



Cálculo Multivariado

Revisão

T. Praciano-Pereira

alun@:

Lista numero 07

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

13 de junho de 2013

Univ. Estadual Vale do Acaraú

Documento escrito com L^AT_EX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Revisão*

1. computação Na figura ((1)), página 2,

Analise o programa (1) página 2.

- (a) (V)[](F)[] O programa usa uma classe `Ambiente` da qual é criada uma instância `Tela`.
- (b) (V)[](F)[] O programa usa um método de `Ambiente` `Tela.rotulo()`.
- (c) (V)[](F)[] O programa chama um método `Tela.limpa_janela()` definido na classe `Ambiente.h` e nunca chama, dentro do programa, a função `rotulo()`.
- (d) (V)[](F)[] A função `rotulo()`, é uma função vazia, nada faz, e também não é utilizada pelo programa.
- (e) (V)[](F)[] `Tela.limpa_apeteco2()` é um método de `Ambiente.h`

2. computação

Analisando o programa (1) página 2.

- (a) (V)[](F)[] Este programa tem uma variável do tipo `int` que é inicializada com o valor 250.
- (b) (V)[](F)[] `Tela.rotulo()` é um método definido em `Ambiente.h` e pela estrutura do programa este método requer 4 parâmetros do tipo `texto`.

```

# include <iostream>
# include "/home/tarcisio/tex/c/cplus/Ambiente.h" // Biblioteca particular:
using namespace std; // a evitar - polui o espaço de nomes

int rotulo();
Ambiente Tela; // Uma instância de Ambiente - herda seus métodos

int main()
{
    int numero=250; // (05) uma variável do tipo inteiro
    Tela.limpa_janela();
    Tela.mask(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    Tela.rotulo("Este programa pede que você forneça um número",
               " maior do que 100 e verifica se você atendeu o ",
               "solicitado. ", " "); // (10)
    Tela.apeteco2(); // (20)
    numero = Tela.entrada_int(
               "Forneça-me um número maior do que 100 ", numero); // (05)
    // Tela.limpa_janela(); // melhora a aparência do programa!
    if (numero > 100) // (60)
        cout << "Você atendeu ao combinado. " << endl
              << numero << " é maior do que 100 " << endl
              << "como eu lhe pedi. " << endl; // (50)
    else
        cout << "...você não fez o que pedi! " << endl;
    Tela.apetecof(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    // Tela.copyleft(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    return(0);
}

int rotulo() {
    return(0);
}

```

Figura 1: Um primeiro programa - para esta lista...

- (c) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe três parâmetros do tipo texto.
- (d) $(V)[](F)[]$ Tela.apeteco2() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método não requer parâmetros.
- (e) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe cinco parâmetros do tipo texto.

3. Curvas e gnuplot

- (a) (V)]](F)]] Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.

```
pow(x,n) = x**n;
set parametric
unset arrow
set trange [-5:5];
x3(t) = 2*t; y3(t) = t + pow(t,2);
dx3(t) = 2; dy3(t) = 1 + 2*t;
A1 = dx3(-3); B1 = dy3(-3);
A = x3(-3); B = y3(-3);
set arrow from A,B to A+A1,B+B1 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

- (b) (V)]](F)]] Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com um vetor paralelo ao vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.

```
set parametric; unset arrow;
unset arrow
pow(x,n) = x**n; a = -3;
set trange [-5:5];
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
P=x(a); Q = y(a); A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
set arrow from P,Q to P+A,Q+B head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

- (c) (V)]](F)]] Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com dois vetores tangentes em pontos do gráfico.

```
set parametric; unset arrow;
set xrange [-10:10]; set yrange [-55:55]; set trange [-15:15];
pow(x,n) = x**n; a = 1; b = -4;
set trange [-5:5];
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
A = x(a); B = y(a); A1=dx(a); B1=dy(a);
set arrow from A,B to A+A1, B+B1 head;
P = x(b); Q = y(b); P1=dx(b); Q1=dy(b);
set arrow from P,Q to P+P1, Q+Q1 head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

- (d) (V)]](F)]] Os comandos seguintes do gnuplot, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram três vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.

```

c = 3; A2 = x(c); B2 = y(c); P3=dx(c); Q3=dy(c);
set arrow from A2,B2 to A2+P3, B2+Q3 head;
replot

```

(e) (V)[](F)[] Os comandos seguintes do `gnuplot`, mostram dois vetores tangentes ao gráfico da curva $(x_3(t), y_3(t))_{t \in [-10, 10]}$

```

c = 5; d = -5
unset arrow;
set xrange [-10,10];
pow(x,n) = x**n;
x3(t) = sin(3*t); y3(t) = pow(t,2) + t
dx3(t) = 3*cos(3*t); dy3(t) = 2*t + 1;
A3 = x3(c); B3 = y3(c);
P3 = x3(c)+dx3(c); Q3 = y3(c)+dy3(c);
A4 = x3(d); B4 = y3(d);
P4 = x3(d)+dx3(d); Q4 = y3(d)+dy3(d);
set arrow from A3,B3 to P3,Q3 head;
set arrow from A4,B4 to P4,Q4 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);

```

4. Variedades e dimensão

Entenda variedade como uma palavra que representa um objeto do espaço, esta palavra mais um “adjetivo do tipo dimensão” nos libertam da linguagem restritiva da geometria euclidiana, assim como a palavra polinômio nos permite falar de expressões algébricas de um grau qualquer nos libertando dos termos restritivos monômio, binômio, trinômio . . .

- (a) (V)[](F)[] A expressão $z = F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz$ representa uma variedade de dimensão 1 (uma curva na terminologia geométrica).
- (b) (V)[](F)[] A expressão $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ representa uma variedade de dimensão 2 (uma superfície na terminologia geométrica).
- (c) (V)[](F)[] A expressão $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy = 0$ (uma superfície na terminologia geométrica), é uma curva de nível zero.
- (d) (V)[](F)[] Na expressão $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy = 0$, se for possível explicitar y , podemos escrever uma expressão equivalente na forma $y = f(x)$ que é uma função univariada e cujo gráfico representa uma variedade de dimensão 1 (uma curva na terminologia geométrica) possivelmente com uma restrição de domínio.
- (e) (V)[](F)[] Na expressão $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$, se for possível explicitar z , e se pudermos encontrar um ponto (a, b, c) tal que $F(a, b, c) = 0$, podemos escrever esta expressão na forma $z = f(x, y)$ que é uma função de duas variáveis e cujo gráfico passa

no ponto (a, b, c) e representa uma variedade de dimensão 2 (uma superfície na terminologia geométrica).

5. Laplaciano

A definição do operador de Laplace é

$$\Delta(F) = \nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Considere $F(x, y, z) = 4z^2y^2 - x^2y^2 - zy^3$

(a) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -y^2$

(b) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -4xy$

(c) De acordo com o teorema de Clairaut-Schwarz, $F_{yx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -4xy$ é igual a F_{xy} .

(d) $\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = 16yz - 3y^2$

(e) $\nabla^2(F) \neq 0$ portanto $F(x, y, z)$ não é uma solução da equação de Laplace.

6. Equação de Laplace

Considere $F(x, y) = x^2 - y^2$

(a) $F_{xx} = 2$

(b) $F_{yy} = -2$

(c) $\nabla^2(F) = 12x$

(d) $F_{yy} = 0$

(e) $\nabla^2(F) = 0$ e F é uma solução da equação de Laplace.

7. Este item está baseado no programas `DiferencialExata.py` que se encontram no link “programas” da página da disciplina. A leitura e compreensão deste programa facilita a resolução da questão, mas não é necessária. Esta questão foi feita com auxílio deste programa e dum script do `gnuplot` que se encontra na questão 5 desta lista.

Considere o campo vetorial $(P(x, y), Q(x, y)) = (y/2, x/2)$

Integral de Linha

(a) (P, Q) é uma derivada porque

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

atendendo assim à condição do teorema de Clairaut-Schwarz para derivadas mistas.

(b) (V)[](F)[] A integral de $Pdx + Qdy$ sobre o círculo unitário

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é nula.

(c) (V)[](F)[] A integral de $Pdx + Qdy$ sobre o círculo unitário

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é vale $\pm\pi$.

(d) (V)[](F)[] A integral

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

vale 0.

(e) (V)[](F)[] A integral

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

vale $-\pi$.

8. Derivada de um campo Vetorial

$$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4.$$

(a) (V)[](F)[] $J(F) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^7$

(b) (V)[](F)[] $J(F) : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$

(c) (V)[](F)[] $J(F) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

(d) (V)[](F)[] $J(F) : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$

(e) (V)[](F)[] $J(F) : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^6$

9. Integral de Linha $F(x, y) = x^2 + y^3$ cuja integral deve ser calculada sobre o domínio W de integração que é a região do plano delimitada pelo eixo OX pela parábola $y = f(x) = x^2$ e pelas retas $x = -4; x = 4$.

(a) (V)[](F)[] $\int_{-4}^4 \int_0^{f(x)} F(x, y) dy dx$ representa o cálculo desejado.

(b) (V)[](F)[] $\int_{-4}^4 \int_0^{f(x)} F(x, y) dx dy$ representa o cálculo desejado.

(c) (V)[](F)[] $\int_{-4}^4 \int_0^{f(x)} F(x, y) dy dx = \frac{2}{5}4^5 + \frac{4^9}{18}$

$$(d) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx = 1$$

$$(e) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx = -1$$

10. integral simples

$$(a) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \pi$$

$$(b) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$(c) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

$$(d) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

$$(e) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$$