

Cálculo Multivariado Lista número 8
Revisão tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira Dep. de Computação

alun@:

24 de junho de 2013 Univ. Estadual Vale do Acaraú

L^AT_EX sis. op. Debian/GNU/Linux

www.multivariado.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 Revisão

objetivo: *NAF*

palavras chave: Teorema da Função Implícita, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Green.

1. Teorema de Green

(a) (V)[(F)][] **O campo vetorial**

$$V(x, y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (1)$$

é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

(b) (V)[(F)][] **Considere o campo vetorial**

$$V(x, y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (2)$$

e seja γ uma curva fechada do plano. Então

$$\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

(c) (V)[(F)][] **Considere o campo vetorial**

$$V(x, y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (3)$$

e sejam α e β duas curvas ligando os pontos

$$A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$$

do plano. As duas curvas, α, β , se originam no ponto A e terminam no ponto B . Então

$$\oint_{\alpha} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{\beta} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

quaisquer que sejam os pontos $A, B \in \mathbb{R}^2$.

(d) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (4)$$

e sejam α e β duas curvas ligando os pontos

$$A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$$

do plano. Chame de $-\beta$ a curva que se origina no ponto B e termina no ponto A , que coincide com β , mas no sentido contrário desta. Defina a curva γ como a união de α e $-\beta$ então

$$\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

quaisquer que sejam os pontos $A, B \in \mathbb{R}^2$.

(e) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (5)$$

e selecione um ponto arbitrário $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nestas condições

$$F(x, y) = \oint_{\gamma} P(s, t)ds + Q(s, t)dt$$

está bem definida para qualquer curva γ que se origine em $A = (x_0, y_0)$ e finalise em (x, y) , em outras palavras, qualquer curva γ que ligue os pontos $A = (x_0, y_0)$ e (x, y) . E nestas condições

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q;$$

2. Teorema de Green

(a) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (6)$$

é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

(b) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (7)$$

A integral

$$\oint_{S^1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

em que S^1 é o círculo trigonométrico.

(c) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (8)$$

A integral

$$\int_U \int P_y(x, y) - Q_x(x, y) dx dy = 0$$

em que U é o disco unitário com centro na origem.

(d) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (9)$$

A integral

$$\int_U \int P_y(x, y) - Q_x(x, y) dx dy = \frac{4\pi}{3}$$

em que U é o disco unitário com centro na origem.

(e) (V)[(F)] Considerere o campo vetorial

$$V(x, y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (10)$$

A integral

$$\int_U \int P_y(x, y) - Q_x(x, y) dx dy = \frac{3\pi}{4}$$

em que U é o disco unitário com centro na origem.

3. Integral Múltipla

(a) (V)[(F)] Se D for uma região do espaço \mathbb{R}^3 então

$$\int_D \int \int dx dy dz$$

é área da superfície que limita D .

(b) (V)[(F)] Se D for uma região do espaço \mathbb{R}^3 então

$$\int_D \int \int dx dy dz$$

é volume de D ou ainda, a medida de D , se esta integral existir.

(c) (V)[(F)] Se D for uma região limitada do \mathbb{R}^2 e

$$z = F(x, y) = 2$$

então

$$\int_D \int F(x, y) dx dy$$

é o volume de um sólido de altura 2 tendo por base D e o volume vale duas vezes a área de D , se esta integral existir (puder ser calculada).

(d) (V)[(F)] Se D for uma região limitada do \mathbb{R}^2 e $z = F(x, y)$ for uma função contínua definida em uma região que contenha D então, se

$$\int_D \int F(x, y) dx dy$$

existir, é o *volume algébrico* de um sólido limitado pelo gráfico de F e plano XOY restrito à região D , (a região D é a *base* deste sólido).

(e) (V)[(F)] U é um disco de raio 1 centrado na origem então

$$\int_U \int xy \, dx dy = \pi$$

4. Integral e Derivada

(a) (V)[(F)] No quadrado

$$D = [0, a] \times [0, a]; a > 0;$$

$$I = \int_D \int \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_a^{a\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (11)$$

(b) (V)[(F)] No quadrado $D = [0, a] \times [0, a]; a > 0$,

$$I = \int_D \int \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (12)$$

(c) (V)[(F)] $F(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ Definindo

$$\begin{cases} u(x, y) = x + y; \\ v(x, y) = 1 + x^2 + y^2; \\ F(x, y) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)} \end{cases}$$

então

$$F_x(x, y) = [u_x(x, y)v(x, y) - u(x, y)v_x(x, y)] / v(x, y)$$

(d) (V)[(F)] F(x, y) = $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ Definindo

$$\begin{cases} u(x, y) = x + y; \\ v(x, y) = 1 + x^2 + y^2; \\ F(x, y) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)} \end{cases}$$

então

$$F_y(x, y) = \frac{[y - 2xy + x^2y - y^3]}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

(e) (V)[(F)] O domínio de F é o plano todo. Considere um ponto do plano, um ponto dado, $P = (a, b)$.

$$\begin{cases} A = F_x(a, b); B = F_y(a, b); \\ P(x, y) = F(a, b) - A(x - a) - B(y - b) \end{cases}$$

P é a equação do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$.

5. Teor. Fund do Cálculo

(a) (V)[(F)]

$$u(x) = \sin(x); du = \cos(x)dx; \quad (12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = 1 \quad (13)$$

(b) (V)[(F)]

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \int_0^{\pi} \sin(2x) dx \quad (14)$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin(2x) d2x = \int_0^{\pi} \sin(t) dt = 0 \quad (15)$$

(c) (V)[(F)]

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx \quad (16)$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin(2x) d2x = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = \quad (17)$$

$$I = -\frac{1}{2} \cos(t) \Big|_0^{\pi/2} = 1 \quad (18)$$

(d) (V)[](F)[]

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} \cos(2x)dx \quad (19)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x)d2x = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(t)dt = 0 \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \quad (21)$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \quad (22)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \quad (23)$$

(e) (V)[](F)[]

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} \sin(2x)dx \quad (24)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(t)dt = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \quad (26)$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \quad (27)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi \quad (28)$$

Referências Bibliográficas

- [1] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo em duas variáveis. In *Programas para Cálculo em duas variáveis*. <http://www.multivariado.sobralmatematica.org>.
- [2] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, <http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/>, 2009.