifica criarmos uma função definida por esta integral.

Definição 1 (logaritmo) *Logaritmo neperiano*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx; x > 0;$$

e agora o conteúdo da equação (eq. 30) pode ser escrito

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (31)$$

que é a famosa função logaritmo que reinou durante 400 anos como “máquina de calcular” até que as *máquinas de calcular eletrônicas* vieram a destruir o seu reinado de quatro séculos. Mas ela continua importante, é com ela que podemos calcular a quantidade de radiatividade de uma amostra, ou sua vida média o que nos permite calcular a data de objetos antigos (sabendo a vida média de um isótopo e medindo o espaço que sobrou com o seu “evaporamento radiativo”).

Vou apresentar-lhe uma técnica importante no cálculo da integral.

0.4 Transformando o domínio de integração A chamada mudança de variável

O assunto de que vou tratar aqui é designado na literatura de mudança de variável. Esta denominação é imprópria por várias razões, uma delas é que na expressão

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (32)$$

não existe nenhuma variável, I é um número, uma constante! Não há a possibilidade de atribuímos um valor ao “ x ” que aparece neste símbolo.

Apesar disto, esta construção magnífica da mente humana funciona como se ali houvesse uma variável, as contas funcionam como se assim fosse. Por outro lado esta nomenclatura está por demais entranhada na literatura o que torna impossível pensar em alterá-la. Esta introdução serve pelo menos para que a leitora fique advertida de que há uma impropriedade de nomenclatura que pode interferir em sua boa compreensão do assunto: se não existe nenhuma variável na equação (32), como é que vamos fazer uma mudança de variável. . .

Vou começar com alguns exemplos para justificar o assunto.

Na figura (fig. 7), página 14, você vê os gráficos de f e de uma translação de f .

A integral de f e de g são iguais porque a medida da reta¹ é uniforme. Pode ser mais fácil calcularmos $\int_0^d f(x)dx$ quando desejarmos calcular $\int_a^{a+d} g(x)dx$ o que na prática é o mesmo que alterar o domínio de integração de g , a chamada *mudança de variável*. Um exemplo numérico ajuda a compreensão deste método.

$$f(x) = x^2; g(x) = (x - 3)^2; \int_3^4 g(x)dx \quad (33)$$

¹Preço é uma medida e se pudéssemos transladar um terreno de uma cidade o seu preço ficaria alterado. Preço não é uma *medida uniforme*.

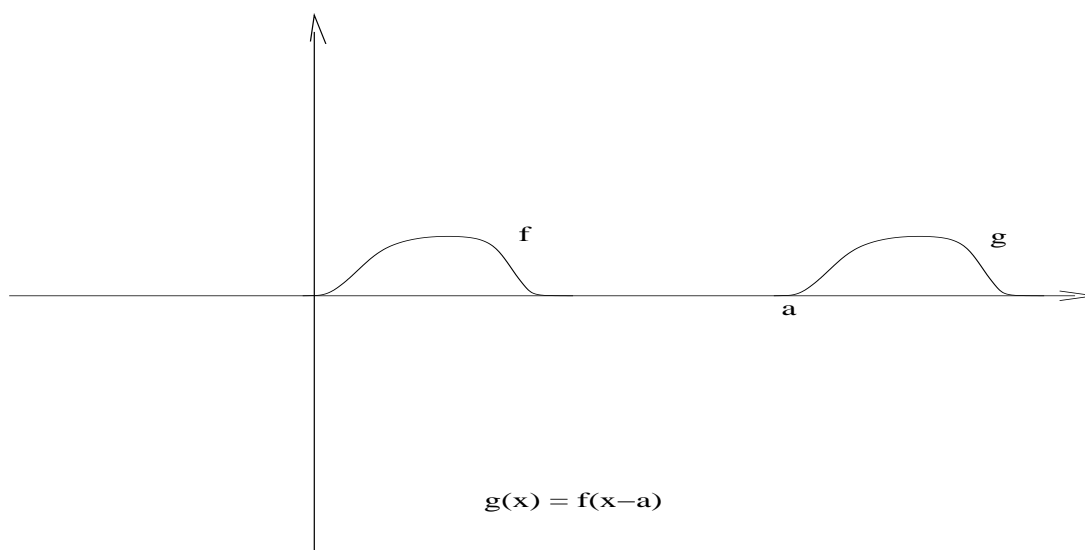


Figura 7: $\int_0^d f(x)dx = \int_a^{a+d} g(x)dx$

Defina estas funções num terminal do `gnuplot` e faça-lhes os gráficos para verificar que a translação definida acima transforma a “parábola padrão” $f(x) = x^2$ numa translação cujo vértice se encontra no ponto $(3, 0)$, uma translação no sentido² positivo do eixo OX .

```
f(x) = x**2; g(x) = f(x-3);
plot f(x), g(x), 0
```

$$f(x) = x^2; g(x) = (x - 3)^2; \quad (34)$$

$$\int_3^4 g(x)dx = \int_3^4 (x - 3)^2 dx = \quad (35)$$

$$= \int_3^4 (x - 3)^2 d(x - 3); \quad (36)$$

$$\text{fazendo } u = x - 3; \int_3^4 (x - 3)^2 d(x - 3) = \begin{cases} \int_0^1 u^2 du; \\ x = 3 \Rightarrow u = 0; \\ x = 4 \Rightarrow u = 1 \end{cases} \quad (37)$$

$$\int_3^4 (x - 3)^2 dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad (38)$$

Um outro exemplo mais complicado e que justifica bem a validade do método é a integral de funções com raízes como

²Ou seja, se quisermos fazer a translação para o ponto a , a operação deve ser $x - a$.

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (39)$$

Neste caso a equação do círculo de raio a nos ajuda a fazer uma transformação passando para círculos unitários que depois nos permitem usar identidades trigonométricas. Acompanhe a sequência de transformações

$$I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = a^2 \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx/a; \quad (40)$$

$$u = x/a; du = d(x/a) = dx/a; \begin{cases} x = -a \Rightarrow u = -1; \\ x = a \Rightarrow u = 1; \end{cases} \quad (41)$$

$$I = a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du; \quad (42)$$

$$\begin{cases} u = \sin(t); du = \cos(t) dt; \\ u = -1 \Rightarrow t = -\pi/2; \\ u = 1 \Rightarrow t = \pi/2; \end{cases} \quad (43)$$

$$I = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{a^2 \pi}{2} \quad (44)$$

A última integral é consequência de

$$\begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 + \sin^2(t) dt = \pi; \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) dt; \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (45)$$

Usando programa `riemann.py` com as seguintes definições

```
def f(x,a):
    if (abs(x) <= a):
        return sqrt(pow(a,2) - pow(x,2));
    else:
        return 0;

a = 3
print riemann(lambda t:f(t,a),-a,a,0.0001, 0), pow(a,2)*pi/2 ;
```

a saída de dados é

14.1371659227 14.1371669412

o primeiro número é o resultado da soma de Riemann, o segundo é o resultado da expressão de controle $\frac{a^2 \pi}{2}$; $a = 3$.

O erro é 10^{-6} para o passo de integração $\Delta x = 10^{-4}$.

Soma de Riemann não é um método de grande precisão para o cálculo aproximado de integrais, há outros muito melhores, que, entretanto, usam a metodologia das somas de Riemann para acelerar os resultados e conseguir alta precisão. Estou aqui me referindo à soma de Riemann com um método simples para introduzir a leitora no uso de métodos computacionais em seu aprendizado de Matemática.

É certo que você precisaria ter uma grande prática no cálculo de integrais para conseguir obter resultados exatos nos muitos casos em que isto é possível. Por outro lado existem extensas tabelas de integração públicas em que é possível consultar os casos conhecidos.

No caso de você desejar adquirir esta habilidade, o programa `riemann.py` pode servir-lhe de apoio na verificação dos seus resultados, mas você deverá usá-lo apenas para testar se obteve o resultado correto e seguir tentando até conseguir o resultado, do contrário você estará usando o programa como um “*vídeo game*”³ e isto não pode significar aprendizado!

Deixe-me terminar esta seção escrevendo a fórmula geral para mudanças de variáveis que na verdade é a *regra da cadeia* para integral. Antes de prosseguir, deixe-me chamar sua atenção para *os componentes do processo*:

1. o primeiro item é um novo domínio de integração, isto será crucial em alguns casos, isto é muito visível no Cálculo Multivariado.
2. o segundo item é a função que vou chamar de g que faz a transformação para o novo domínio, e aqui vou usar uma metodologia que difere um pouco da usual:

$$\text{novo domínio} \xrightarrow{g} \text{domínio antigo}$$

a maioria dos autores prefere o sentido inverso deste, que considero o mais natural.

3. a função que faz a passagem de domínios apareceu nos exemplos anteriores junto com sua derivada, porque é a derivada de g que estabelece a relação de escala entre os dois domínios. Esta é a razão porque começo com a hipótese de que g seja diferenciável.

Quero calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$ e descubro que se transformar a função f usando uma função diferenciável g obtenho uma integral conhecida. A figura (fig 8), página 17, mostra, graficamente, o que pretendo construir. A derivada de g , g' é o fator de conversão entre as medidas de Δx e Δt de modo que seria excelente se pudessemos escrever

$$\Delta x = g'(\alpha + k\Delta t)\Delta t$$

³É óbvio que você pode usar o programa para calcular aproximadamente integrais, se este for o seu objetivo.

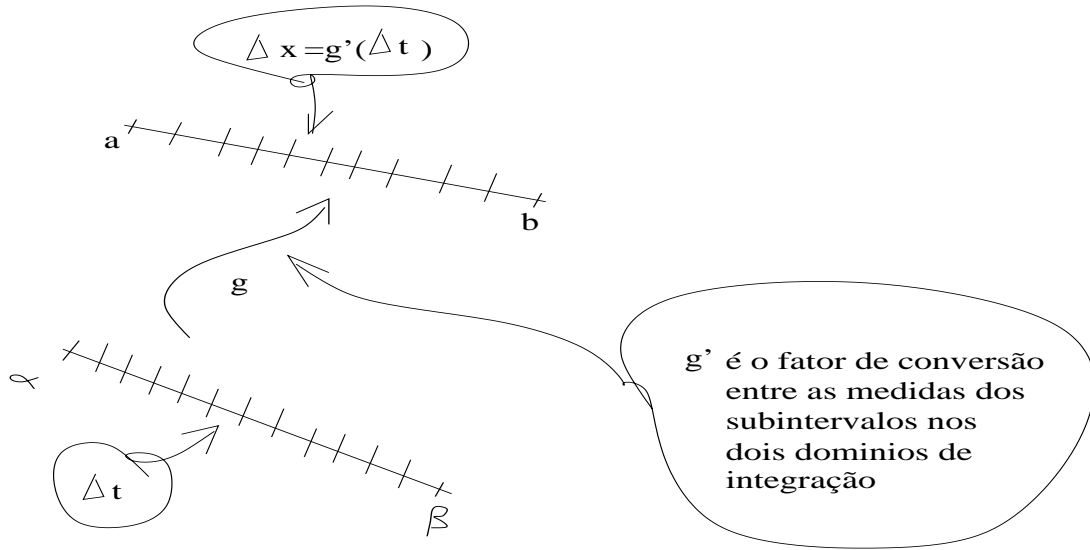


Figura 8: A mudança de domínio g

mas infelizmente a mudança de domínio g não precisa ser linear e com frequência não o é, ela cria uma *deformação geométrico-topológica* entre o *domínio velho*, W , e o *“novo domínio”*, Ω .

Se a partição for uniforme em $[a, b]$, e em geral não teremos, uma partição uniforme em $[\alpha, \beta]$, então o melhor caminho é considerar uma expressão mais geral para as somas de Riemann deixando-a independente de partições uniformes. Vamos considerar as partições

$$\text{em } [a, b]; x_0 = a, \dots, x_n = b; \quad (46)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k; \quad (47)$$

$$[a, b] = g([\alpha, \beta]); x_0 = g(t_0) = g(\alpha), \dots, x_n = g(t_n) = g(\beta); \quad (48)$$

$$\Delta x_k \approx g(\Delta t_k); \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k)) g(\Delta t_k) = \quad (49)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k)) \frac{g(\Delta t_k)}{\Delta t_k} \Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} h(t_k) \Delta t_k; h(t) = f(g(t)) g'(t); \quad (50)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g) dg = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt \quad (51)$$

Na equação, (49), $\Delta x_k \approx g(\Delta t_k)$ é consequência da continuidade (diferenciabilidade) de g , o erro em considerar $g(\Delta t_k)$ em lugar de Δx_k se reduz ao *refirmarmos a partição*. Entretanto, a soma obtida nesta equação não é uma soma de Riemann, mas se dividirmos e multiplicarmos por Δt_k temos a expressão da *soma de Riemann* e o quociente $\frac{g(\Delta t_k)}{\Delta t_k}$ tem como limite o valor da derivada de g no ponto t_k , quando o termo no quociente se aproximar de zero,

ou equivalentemente, quando refinarmos, indefinidamente⁴, a partição e aqui vemos a razão da hipótese de que a mudança de domínio g seja diferenciável, o que nos permite escrever a equação (50), ou, finalmente, a equação (51).

As somas de Riemann são sempre aproximações da integral (no sentido de Riemann), se ela existir⁵.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k \approx \quad (52)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k))g'(t_k)\Delta t_k \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt; \quad (53)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt \quad (54)$$

⁴Com a condição de que a norma da partição seja uma sucessão com limite zero.

⁵Sempre estou trabalhando sob esta hipótese de que a integral exista, o caso contrário não me interessa aqui.

0.5 A integral dupla

A integral simples, do Cálculo I, foi interpretada como a área *algébrica* limitada pelo gráfico da função, pelo eixo OX e por dois limites de integração.

No caso bivariado teremos um domínio W no plano onde $z = F(x, y)$ está definida então a interpretação geométrica da integral dupla é o volume de um sólido limitado pelo gráfico da função, pelo plano XOY e pela fronteira do domínio.

Alguns exemplos para nos ajudar a compor a intuição, a (figura 9), página 19, Se a função F for constante então $\int \int_W F(x, y) dx dy$ é o volume algébrico que

um domínio W no plano
onde $z = F(x, y)$ está
definida

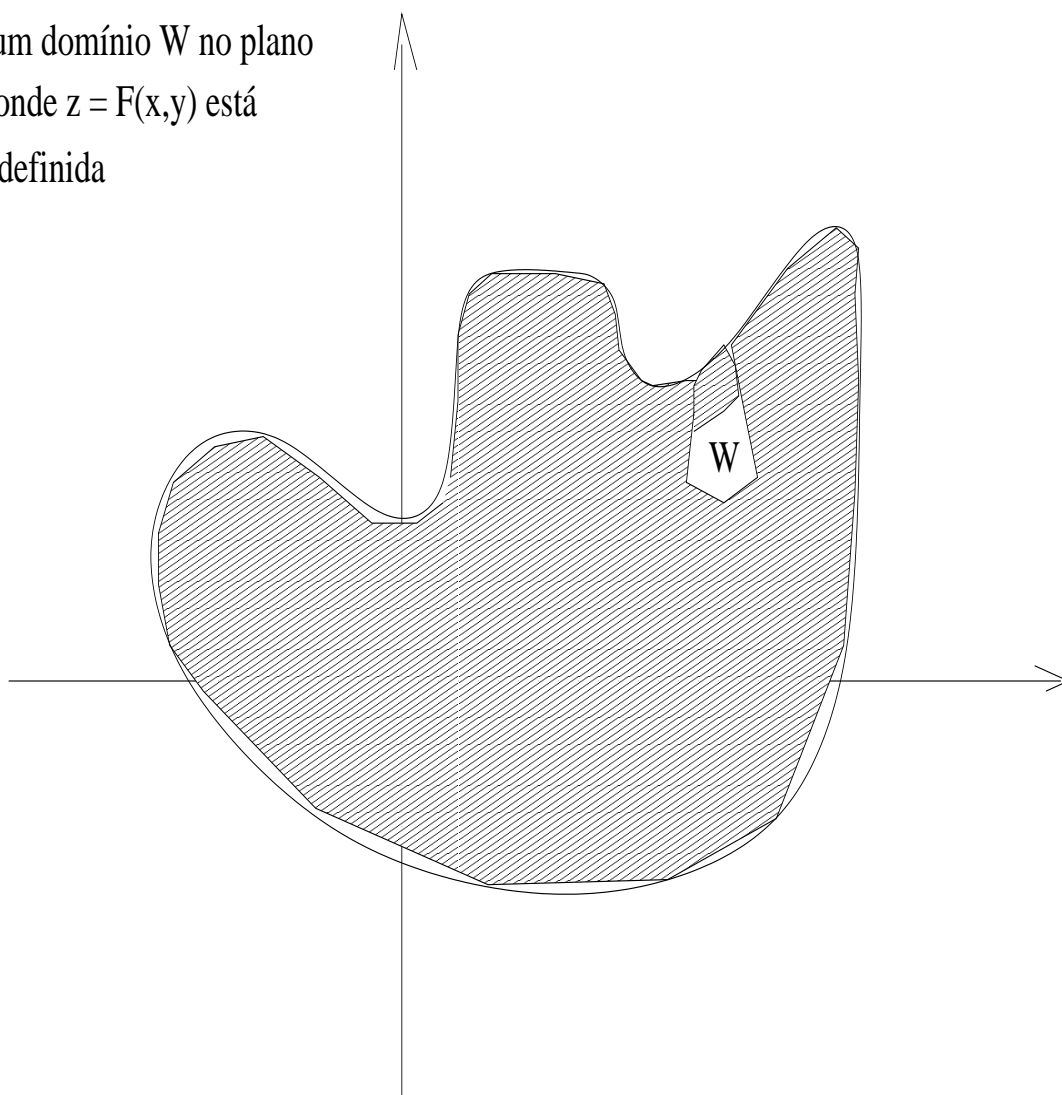


Figura 9: O domínio W do plano onde $z = F(x, y)$ está definida

tem altura $F(x, y)$ com a base W . Então já começaram os nossos problemas porque pode ser difícil calcularmos a área da base.

Neste caso, da função constante, o volume seria a área da base vezes a altura.

O método de aproximação que expus para a integral simples se aplica aqui com certas modificações e vamos ver logo neste caso como fariamos.

Como tudo que sabemos calcular são as medidas das figuras com limite retilíneos então a saída consiste em escolhermos um retângulo que contenha W como mostra a (figura 10), página 20,

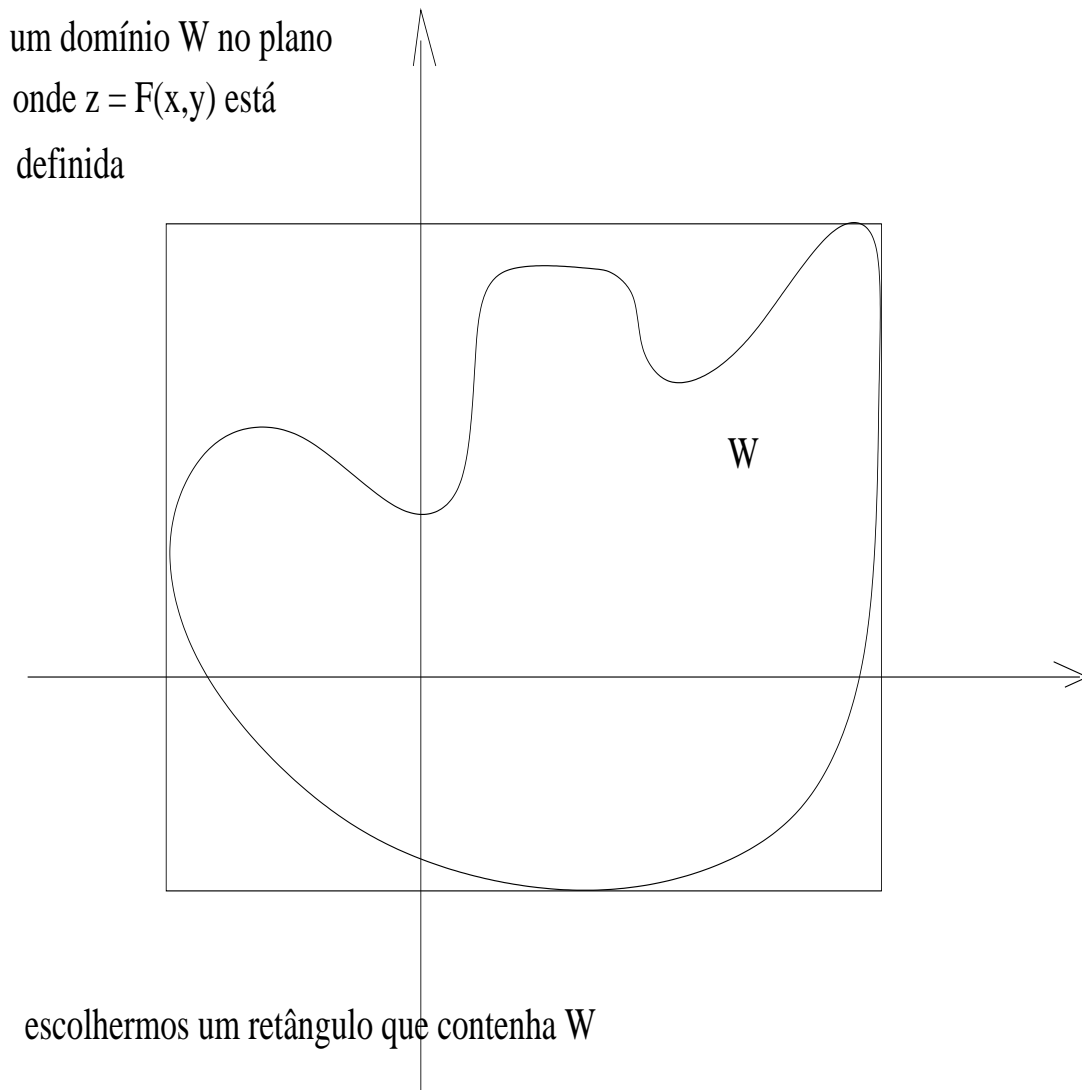
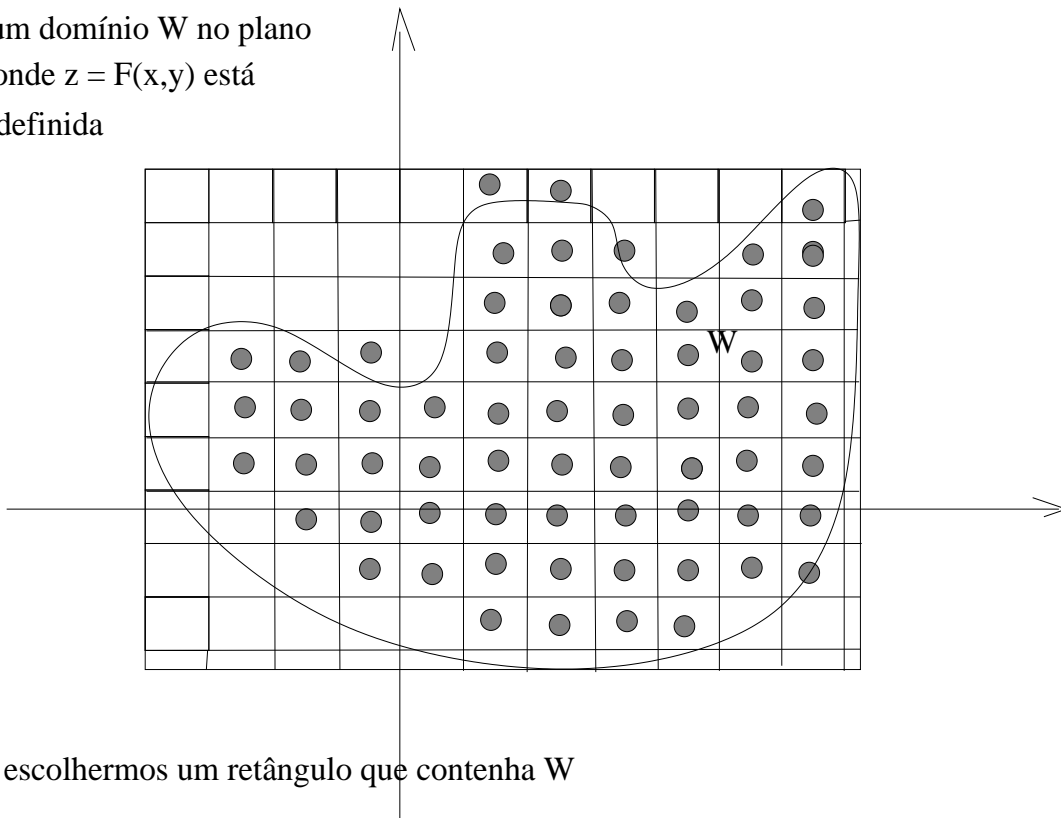


Figura 10: Primeira aproximação com um retângulo que contenha W

O volume obtido considerando a área do grande retângulo como “área da base” já seria uma “aproximação” pese a repulsa que isto causa pelo grande erro cometido. A próxima figura, (figura 11), página 21, mostra como podemos reduzir o erro. Considera-se a malha que pode ser colocada sobre W induzida por malhas selecionadas nas projeções horizontal e vertical de W sobre os eixos coordenados. Seja $[a, b] \times [c, d]$ o retângulo obtido pelas projeções horizontal, $[a, b]$ e vertical, $[c, d]$ de W .

um domínio W no plano
onde $z = F(x,y)$ está
definida



escolhermos um retângulo que contenha W

Figura 11:

$$(x, y) \in [a, b] \times [c, d]; \quad (55)$$

$$x = a + k\Delta x; k = 0 \dots n - 1; \quad (56)$$

$$y = c + j\Delta y; j = 0 \dots m - 1; \quad (57)$$

$$V_{n,m} = F(x, y) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta x \Delta y; \text{ se } (x_k, y_j) \in W; \quad (58)$$

$$F(x, y) = \text{uma constante}; \quad (59)$$

e o programa apenas aceita (x_k, y_j) quando for um vértice de retângulo da malha interior à W como mostram os pequenos círculos indicando os retângulos selecionados da malha.

O erro decresce quando a malha for refinada, ou equivalentemente, considerando valores cada vez maiores para n, m .

Se F não for constante a expressão do volume aproximado será

$$V_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(x_k, y_j) \Delta x \Delta y; \text{ se } (x_k, y_j) \in W; \quad (60)$$

A diferença entre as duas somas consiste em que no primeiro caso, (58) $F(x, y)$ é uma constante, enquanto que na (equação 60) $F(x_k, y_j)$ é o valor

de F em cima do vértice à direita e abaixo em cada retângulo selecionado na malha. Comparando com as *somas de riemann* univariadas, agora temos somas de *volumes de paralelepípedos* enquanto no caso univariado tínhamos somas de áreas de retângulos. Estamos também estabelecendo uma convenção, a altura é sempre tomada no vértice inferior esquerdo em cada retângulo, desta forma o programa tem selecionar os retângulos considerando apenas se este vértice fica interior ao domínio W (não é preciso que o retângulo inteiro esteja contido em W). Se convença de que, refinando a malha (tomando maiores valores para n e m) a precisão no cálculo aumenta.

Quando usarmos as somas de Riemann em demonstrações teóricas não podemos fazer a suposição de que as partições sejam uniformes, mas se pudermos provar que a integral existe, então neste caso, sim, podemos considerar partições uniformes que produzem notável simplicidade e rapidez nos programas uma vez que será possível colocar em evidência (propriedade distributiva do produto relativamente à soma) o produto $\Delta x \Delta y$; eliminando duas operações em cada um dos nm ciclos do programa.

Isto para lhe mostrar que é possível já fazermos um programa para calcular integrais duplas aproximadamente. Entretanto, você logo verá que algumas outras técnicas podem ser usadas para produzirmos um programa mais simples. É uma complicação extra, a tomada de decisão

$$\text{se } (x_k, y_j) \in W;$$

e nós poderemos evitá-la.

```
def F1(x,y):
    return 1;

# exclusiva para círculos como domínio
def riemanndupla(f, inicio, fim, n):
    soma, delta, x, y = 0, (fim-inicio)/(n*1.0), inicio, inicio;
    while(x<fim):
        y = inicio;
        while(y < fim):
            if ( pow(x,2) + pow(y,2) < 1 ):
                soma += f(x,y)
            y += delta;
        x += delta;
    return(soma*delta*delta);

print riemanndupla(F1,-1,1,10)
print riemanndupla(F1,-1,1,100)
print riemanndupla(F1,-1,1,1000)
```

Este programa se encontra no link “programas” da página de sua disciplina, ele está no arquivo `riemann.py`, que roda tanto `riemann()` para o cálculo de

integrais simples como `riemandedupla()` para o cálculo de integrais duplas. Esta versão da função `riemandedupla()` está feita para funcionar com domínios circulares, mais precisamente com círculo de raio 1, ver

`if (pow(x,2) + pow(y,2) < 1):`

que sendo verdade atualiza o valor de `soma`. Num dos exercícios da lista você é instado a alterar esta condição para que `riemandedupla()` trabalhe com um retângulo, neste caso, depois que você estiver certo de que a função esteja funcionando corretamente, grave a função alterada com outro nome, por exemplo `riemannRetangulo()` e me envie uma cópia.

Os exercícios da lista 02 se concentram na leitura dos símbolos

$$\int \int_W F(x, y) dx dy; \quad (61)$$

$$\int_a^b \int_c^d F(x, y) dx dy; \quad (62)$$

$$\int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx; \quad (63)$$

$$\int_a^b \int_f^g F(x, y) dy dx; \quad (64)$$

porque é preciso desenvolver a intuição geométrica que irá nos levar a entender que tipo de medida a integral representa. Na próxima seção vou discutir cada um destes símbolos, associando-os com figuras geométricas, para mostrar-lhe o sentido simples, e funcional, que eles representam, para ajudá-la a superar o impacto que eles produzem.

Na próxima lista vamos nos dedicar ao cálculo da integral. Seria interessante aprender a usar um dos programas, `octave`, [1] ou `scilab`, [4], decida-se por um dos dois, eles são muito semelhantes e igualmente muito bons. Na bibliografia, ao final do texto, há mais informações sobre estes programas. Você encontrará mais programas em [3], baixe-os, altere-os, rode e aprenda a programar.

0.5.1 O símbolo da integral múltipla

Nesta seção vou analisar os símbolos das integrais duplas que aparecem nas equações (eq. 61) -(eq. 64).

O caso da equação (eq. 61)

O primeiro símbolo é equivalente

$$\int \int_W F(x, y) dy dx$$

e para ser calculado exatamente deve ser usada a última expressão, na equação (64), quando for possível identificar-se as curvas adequadas para sua interpretação. Leia o último caso.

A interpretação geométrica é que temos um volume algébrico, cuja base é a figura plana W contida no plano XOY , limitado pelo gráfico de F , pelo plano XOY e pela expansão da fronteira de W até encontrar a superfície $z = F(x, y)$. Por exemplo, se W for um retângulo e F for um plano não paralelo a XOY então a equação (61) é o volume de uma pirâmide.

O caso da equação (eq. 62)

Neste caso o domínio é o retângulo $[c, d] \times [a, b]$ porque a integral interna é relativa à variável x cujos limites de integração são os extremos do intervalo $[c, d]$. Calculamos a primitiva de F relativamente à variável x e a avaluamos nos limites c e d usando o Teorema Fundamental do Cálculo tendo como resultado uma expressão em y cuja integral se calcula novamente usando o Teorema Fundamental do Cálculo. Nos dois casos dependemos do conhecimento de primitivas destas funções para aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Alternativa será usar `riemann()`, ou `riemandedupla()` sem ser necessário a condição do `if()`. Neste caso `riemandedupla()` fica assim

```
def riemannRetangulo(f, inicioX, fimX, inicioY, fimY, n):
    soma, deltax, deltay = 0, (fimX-inicioX)/(n*1.0), (fimY-inicioY)/(n*1.0);
    x, y = inicioX, inicioY;
    while(x<fimX):
        y = inicioY;
        while(y < fimY):
            soma += f(x,y)
            y += delta;
        x += delta;
    return(soma*delta*delta);
```

```
riemannRetangulo(F, a, b, c, d, n)
```

O caso da equação (eq. 63)

Este é o caso simétrico do anterior.

O caso da equação (eq. 64)

Este caso é *de longe* o mais interessante por esta razão eu vou dar três exemplos e você deve verificar que são parecidos.

Observe a (figura 12), página 25, na qual você pode identificar o domínio de integração W limitado por duas curvas que são os gráficos de duas funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Queremos calcular uma integral e identificamos o domínio de integração limitado por duas curvas que são gráficos de duas funções, como na figura (figura 12), $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

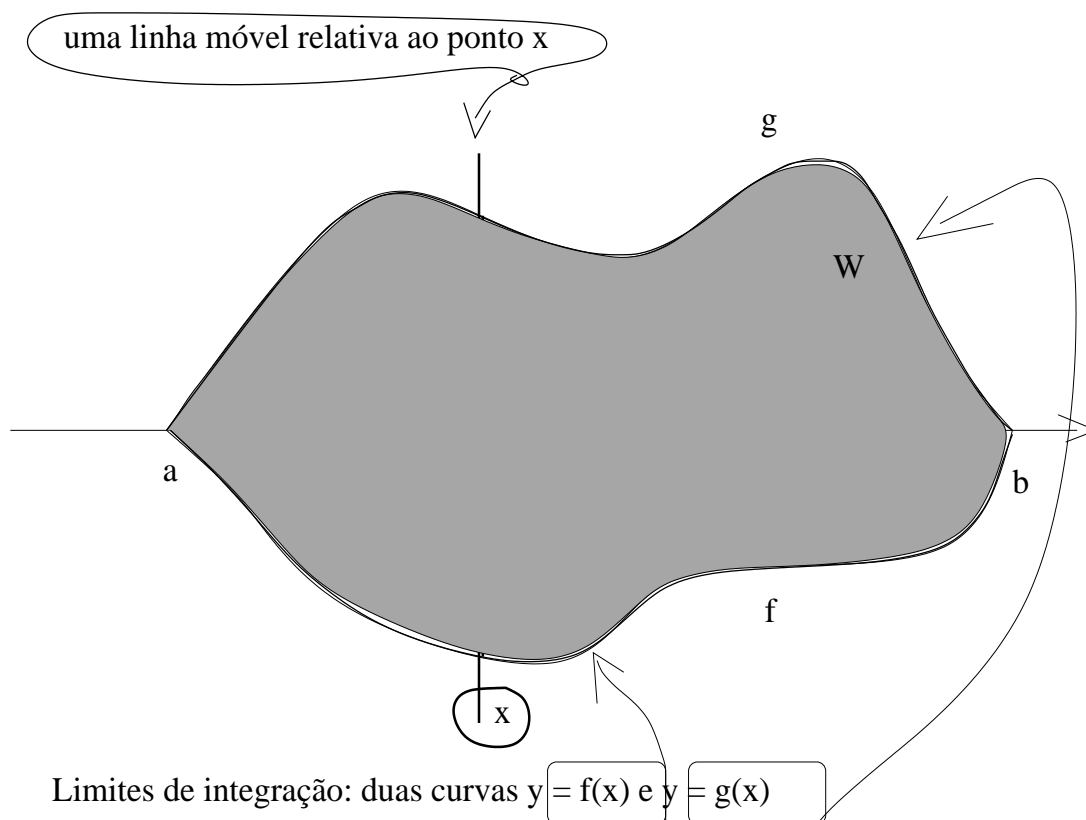


Figura 12: Limites de integração: duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Tudo se passa como se tivéssemos uma linha móvel relativa ao ponto x deslizando sobre o domínio W e calculássemos a integral relativamente a y eliminando assim a variável y :

$$\int_f^g F(x, y) dy \quad (65)$$

e depois eliminamos x ⁶, calculando a integral

$$\int_a^b \left[\int_f^g F(x, y) dy \right] dx \quad (66)$$

Observe a ordem como aparecem os diferenciais que tem esta função neste símbolo, indicar qual é a ordem como “as variáveis” estão sendo “integradas”, primeiro calculamos a integral mais interna (eq. 65) e depois a mais externa, (eq. 66).

⁶Havia um erro aqui. Estava “eliminando y ”, o correto é “eliminando x ”. Quando calculamos $\int_f^g F(x, y) dy$ eliminamos a “variável” y deixando apenas a “variável x ” que vai ser eliminada, agora, na próxima integração.

Um exemplo

Um exemplo fala mais alto. Vou calcular a integral da função

$$F(x, y) = x^2y + 3xy^3 - 4xy^5 - y^7$$

sobre o círculo unitário centrado na origem e desta forma a função `riemanndupla()` pode ser, facilmente, usada para conferir o resultado.

Primeiro os cálculos formais nos quais estou designado por

$$y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}; \quad y = g(x) = \sqrt{1-x^2};$$

as equações das duas funções que enfeixam o domínio W

$$y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}; \quad y = g(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad (67)$$

$$\int_W \int F(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_f^g F(x, y) dy dx = \quad (68)$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\int_f^g F(x, y) dy \right] dx = I + J + K + L \quad (69)$$

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_f^g \right] dx; \quad J = \int_{-1}^1 \left[\frac{3xy^4}{4} \Big|_f^g \right] dx; \quad (70)$$

$$K = - \int_{-1}^1 \left[\frac{4xy^6}{6} \Big|_f^g \right] dx; \quad L = - \int_{-1}^1 \left[\frac{y^8}{8} \Big|_f^g \right] dx; \quad (71)$$

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2 f(x)^2}{2} - \frac{x^2 g(x)^2}{2} \right] dx; \quad J = \int_{-1}^1 \left[\frac{3x f(x)^4}{4} - \frac{3x g(x)^4}{4} \right] dx; \quad (72)$$

$$K = - \int_{-1}^1 \left[\frac{4x f(x)^6}{6} - \frac{4x g(x)^6}{6} \right] dx; \quad L = - \int_{-1}^1 \left[\frac{f(x)^8}{8} - \frac{g(x)^8}{8} \right] dx; \quad (73)$$

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2 - x^4}{2} - \frac{x^2 - x^4}{2} \right] dx = 0; \quad (74)$$

$$J = \int_{-1}^1 \left[\frac{3x f(x)^4}{4} - \frac{3x g(x)^4}{4} \right] dx = 0 \quad (75)$$

$$K = - \int_{-1}^1 \left[\frac{4x f(x)^6}{6} - \frac{4x g(x)^6}{6} \right] dx = 0; \quad (76)$$

$$L = - \int_{-1}^1 \left[\frac{f(x)^8}{8} - \frac{g(x)^8}{8} \right] dx = 0 \quad (77)$$

$$I + J + K + L = 0 + 0 - 0 - 0 = 0; \quad (78)$$

$$(79)$$

Definindo F2 no arquivo `riemann.py`

```

def F2(x,y):
    return pow(x,2)*y + 3*x*pow(y,3) - 4*x*pow(y,5) - pow(y,7);

print riemanndupla(F2,-1,1,10)
print riemanndupla(F2,-1,1,100)
print riemanndupla(F2,-1,1,1000)
print riemanndupla(F2,-1,1,5000)

```

este resultado é confirmado, rode o programa e se convença.

Outro exemplo

Um segundo exemplo: Vou calcular a integral da função

$$F(x, y) = x^2y^2;$$

sobre o círculo unitário centrado na origem e desta forma a função `riemanndupla()` pode, novamente, ser usada para conferir o resultado. Antes de prosseguir, observe que $F(x, y) \geq 0$ consequentemente a integral

$$\int_W \int F(x, y) dy dx$$

não pode ser zero. Também podemos fazer outra observação para controlar os nossos cálculos, F é o produto de quadrados e (x, y) é um ponto interior do círculo unitário ou sobre a fronteira, que dizer que $|x|, |y| \leq 1$. Isto significa que $|F(x, y)| < 1$, e se convença, então o volume limitado por F será menor do que a área da base, π , deixando mais claro:

$$\int_W \int F(x, y) dy dx < \pi$$

mas na verdade será muito menor do que π , entretanto um número positivo.

Primeiro as contas:

$$\int_W \int F(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_f^g x^2 y^2 dy dx = \quad (80)$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 \frac{y^3}{3} \Big|_f^g dx = \quad (81)$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 \frac{g(x)^3}{3} dx - \int_{-1}^1 x^2 \frac{f(x)^3}{3} dx = \quad (82)$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} dx - \int_{-1}^1 x^2 - \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} dx = \quad (83)$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x^2 (\sqrt{1-x^2})^3 dx = \quad (84)$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 (\sqrt{1-x^2})^3 dx = \quad (85)$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^4(t) dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^4(t) dt = \quad (86)$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4(t) - \cos^6(t) dt = \quad (87)$$

$$= 3\pi/16 - 15\pi/96 \approx 0.13089969389957471827 \quad (88)$$

para obter a equação (eq. 86) usei a mudança de variável

$$x := \sin(t); t \in [0, \pi/2];$$

e na (eq. 87) usei a expressão para integrar potências de cos, [2, Lists_of_integrals]. Mas posso usar `riemann()` e o seu valor aproximado é 0.130899693944. Conferindo com `riemanndupla()` rodei

```
print riemanndupla(F3, -1, 1, 10000).
```

para obter 0.130899705861, um número positivo menor do que π .

Um terceiro exemplo

Vou agora calcular o volume da esfera. A geometria nos ensina que este volume é calculado com o modelo do volume da pirâmide tomando o raio como altura e a base sendo o disco máximo cuja área é πr^2 então o volume da esfera será $\frac{4}{3}\pi r^3$ que deve ser o resultado da integração exata e um valor aproximado deste quando usarmos um programa.

A equação da esfera, no \mathbf{R}^3 é uma generalização da equação do círculo do \mathbf{R}^2 , $x^2 + y^2 = r^2$ agora com três variáveis:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad (89)$$

$$r = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z^2 = 1 - x^2 - y^2 = F(x, y); \quad (90)$$

$$z = F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad (91)$$

é esta função cuja integral vou calcular em cima do círculo unitário que é o domínio de integração W .

Posso escrever a integral que interessa assim

$$\int_W \int F(x, y) dx dy = \int_W \int F(x, y) dy dx; \quad (92)$$

$$\int_{-1}^1 \int_f^g F(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[\int_f^g F(x, y) dy \right] dx; \quad (93)$$

$$y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}; y = g(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad (94)$$

os dois ramos da fronteira do disco unitário são as funções $y = f(x), y = g(x)$.

$$I = \int_{-1}^1 \int_f^g F(x, y) dy dx; = \int_{-1}^1 \left[\int_f^g F(x, y) dy \right] dx; = \quad (95)$$

$$\text{seja } H \text{ uma primitiva de } F \text{ relativamente a } y; \quad (96)$$

$$I = \int_{-1}^1 [H(x, g(x)) - H(x, f(x))] dx; \quad (97)$$

Esta primitiva H pode ser encontrada na tabela de integração colocada como apêndice deste texto, a equação (30):

$$H(x, y) = \frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{y}{a^2 - y^2} \right); \quad (98)$$

$$H(x, g(x)) = \frac{\pi}{4} (1 - x^2); \quad (99)$$

$$H(x, f(x)) = -\frac{\pi}{4} (1 - x^2); \quad (100)$$

$$I = \int_{-1}^1 [H(x, g(x)) - H(x, f(x))] dx = \frac{\pi}{4} x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \quad (101)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi}{6}; \quad (102)$$

O volume da esfera de raio 1 é o dôbro deste valor: $\frac{4\pi}{3}$.

Este é o valor do volume da calota superior da esfera de centro na origem e raio 1, portanto o volume da esfera \mathbf{S}^2 é $\frac{4\pi}{3}$ que é o valor do volume de uma pirâmide cuja base meça π e altura, o raio, meça 1.

Se usarmos, para testar os cálculos, a função-python

`riemannDuplaEntreCurvas(g, F, G, inicio, fim, n)` com

1. $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. $F(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

3. $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$

4. `inicio = -1; fim = 1, n = 1000`

e basta-lhe colocar estas definições no final do script, ao final do programa `riemann.py`, (mesmo que haja outras funções com mesmo nome acima, serão estas que serão usadas). O resultado será

```
2.09413169746 2.09439510239
2.09439149533 2.09439510239
2.09439406293 2.09439510239
```

em que na primeira coluna se encontra a saída de dados do programa para $n \in \{100, 1000, 10000\}$ e na segunda coluna o valor aproximado de $\frac{4\pi}{6}$ calculada pelo interpretador `python`.

A área da figura (fig. 13), página 30, é aproximadamente 0.16668935 calcu-

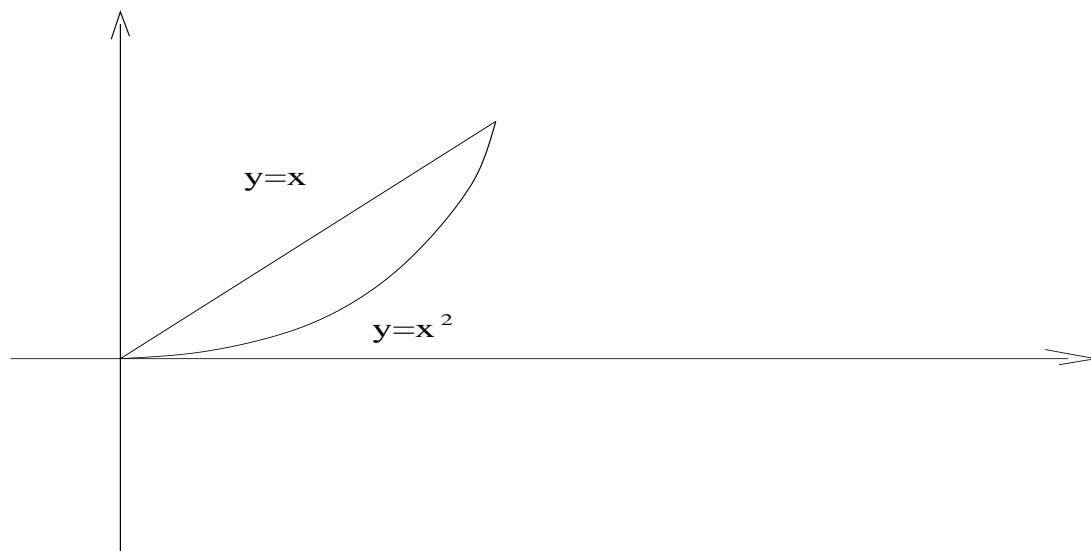


Figura 13: área limitada pela parábola e pela primeira bissetriz

lada com o programa e vale $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ exatamente:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \frac{1}{6}$$

0.6 Exercícios

0.7 Transformação do domínio na integral

Mudança de variável em integral múltipla

Nesta seção vou usar novamente a técnica de mudança de variável para obter o resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (103)$$

O integrando é a função chamada *gaussiana* que é importante em estudos probabilísticos, na verdade a gaussiana é

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}; \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1 \quad (104)$$

o que torna g uma função de probabilidade.

A razão deste cálculo se encontrar nesta seção é que vamos precisar de calcular uma integral dupla para obter a integral da equação (103).

Vou logo fazer um cálculo⁷, relativamente simples, que será usado mais adiante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \quad (105)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx; \quad (106)$$

$$\text{fazendo } R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx; \quad (107)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} R e^{-x^2} dx = R \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = R^2; \quad (108)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = R^2; \quad (109)$$

Se soubermos calcular a integral dupla, poderemos deduzir o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy} = R \quad (110)$$

Rodando o programa `riemann.py` com as definições

```
def F8(x,y):
    return exp(-pow(x,2)-pow(y,2));

print riemannduplaRetangulo(F8, -10,10, -10,10, 1000), pi
```

⁷Esta é uma forma de falar que tem objetivo evitar que a leitora faça perguntas, se é “simples” não se deve fazer perguntas porque indicaria falta de inteligência. Não se intimide, pergunte se não estiver claro, mas a razão é que as variáveis são separáveis na integral.

a saída de dados será 3.14159265352 3.14159265359
em que o primeiro número é a aproximação da integral na equação (eq. 105)
sobre o retângulo

$$W_{10} = [-10, 10] \times [-10, 10]$$

$$\int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (111)$$

e o segundo número é o valor aproximado de π na memória do python relativamente ao qual o cálculo com `riemann.py` tem o erro na undécima casa decimal depois da vírgula ou seja um erro inferior a $7 * 10^{-11}7E(-11)$ com $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{1000} = 0.001^8$. Isto já nos permite ter o valor aproximado da integral na equação (eq. 110)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \approx 1.7724538508858276$$

Nosso objetivo aqui é fazer a mudança de variável e obter este valor exatamente. A “*mudança de variável*” é o objetivo, o valor da integral da gaussiana é um teste para verificar se a metodologia está correta.

O coeficiente de distorção entre as áreas da região original (em coordenadas cartesianas) para a nova região (em coordenadas polares) é o módulo do determinante da $J(g)$, um número positivo. No Cálculo univariado este coeficiente é o módulo da derivada.

Acompanhe os cálculos:

⁸Observe a aproximação excelente, obtida pela integral no retângulo $[-10, 10] \times [-10, 10]$, para uma integral sobre o plano inteiro.

$$g(\rho, \theta) = (x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)); \quad (112)$$

$$x = \rho \cos(\theta); y = \rho \sin(\theta); x^2 + y^2 = \rho^2; \quad (113)$$

$$J(g) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad (114)$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J(g) \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix}; \quad (115)$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix}; \quad (116)$$

$$dxdy = |\det(J(g))| d\rho d\theta = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| d\rho d\theta = \quad (117)$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta \quad (118)$$

$$\int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{A_R} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \quad (119)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{A_R} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho = 2\pi \left(e^{-\rho^2} \Big|_0^{A_R} \right) = \quad (120)$$

$$= \pi; \quad (121)$$

O número A que aparece é exatamente R , a metade da *medida do lado* do quadrado, mas seria um pouco trabalhoso justificar isto e vou mostrar-lhe *como podemos evitar este trabalho*.

Na equação (eq. 114) eu calculei a derivada implícita das equações (eq. 113) surgindo a jacobiana de g , $J(g)$, cujo determinante em módulo é o coeficiente de distorção local entre as áreas de W_R para Ω_R .

O cálculo do limite na variação em $[0, A_R]$, na equação (eq. 117), quando R cresce indefinidamente, é $(1 - 0)$ e a fração $\frac{1}{2}$ vem da correção de $2\rho d\rho$ uma vez que apenas tínhamos $\rho d\rho$. Podemos escrever um produto de integrais, na integral da equação (eq. 117), porque o integrando é à “variáveis separáveis”. .

Para calcular esta integral vamos fazer a mudança de variável indicada nos cálculos (eq. 113)- (eq. 121) e representada geometricamente na figura (fig 14), página 34, em que vou alterar o domínio $W_R = [-R, R] \times [-R, R]$ para o domínio Ω_R no plano com coordenadas polares e vou aproveitar para dar-lhe um exemplo de como a utilização de desigualdades podem acelerar os nosso cálculos, e no presente caso eu devo dizer “evitar os cálculos” . . .

Eu não sei exatamente qual é a imagem inversa $\Omega_R = g^{-1}(W_R)$, confira na figura (fig 14). A lógica me diz que deve ser um retângulo porque apenas estou traduzindo com coordenadas polares um retângulo do plano, então

$$\Omega_R = [-\pi, \pi] \times [0, A_R]$$

que é a variação do argumento e do raio. Como o domínio contém a origem como ponto interior, então o argumento varia de $-\pi$ a π .

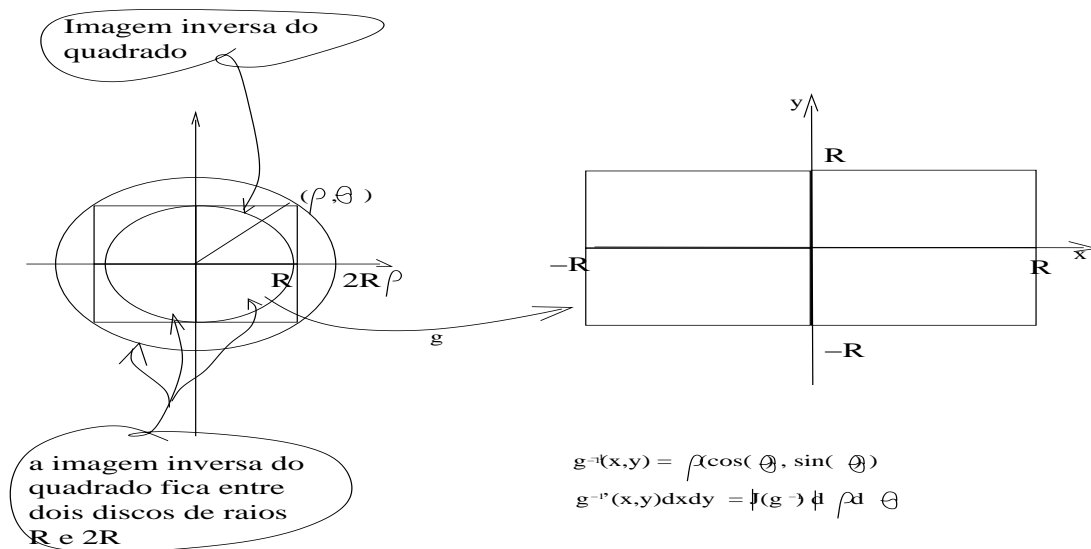


Figura 14:

Observe que um retângulo, *em coordenadas polares*, corresponde a um disco, neste caso um disco de raio A_R . Mas eu não sei qual é o valor exato de A_R nem interessa-me sabê-lo por que sei que está entre R e $\sqrt{2}R$, a figura (fig 14) mostra isto.

Como estou calculando a integral de uma função positiva, se a medida do domínio aumentar, aumenta o valor da integral⁹ o que me permite escrever a desigualdade:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \leq \int_{\Omega_R} \int e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \quad (122)$$

e quando R crescer indefinidamente estas três expressões tem o mesmo limite pelo teorema (de limites) do *sandwich*:

$$\int_{\Omega} \int e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} - 2\rho d\rho = \quad (123)$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} = -\pi(0 - 1) = \pi \quad (124)$$

em que Ω é o plano. Finalizamos assim o cálculo a integral de $x \mapsto e^{-x^2}$ sobre a reta inteira que é a raiz quadrada do valor desta integral dupla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (125)$$

⁹Aumentando a área da base, aumenta o volume.

Este exemplo me permite de escrever a fórmula de mudança de variável da integral (regra da cadeia para integral)

$$\int_W \int F(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \int F(g(s, t)) |\det(J(g))| ds dt = \int_{g^{-1}(W)} \int F(g(s, t)) |\det(J(g))| ds dt$$

que corresponde ao gráfico na figura (fig 15), página 35,

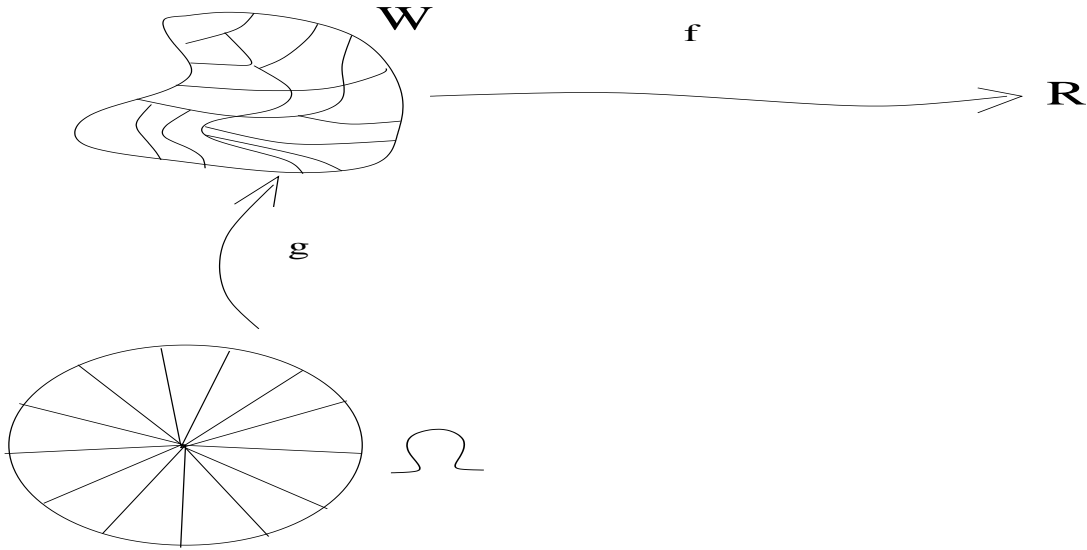


Figura 15: Mudança de variável multivariada e jacobiana

Para fazer a demonstração desta fórmula preciso me desvencilhar da expressão da soma de Riemann que venho usando com frequência, que é própria para se adequar aos programas, mas que é insuficiente para fazer demonstrações. As duas expressões abaixo, para integrais univariadas, são equivalentes, comentários depois das equações:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x) \Delta x \quad (126)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k \quad (127)$$

e as diferenças entre elas são:

1. (eq. 126) se supõe que a partição do intervalo $[a, b]$ é uniforme, então Δx pode ser posto em evidência otimizando o programa;
2. (eq. 127) se omite esta suposição de uniformidade, a medida do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ é Δx_k , o primeiro intervalo é $[x_0, x_1] = [a, a + \Delta x_0]$ e o último intervalo é $[x_{n-1}, x_n] = [b - \Delta x_{n-1}, b]$. O ponto x_k é o ponto inicial de cada sub-intervalo.

3. Para escrever os primeiros programas que calculassem integrais duplas (ou múltiplas) considere uma região retangular contendo o domínio de integração e dei como endereço para os sub-retângulos da malha o ponto inferior à esquerda de cada um deles para ficar coerente com a equação (eq. 126) e para trabalhar com partições uniformes que permitem dar muito maior velocidade¹⁰ aos programas.
4. A expressão equivalente a (eq. 127) para funções multivariadas é

$$\int_W f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)m(W_k) \quad (128)$$

em que x_k é um ponto selecionado arbitrariamente no subconjunto W_k . Se a função for integrável, quando refinarmos as partições sob a hipótese de que a medida das partes sejam todas menores do que s_n que é uma sucessão que converge para zero, o limite comum das somas de Riemann assim construídas é a integral. Este processo é equivalente ao da construção dos números reais usando o método de sucessões de Cauchy:

- (a) um número real é um representante de classe de sucessões de Cauchy equivalentes,
- (b) e a integral é o representante de classe (um número real) das sucessões de somas de Riemann equivalentes.

Provar que as sucessões de somas de Riemann são equivalentes equivale a provar que a integral existe no sentido de Riemann. Para fazer isto todos os autores usam a mesma técnica:

- (a) consideram funções positivas para eliminar problemas com as desigualdades (depois isto se resolve para uma função “qualquer”;
- (b) tomam as “somas inferiores” que são aquelas obtidas quando $f(x_k)$ é o mínimo de f em W_k ;
- (c) e as superiores quando $f(x_k)$ é o máximo de f em W_k e mostramos que estas duas sucessões têm o mesmo limite.
- (d) As inferiores são menores do que qualquer sucessão de somas de Riemann e as superiores são maior do que todas estas somas;
- (e) o teorema do sanduiche encerra a demonstração: não há outro limite possível senão o comum.

Vou usar a expressão da equação (eq. 128) para fazer a demonstração da regra da cadeia de integrais. A motivação geométrica é fornecida pela a figura (fig 15), página 35 em que existe uma função

$$g : \Omega \rightarrow W; g \text{ é diferenciável}$$

¹⁰É uma economia de $n \times m$ multiplicações.

a derivada de g é a matriz jacobiana $J(g)$ que é “transformação entre os domínios W e Ω ”.

$$\int_W f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)m(W_k) \approx \tag{129}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k))|\det(J(g)|_{t_k})|m(\Omega_k) \tag{130}$$

A equação (eq. 130) é uma hipótese de expressão com valor aproximado ao da soma de Riemann na equação (eq. 129) tirada dos exemplos que já apresentei. Poderíamos escrever uma igualdade se escrevessemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)m(W_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k))r_k m(\Omega_k); r_k = \frac{m(W_k)}{m(\Omega_k)}$$

Falta concluir esta demonstração!

Referências Bibliográficas

- [1] John W. Eaton. A high-level interactive language for numerical computations. Technical report, University of Texas - <ftp://che.utexas.edu/pub/octave/octave-M.N.tar.gz>, 1996.
- [2] the free encyclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free encyclopedia in the internet. <http://www.wikipedia.org>.
- [3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo em duas variáveis. In *Programas para Cálculo em duas variáveis*. <http://www.multivariado.sobralmatematica.org>.
- [4] Scilab Group. Scilab - program for numerical simulations. Technical report, INRIA - Unité de recherche de Rocquencourt - Projet Meta2 www.scilab.org, 2012.

Anexo I. Tabela de integrais

Autor Shapiro

© 2012. From <http://integral-table.com>

Tabela de Integrais

Fórmulas básicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrais das funções racionais

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrais de expressões com raiz

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \begin{cases} \frac{2a}{3}(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2}, & \text{or} \\ \frac{2}{3}x(x-a)^{3/2} - \frac{4}{15}(x-a)^{5/2}, & \text{or} \\ \frac{2}{15}(2a+3x)(x-a)^{3/2} \end{cases} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln \left| a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)} \right| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln \left| a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)} \right| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{b + 2ax}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} (-3b^2 + 2abx + 8a(c + ax^2)) + 3(b^3 - 4abc) \ln \left| b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (41)$$

Integrais com logaritmos

$$\int \ln ax \, dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} \quad (43)$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} \quad (44)$$

$$\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right), \quad n \neq -1 \quad (45)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} \, dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (46)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \quad (47)$$

$$\int \ln(ax + b) \, dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax + b) - x, \quad a \neq 0 \quad (48)$$

$$\int \ln(x^2 + a^2) \, dx = x \ln(x^2 + a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (49)$$

$$\int \ln(x^2 - a^2) \, dx = x \ln(x^2 - a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (50)$$

$$\int \ln(ax^2 + bx + c) \, dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac - b^2} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2 + bx + c) \quad (51)$$

$$\int x \ln(ax + b) \, dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax + b) \quad (52)$$

$$\int x \ln(a^2 - b^2x^2) \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2 - b^2x^2) \quad (53)$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = 2x - 2x \ln x + x(\ln x)^2 \quad (54)$$

$$\int (\ln x)^3 \, dx = -6x + x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x \quad (55)$$

$$\int x(\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \quad (56)$$

$$\int x^2(\ln x)^2 \, dx = \frac{2x^3}{27} + \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x \quad (57)$$

Integrais com a exponencial

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} \quad (58)$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax} dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (59)$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \quad (60)$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \quad (61)$$

$$\int x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x \quad (62)$$

$$\int x^2e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \quad (63)$$

$$\int x^3e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x \quad (64)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (65)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (66)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}(ix\sqrt{a}) \quad (67)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (68)$$

$$\int xe^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \quad (69)$$

$$\int x^2e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \quad (70)$$

Integrais com funções trigonométricas

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (72)$$

$$\int \sin^3 ax \, dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (73)$$

$$\int \sin^n ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \, {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (74)$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (75)$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (76)$$

$$\int \cos^3 ax \, dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (77)$$

$$\int \cos^p ax \, dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (78)$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c_1 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + c_3 \quad (79)$$

$$\int \cos ax \sin bx \, dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (80)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx \, dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (81)$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (82)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx \, dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (83)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax \, dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (84)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx \, dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (85)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (86)$$

$$\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (87)$$

$$\int \tan^2 ax \, dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (88)$$

$$\int \tan^n ax \, dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(n+1)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (89)$$

$$\int \tan^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (90)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (91)$$

$$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (92)$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (93)$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x \quad (94)$$

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (95)$$

$$\int \sec^n x \tan x \, dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (96)$$

$$\int \csc x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (97)$$

$$\int \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (98)$$

$$\int \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (99)$$

$$\int \csc^n x \cot x \, dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (100)$$

$$\int \sec x \csc x \, dx = \ln |\tan x| \quad (101)$$

Produtos de funções trigonométricas e monômios

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x \quad (102)$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (103)$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (104)$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (105)$$

$$\int x^n \cos x \, dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (106)$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)] \quad (107)$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x \quad (108)$$

$$\int x \sin ax \, dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (109)$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (110)$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (111)$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -\frac{1}{2}(i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (112)$$

$$\int x \cos^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x \quad (113)$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x \quad (114)$$

$$\int x \tan^2 x \, dx = -\frac{x^2}{2} + \ln \cos x + x \tan x \quad (115)$$

$$\int x \sec^2 x \, dx = \ln \cos x + x \tan x \quad (116)$$

Produtos de funções trigonométricas com a exponencial

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \quad (117)$$

$$\int e^{bx} \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(b \sin ax - a \cos ax) \quad (118)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \quad (119)$$

$$\int e^{bx} \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(a \sin ax + b \cos ax) \quad (120)$$

$$\int xe^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (121)$$

$$\int xe^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^x(x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (122)$$

Integrais das funções hiperbólicas

$$\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (123)$$

$$\int e^{ax} \cosh bx \, dx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (124)$$

$$\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (125)$$

$$\int e^{ax} \sinh bx \, dx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (126)$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (127)$$

$$\int e^{ax} \tanh bx \, dx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] \\ \quad - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[1, \frac{a}{2b}, 1 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (128)$$

$$\int \cos ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (129)$$

$$\int \cos ax \sinh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (130)$$

$$\int \sin ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (131)$$

$$\int \sin ax \sinh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (132)$$

$$\int \sinh ax \cosh ax \, dx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (133)$$

$$\int \sinh ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (134)$$

© 2012. From <http://integral-table.com>, última revisão, 2012.

Este material lhe é fornecido sem qualquer garantia ou proposta de que esteja sem erros, ou mesmo que lhe possa ser útil em alguma situação.

É um trabalho sob a licença *the Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 United States License*.

Para ver uma cópia desta licença visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/us/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Anexo II Integral de funções univariadas

Por Tarcisio Praciano-Pereira ¹¹

.1 Faixa delimitada por duas curvas

Vou mostrar^a como podemos calcular a área de uma faixa delimitada pelos gráficos de duas funções, f, g entre dois pontos dados, isto é, relativamente ao intervalo $[a, b]$.

^aPor Tarcisio Praciano-Pereira
www.sobralmatematica.org

A figura (fig. 16), página 49, mostra, graficamente, o meu objetivo.

¹¹<http://www.sobralmatematica.org>

área de uma faixa
delimitada por f e g
sobre $[a,b]$

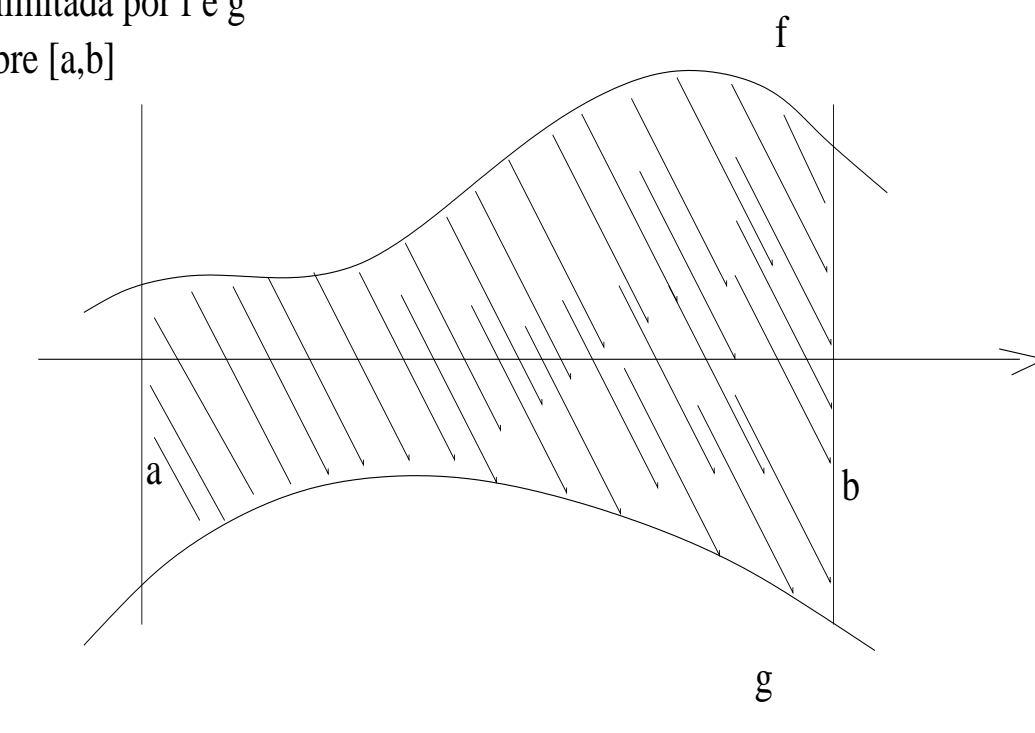


Figura 16: área de uma faixa $f(x) - g(x); x \in [a, b]$

Vou começar com um exemplo geométrico cuja área seja bem conhecida para que você veja que o método funciona neste caso. Depois vou passar para o caso de duas curvas que limitam uma faixa do plano cuja medida será obtida com o cálculo de uma integral, neste caso vou complementar sua intuição com um programa que vai calcular a integral aproximadamente com o qual você pode ver aparecer o valor aproximado da integral, e poderá aumentar a precisão selecionando um número maior para o número de intervalos da soma de Riemann.

.1.1 Faixa de medida nula

Considere a região plana do triângulo isóceles determinado pela primeira e pela segunda bissetriz dos eixos do ponto -3 até o ponto 3. Observe a figura (fig. 17), página 50,

A área desta faixa é nula uma vez que o limite superior da faixa, quando $x \in [-3, 0]$ se transforma no limite inferior quando $x \in [0, 3]$ e isto vai provocar uma inversão nos limites de integração. Como a região, sobre o domínio $x[-3, 0]$ é equivalente a região sobre o domínio $x[0, 3]$ estas áreas terão sinais contrários e, sendo iguais em módulo, se anulam. O cálculo da integral fará automaticamente esta reversão de sinais de modo será calculada a diferença entre as áreas.

triângulo isóceles determinado pela primeira e pela segunda bissetriz dos eixos

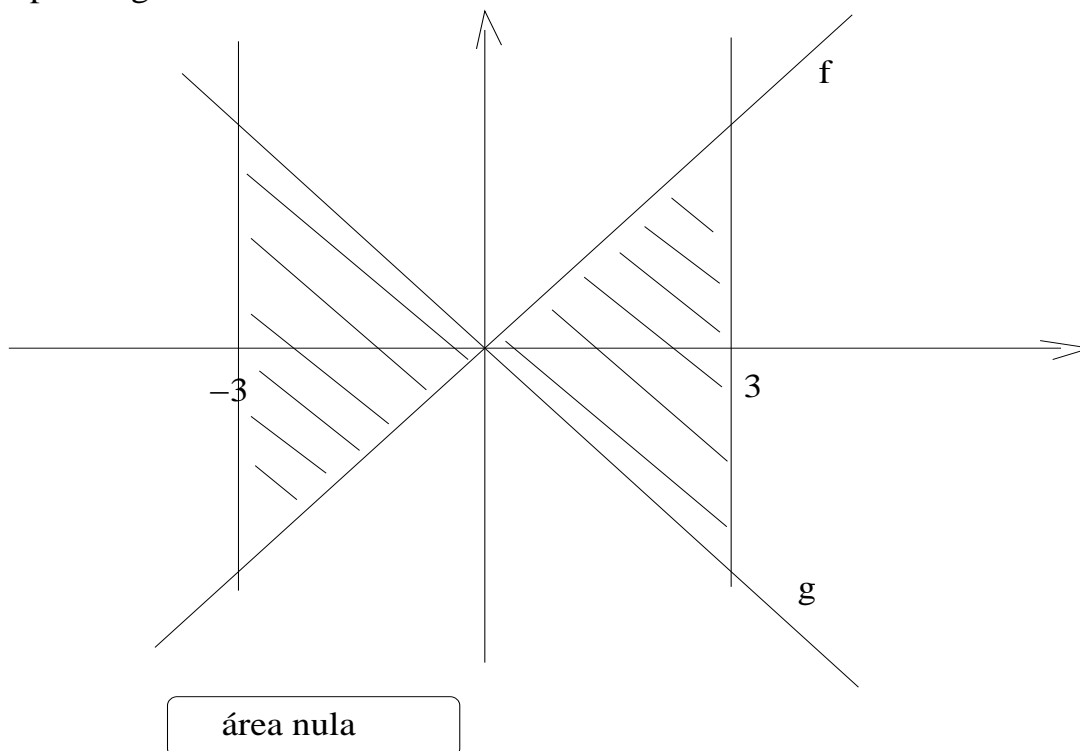


Figura 17: área nula de uma faixa

$$f(x) = x; g(x) = -x; \quad (135)$$

$$\int_{-3}^3 3f(x) - g(x) dx = \quad (136)$$

$$\int_{-3}^3 3x - (-x) dx = \int_{-3}^3 30 dx = 0; \quad (137)$$

O exemplo parece à primeira vista sem grande interesse, uma vez que termina com o cálculo de um integrando que é nulo. Mas o objetivo é exatamente este, mostrar-lhe num caso em que podemos calcular a área com nossa experiência geométrica, que o cálculo da integral se adapta perfeitamente para o cálculo.

.1.2 Médida de uma faixa

O próximo exemplo é menos trivial, mas vou completar sua intuição com auxílio de um programa cuja explicação lhe vai mostrar como funciona o método no cálculo da integral.

Considere as funções

$$f(x) = 2 \sin(x/3); g(x) = \left(\frac{x-3}{4}\right)^2;$$

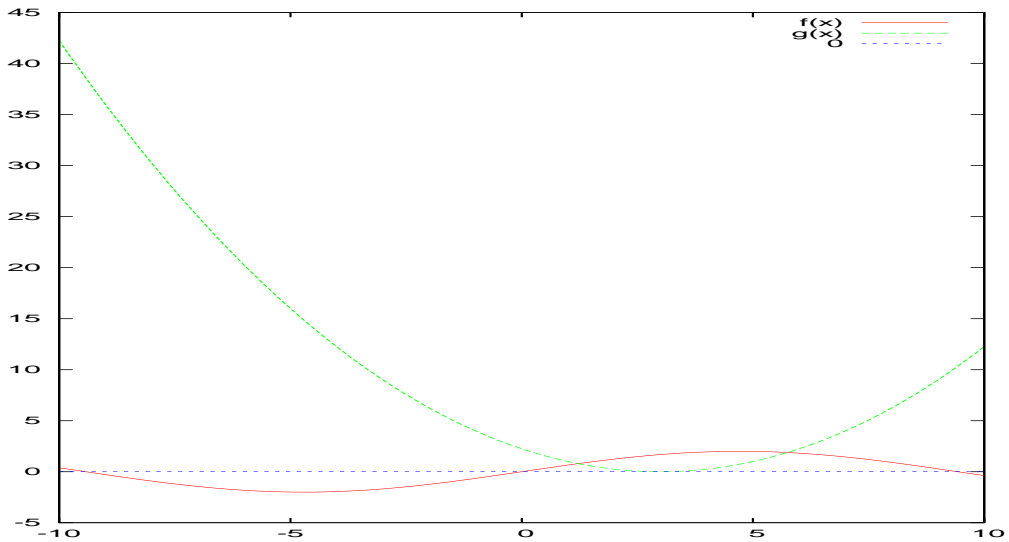


Figura 18: área duma faixa com limites curvilíneos

A figura (fig. 18), página 51, mostra a faixa limitada pelas funções f, g , e novamente aqui, como no caso dois triângulos semelhantes, opostos pelo vértice do primeiro exemplo, os limites superior e inferior da faixa se cruzam se transformando em limites *inferior* e *superior* em um determinado sub-intervalo. Veremos que não precisamos nos preocupar com os pontos de interseção e que o cálculo da integral vai se ocupar disto, automaticamente.

O programa que vou apresentar, posteriormente, também trata desta reversão sem que precisemos nos preocupar com o cálculo dos pontos de interseção das duas curvas exatamente porque o programa calcula integrais, aproximadamente, de acordo com as regras de integração.

O cálculo da integral

O método consiste em considerar a função diferença $f - g$, analise o gráfico, feito com `gnuplot`, na (fig. 19), e na (fig. 21), página 52, em que estão representadas, $f, g, (f - g)$. Eu vou calcular a integral da diferença. Na figura (fig. 19), se pode ver o comportamento da diferença entre dois pontos em que os gráfico de f e g se cortam: a diferença é zero e eles delimitam uma área positiva. Na figura seguinte temos uma visão global do gráfico no intervalo $[-10, 10]$ que sugere que as áreas negativas e positivas são muito próximas, em módulo e conseqüentemente o resultado da integral deve ficar próximo de zero, vamos verificar que se os cálculos confirmam esta visão intuitiva. Você pode ver isto fazendo um gráfico com `gnuplot` e dando zoom em volta do eixo OX .

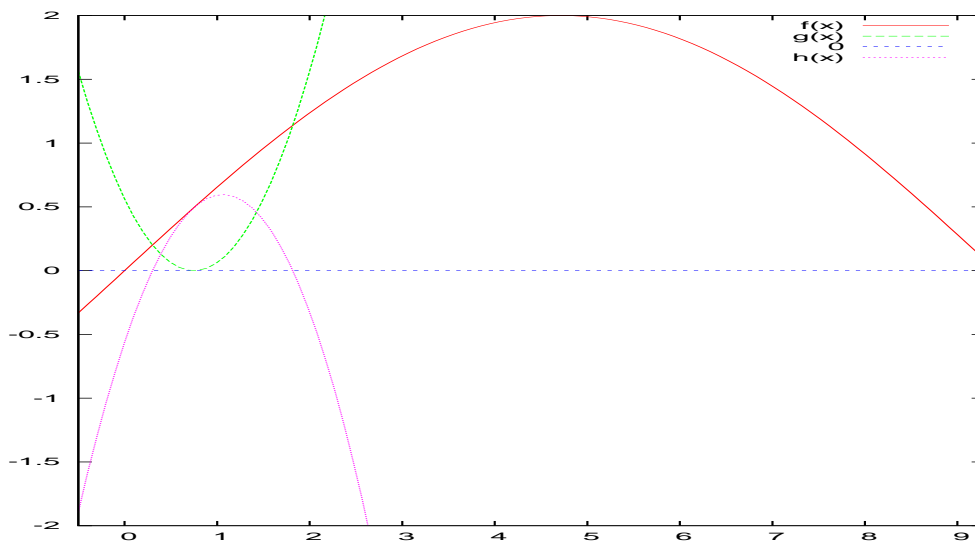


Figura 19: Detalhe da diferença $f - g$: os pontos em $f(x) - g(x) = 0$

$$\int_{-10}^{10} f(x) - g(x) dx = \int_{-10}^{10} 2 \sin(x/3) - \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 dx = \quad (138)$$

$$= \int_{-10}^{10} 2 \sin(x/3) dx - \int_{-10}^{10} \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 dx = \quad (139)$$

$$= 2 \int_{-10}^{10} \sin(x/3) dx - \frac{1}{16} \int_{-10}^{10} (x-3)^2 dx = \quad (140)$$

$$= 2 \cdot 3 \int_{-10}^{10} \sin(x/3) d(x/3) - \frac{1}{16} \int_{-10}^{10} (x-3)^2 d(x-3) \quad (141)$$

Na última equação eu preparei a expressão dos integrandos para aplicar “mudança de variável” que vou agora fazer. Observe que as igualdades continuam valendo porque numa das integrais a substituição do diferencial foi equilibrada com o coeficiente multiplicativo 3 fora da integral. Agora, para o cálculo dos novos limites de integração vou verificar o que representa nas “velha integral” o valor da variável x aplicada nos “velhos limites” para obter os novos limites de integração:

$$I = \int_{-10}^{10} f(x) dx = 6 \int_{-10/3}^{10/3} \sin(u) du = \quad (142)$$

$$= -6 (\cos(10/3) - \cos(-10/3)) = 0 \quad (143)$$

$$J = \int_{-10}^{10} g(x) dx = \frac{1}{16} \int_{-13}^7 u^2 du = \quad (144)$$

$$= \frac{1}{16} \frac{u^3}{3} \Big|_{-13}^7 = \frac{1}{48} (7^3 - (-13)^3) \approx 52.91 \quad (145)$$

$$I - J \approx 52.91 \quad (146)$$

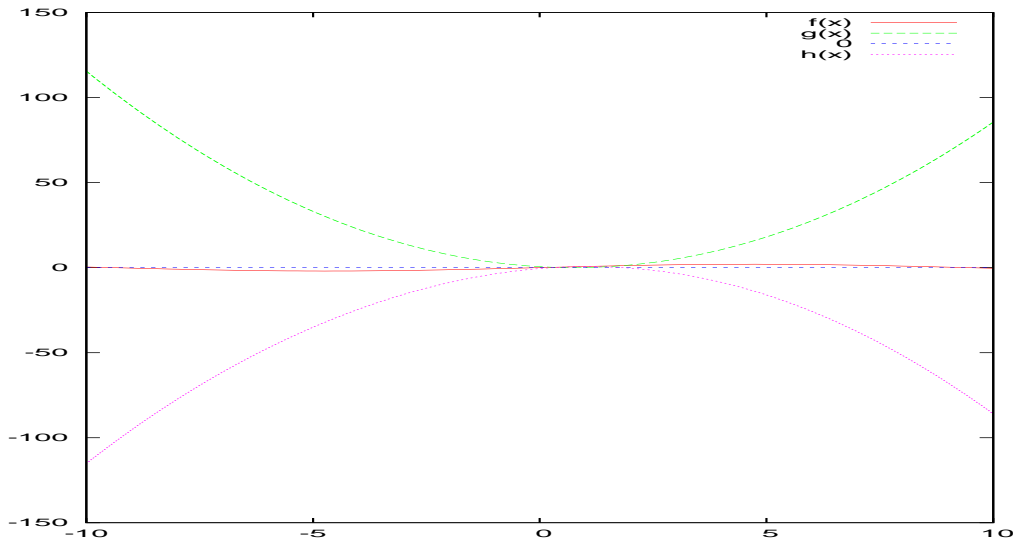


Figura 20: A função $f - g$, cuja integral está sendo calculada

Oberve que os cálculos poderiam ser abreviados com a observação de que a função \sin é ímpar e portanto qualquer integral desta função num intervalo equilibrado em volta de zero é nula: $I = 0$.

O cálculo com o programa vai verificar que se os cálculos algébricos estão corretos, embora o cálculo com o programa sejam aproximados, podemos obter aproximações suficientemente grandes para comprovar os cálculos algébricos, sobre tudo quando os valores se encontrarem distante de zero. Se o resultado for muito pequeno pode pairar dúvidas sobre o resultado da aproximação, e neste caso isto não acontece.

Programa para cálculo da integral

O programa é um script em `python` em que as funções que nos interessam estão definidas e ao final do script linhas de comando solicitam o cálculo desejado. Neste caso temos as seguintes funções definidas em `python`

1. `riemann(f, inicio, fim, delta, soma)` esta função recebe uma função univariada como parâmetro e calcula a soma de Riemann relativa ao intervalo $[inicio, fim]$ com precisão `delta`, o passo da malha. O parâmetro `soma` deve receber o valor zero, com isto se passa ao programa uma variável inicializada com zero onde serão acumulados os valores da soma de Riemann.
2. `riemannDuplaEntreCurvas(f, F, G, inicio, fim, n)` esta função recebe como parâmetros
 - (a) uma função bivariada, f ,
 - (b) duas funções univariadas, F, G ,

```

def riemann(f, inicio, fim, delta, soma): ## testado OK
    if (inicio == fim):
        bandeira = 0;
    elif (inicio > fim):
        bandeira = -1;
        inicio, fim = fim, inicio;
    else:
        bandeira = 1;
    while(inicio < fim):
        soma += f(inicio);
        inicio += delta;
    return bandeira*soma*delta;

## riemannduplaEntreCurvas(f, F, G, a, b, n)
def riemannDuplaEntreCurvas(f, F, G, inicio, fim, n):
    soma, delta, x = \
    0, (fim-inicio)/float(n), inicio;
    while(x < fim):
        soma += riemann(lambda t: f(x,t), F(x), G(x), delta, 0);
        x += delta;
    return(soma*delta);

def F(x):
    return 2*sin(x/3.0)

def G(x):
    return pow((x-3)/4.0,2);

def g(x,y):
    return 1;

print riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, fim, 100), 52.91
print riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, 1000),52.91
print riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, 10000), 52.91

```

Figura 21: A função $f - g$, cuja integral está sendo calculada

- (c) os extremos do intervalo $[inicio, fim]$,
- (d) o passo da malha, $delta$ e
- (e) soma inicializada com o valor zero.

Ela aplica somas de Riemann nas fibras do domínio limitado pelos gráficos de F, G dando saltos $delta$.

Se a função-parâmetro f for constante ela calcula a área limitada pelas duas curvas $graf(F), graf(G)$. Se a função-parâmetro f for uma função não constante bivariada, ela calcula o volume limitado por f sobre o domínio limitado pelas curvas $graf(F), graf(G)$.

Neste script F, G são as duas funções f, g do texto e g é uma função constante, consequentemente

`riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, fim, 100), 52.91`
vai calcular a área limitada entre as duas funções f, g no intervalo $[-10, 10]$ e também vai imprimir o valor que obtive nos cálculos formais para efeito de comparação.

Rodando:

```

riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, fim, 100), 52.91
riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, fim, 1000), 52.91

```



```
riemannDuplaEntreCurvas(g, F,G, -10,10, fim, 1000), 52.91  
obtive os valores
```

```
54.76 52.91
```

```
53.1128 52.91
```

```
52.92952 52.91
```

Você pode experimentar `riemann(f, inicio, fim, delta, soma)` para calcular qualquer integral univariada, ela funciona muito bem reconhecendo se você inverter a ordem dos limites de integração.