Cálculo Multivariado
Revisão
T. Praciano-Pereira

Lista numero 07
tarcisio.praciano@gmail.com
Dep. de Computação

alun@:

13 de junho de 2013 **Univ. Estadual Vale do Acaraú**

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux
www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Revisão*

1. *computação Na figura ((1)), página 2,*

   Analise o programa (1) página 2.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O programa usa uma classe* `Ambiente` *da qual é criada uma* instância `Tela`.

   (b) *(V)[ ](F)[ ] O programa usa um método de* `Ambiente Tela.rotulo()`.

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O programa chama um método* `Tela.limpa_janela()` *definido na classe* `Ambiente.h` *e nunca chama, dentro do programa, a função* `rotulo()`.

   (d) *(V)[ ](F)[ ] A função* `rotulo()`, *é uma função vazia, nada faz, e também não é utilizada pelo programa.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ]* `Tela.limpa_apeteco2()` *é um método de* `Ambiente.h`

2. *computação*

   Analisando o programa (1) página 2.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Este programa tem uma variável do tipo* `int` *que é inicializada com o valor 250.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ]* `Tela.rotulo()` *é um método definido em* `Ambiente.h` *e pela estrutura do programa este métdo requer 4 parâmetros do tipo* `texto`.


```
# include <iostream>
# include "/home/tarcisio/tex/c/cplus/Ambiente.h"      // Biblioteca particular:
using namespace std; // a evitar - polui o espaço de nomes

int  rotulo();
Ambiente Tela;  // Uma instância de Ambiente - herda seus métodos

int main()
{
   int    numero=250; // (05) uma variável do tipo inteiro
   Tela.limpa_janela();
   Tela.mask(); // Tela herdou este método  definido em Ambiente
   Tela.rotulo("Este programa pede que você forneça um número",
         " maior do que 100  e verifica se você atendeu o ",
         "solicitado. ", "   "); // (10)
  Tela.apeteco2();  //  (20)
   numero = Tela.entrada_int(
            "Forneça-me um número maior do que 100 ", numero); // (05)
   // Tela.limpa_janela();  // melhora a aparência do programa!
   if (numero > 100) // (60)
      cout  << "Você atendeu ao combinado.  " << endl
            <<  numero << " é maior do que 100 " << endl
            <<  "como eu lhe pedi. " << endl; //  (50)
   else
       cout << "....você não fez o que pedi! " << endl;
   Tela.apetecof();   // Tela herdou este método  definido em Ambiente
   // Tela.copyleft();  // Tela herdou este método  definido em Ambiente
   return(0);
}


int rotulo() {
  return(0);
}
```

Figura 1: Um primeiro programa - para esta lista...

   (c) *(V)[ ](F)[ ]* `Tela.rotulo()` *é um método definido em* `Ambiente.h` *e pela estrutura do programa este método recebe três parâmetros do tipo texto.*

   (d) *(V)[ ](F)[ ]* `Tela.apeteco2()` *é um método definido em* `Ambiente.h` *e pela estrutura do programa este método não requer parâmetros.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ]* `Tela.rotulo()` *é um método definido em* `Ambiente.h` *e pela estrutura do programa este métdo recebe cinco parâmetros do tipo texto.*

3. *Curvas e gnuplot*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* gnuplot *mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.*

```
pow(x,n) = x**n;
set parametric
unset arrow
set trange [-5:5];
x3(t) = 2*t; y3(t) = t + pow(t,2);
dx3(t) = 2; dy3(t) = 1 + 2*t;
A1 = dx3(-3); B1 = dy3(-3);
A =  x3(-3); B = y3(-3);
set arrow from A,B to A+A1,B+B1 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

(b) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* gnuplot *mostram o gráfico de uma parábola com um vetor pararelo ao vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.*

```
set parametric; unset arrow;
unset arrow
pow(x,n) = x**n; a = -3;
set trange [-5:5];
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
P=x(a); Q =  y(a); A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
set arrow from P,Q to P+A,Q+B head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* gnuplot *mostram o gráfico de uma parábola com dois vetores tangentes em pontos do gráfico.*

```
set parametric; unset arrow;
set xrange [-10:10]; set yrange [-55:55]; set trange [-15:15];
pow(x,n) = x**n; a = 1; b = -4;
set trange [-5:5];
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
A = x(a); B = y(a); A1=dx(a);  B1=dy(a);
set arrow from A,B to A+A1, B+B1 head;
P = x(b); Q = y(b); P1=dx(b);  Q1=dy(b);
set arrow from P,Q to P+P1, Q+Q1 head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* gnuplot*, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram três vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.*


```
c = 3;  A2 = x(c); B2 = y(c); P3=dx(c);  Q3=dy(c);
set arrow from A2,B2 to A2+P3, B2+Q3 head;
replot
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* gnuplot*, mostram dolis vetores tangentes ao gráfico da curva* $(x3(t), y3(t))_{t\in[-10,10]}$

```
c = 5; d = -5
unset arrow;
set trange [-10,10];
pow(x,n) = x**n;
x3(t) = sin(3*t); y3(t) = pow(t,2) + t
dx3(t) = 3*cos(3*t); dy3(t) = 2*t + 1;
A3 = x3(c); B3 = y3(c);
P3 = x3(c)+dx3(c); Q3 =  y3(c)+dy3(c);
A4 = x3(d); B4 = y3(d);
P4 = x3(d)+dx3(d); Q4 =  y3(d)+dy3(d);
set arrow from A3,B3 to P3,Q3 head;
set arrow from A4,B4 to P4,Q4 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

4. *Variedades e dimensão*

Entenda variedade *como uma palavra que representa um* objeto *do espaço, esta palavra mais um "adjetivo do tipo* dimensão*" nos libertam da linguagem restritiva da* geometria euclidiana, *assim como a palavra* polinômio *nos permite falar de expressões algébricas de um grau qualquer nos libertando dos termos restritivos* monômio, binômio, trinômio ...

(a) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $z = F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz$ *representa uma* variedade *de dimensão 1 (*uma curva na terminologia geométrica*).*

(b) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ *representa uma* variedade *de dimensão 2 (*uma superfície na terminologia geométrica*).*

(c) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy = 0$ *(*uma superfície na terminologia geométrica*), é uma curva de nível zero.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Na expressão* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy = 0$*, se for possível explicitar* y*, podemos escrever uma expresão equivalente na forma* $y = f(x)$ *que é uma função univariada e cujo gráfico representa uma* variedade *de dimensão 1 (*uma curva na terminologia geométrica*) possivelmente com uma restrição de domínio.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Na expressão* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$*, se for possível explicitar* z*, e se pudermos encontrar um ponto* (a, b, c) *tal que* $F(a, b, c) = 0$*, podemos escrever esta expresão na forma* $z = f(x, y)$ *que é uma função de duas variáveis e cujo gráfico passa* *no ponto (a,b,c) e representa uma* variedade *de dimensão 2 (*uma superfície na terminologia geométrica*).*

5. *Laplaciano*

   A definição do operador de Laplace é

$$\Delta(F) = \nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

   Considere $F(x,y,z) = 4z^2y^2 - x^2y^2 - zy^3$

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{xx} = \frac{\partial F^2}{\partial x^2} = -y^2$
   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{xy} = \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} = -4xy$
   (c) *(V)[ ](F)[ ] De acordo com o teorema de Clairaut-Schwarz,* $F_{yx} = \frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = -4xy$ *é igual a* F_{xy}.
   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{zy} = \frac{\partial F^2}{\partial z \partial y} = 16yz - 3y^2$
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $\nabla^2(F) \neq 0$ *portanto $F(x,y,z)$ não é uma solução da equação de Laplace.*

6. *Equação de Laplace*

   Considere $F(x,y) = x^2 - y^2$

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{xx} = 2$
   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{yy} = -2$
   (c) *(V)[ ](F)[ ]* $\nabla^2(F) = 12x$
   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{yy} = 0$
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $\nabla^2(F) = 0$ *e F é uma solução da equação de Laplace.*

7. *Este item está baseado no programas* `DiferencialExata.py` *que se encontram no link "programas" da página da disciplina. A leitura e compreensão deste programa facilita a resolução da questão, mas não é necessária. Esta questão foi feita com auxílio deste programa e dum script do* `gnuplot` *que se encontra na questão 5 desta lista.*

   Considere o campo vetorial $(P(x,y), Q(x,y)) = (y/2, x/2)$

   Integral de Linha

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* (P,Q) *é uma derivada porque*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

   atendendo assim à condição do teorema de Clairaut-Schwarz para derivadas mistas.

   (b) *(V)[ ](F)[ ] A integral de $Pdx + Qdy$ sobre o círculo unitário*

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

   é nula.

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A integral de $Pdx + Qdy$ sobre o círculo unitário*

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

   é vale $\pm\pi$.

   (d) *(V)[ ](F)[ ] A integral*

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

   vale 0.

   (e) *(V)[ ](F)[ ] A integral*

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

   vale $-\pi$.

8. *Derivada de um campo Vetorial*

   $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$.

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^7$
   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$
   (c) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $J(F) : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^6$

9. *Integral de Linha* $F(x,y) = x^2 + y^3$ *cuja integral deve ser calculada sobre o domínio W de integração que é a região do plano delimitada pelo eixo OX pela parábola $y = f(x) = x^2$ e pelas retas $x = -4; x = 4$.*

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $\int\limits_{-4}^{4} \int\limits_{0}^{f} F(x,y)dydx$ *representa o cálculo desejado.*
   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $\int\limits_{-4}^{4} \int\limits_{0}^{f} F(x,y)dxdy$ *representa o cálculo desejado.*
   (c) *(V)[ ](F)[ ]* $\int\limits_{-4}^{4} \int\limits_{0}^{f} F(x,y)dydx = \frac{2}{5}4^5 + \frac{4^9}{18}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{0}^{f} F(x,y)dydx = 1$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{0}^{f} F(x,y)dydx = -1$

10. *integral simples*

(a) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\pi}^{\pi} cos^2(x)dx = \pi$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{0}^{\pi} sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{0}^{2\pi} sin^2(x)dx = \pi$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{0}^{\pi} cos^2(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} sin^2(x)dx$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{0}^{\pi} cos^2(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$