



Calculo multivariado  
Teorema de Green  
T. Praciano-Pereira

Lista número 06  
tarcisio.praciano@gmail.com  
Dep. de Computação

alun@:

---

Univ. Estadual Vale do Acaraú 16 de maio de 2013

---

www.multivariado.sobralmatematica.org

---

Documento produzido com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Debian/Gnu/Linux

---

## 0.2 Informações

O programa `DiferencialExata.py` foi usado na confecção desta lista e ele se encontram na página da disciplina no link “programas”. Também foi usado com algumas alterações, o script do `gnuplot` que aparece na questão 5.

Data da entrega da lista: dia 20 de maio, segunda-feira.

### Exercícios 1 (Integral de linha) Teorema de Green

#### 0.2.1 Objetivo

Teorema de Green

**Palavras chave:** campo conservativo, campo escalar, campo vetorial, diferencial exato, integral de linha, integral múltipla

##### 1. Derivadas parciais

(a) (V)[ ](F)[ ] Sendo  $F(x, y) = x \cos(y)$  a jacobiana de  $F$  é

$$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Sendo  $F(x, y) = x \cos(y)$  a jacobiana de  $F$  é

$$\nabla(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Sendo  $F(x, y) = (1, xy, xy)$  a jacobiana de  $F$  é

$$J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,x} & F_{1,y} \\ F_{2,x} & F_{2,y} \\ F_{3,x} & F_{3,y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Sendo  $F(x, y, z) = x \cos(y) + z \cos(x)$  que é um campo escalar, o gradiente de  $F = \nabla(F)$  é a matriz formada por sua derivadas parciais

$$\begin{cases} \nabla(F) = J(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) - z \sin(x) & -x \sin(y) & \cos(x) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

é um campo vetorial.

(e) (V)[ ](F)[ ] Sendo  $F(x, y, z) = (y, z, x)$  que é um campo vetorial, a jacobiana de  $F$  é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

e  $\det(J(F)) = 1$

##### 2. Derivadas e campo vetorial

(a) (V)[ ](F)[ ] Se  $f(x, y) = xy$  então  $f$  é um função escalar de variável vetorial e pode ser uma derivada.

(b) (V)[ ](F)[ ]Potencial Como  $f(x, y) = xy$  é um função escalar de variável vetorial, um campo escalar então  $f$  não pode ser uma derivada. Ela mede (ou descreve) uma quantidade, é um potencial.

(c) (V)[ ](F)[ ]Campo vetorial Sendo  $F(x, y, z) = (x, y, xy, z)$ , então  $F$  é um campo vetorial e pode ser uma derivada. Se for uma derivada de uma função continuamente diferenciável, as derivadas mistas serão iguais (teste!).

(d) (V)[ ](F)[ ] Campo vetorial Sendo  $F(x, y, z) = (x, y, xy, z)$ , então  $F$  é um campo vetorial mas não é uma derivada porque, como tem três variáveis teria que ter apenas três derivadas parciais como coordenadas na imagem.

(e) (V)[ ](F)[ ] A função  $f(x) = (x, 2y)$  está mal definida.

##### 3. Circuito fechado

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (6)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (7)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (8)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (9)$$

(a) (V)[ ](F)[ ] As curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  se encontram no ponto  $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ .

(b) (V)[ ](F)[ ] As curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  se encontram no ponto  $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ .

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$  Como a curva  $\alpha_1$  passa nos pontos  $A, B$ , definidos nos itens anteriores, então podemos redefinir  $\alpha_1$  como

$$\alpha_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); t \in [-r, r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que  $\alpha_1$  é um caminho entre os pontos  $A, B$ .

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Como a curva  $\alpha_2$  passa nos pontos  $A, B$  definidos nos itens anteriores então podemos redefinir  $\alpha_2$  como

$$\alpha_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que  $\alpha_2$  é um caminho entre os pontos  $A, B$ .

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$  curva fechada Como as curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  passam nos pontos  $A, B$  definidos nos itens anteriores então podemos definir  $\alpha$  como

$$\alpha(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \alpha_1(t); \\ t \in [r, -r]; \alpha_2(t); \end{cases}; r = \sqrt{\frac{13}{2}} \quad (10)$$

e diremos que  $\alpha$  é um círculo fechado começando em  $A$  e terminando em  $A$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_2(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

#### 4. Círculo fechado Entender curvas e suas parametrizações.

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (11)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (12)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (13)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (14)$$

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  As curvas  $\alpha_3, \alpha_4$  se encontram no ponto  $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ .

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$  As curvas  $\alpha_3, \alpha_4$  se encontram no ponto  $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ .

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$  Como a curva  $\alpha_3$  passa nos pontos  $A, B$  definidos nos itens anteriores então podemos **redefinir**  $\alpha_3$  como

$$\alpha_3(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); t \in [-r, r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que  $\alpha_3$  é um caminho entre os pontos  $A, B$ , (vai no sentido de  $B$  para  $A$ ).

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Como a curva  $\alpha_4$  passa nos pontos  $A, B$  definidos nos itens anteriores então podemos **redefinir**  $\alpha_4$  como

$$\alpha_4(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); t \in [r, -r]; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

e diremos que  $\alpha_4$  é um caminho entre os pontos  $A, B$ , (vai no sentido de  $A$  para  $B$ ).

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$  Como as curvas  $\alpha_3, \alpha_4$  passam nos pontos  $A, B$  definidos nos itens anteriores então podemos definir  $\beta$  como

$$\beta(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \alpha_3(t); \\ t \in [r, -r]; \alpha_4(t); \end{cases}; r = \sqrt{\frac{13}{2}}; \quad (15)$$

e diremos que  $\beta$  é um círculo fechado começando em  $A$  e terminando em  $A$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

#### 5. Círculo fechado Objetivo usando **gnuplot** para entender curvas e suas parametrizações.

Considere as curvas definidas pelas equações em algum intervalo de parametrização a ser determinado.

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (16)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (17)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (18)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (19)$$

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  Os comandos do **gnuplot**

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_2(t)= t; y_2(t) = pow(t,2) - 4;
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5
plot x_1(t) , y_1(t), x_2(t) , y_2(t), x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas  $\alpha_1, \alpha_2$ .

(b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5;
plot x_3(t), y_3(t), x_4(t), y_4(t), x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas  $\alpha_3, \alpha_4$  sendo então possível definir o círculo (curva fechada)  $\gamma$  com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_3(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (20)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos  $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$  e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva  $\gamma$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_4(t) = t; y_4(t) = 31/2.0 - 2*pow(t,2);
x_5(t)= t; y_5(t) = 2.5;
plot x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t), x_5(t), y_5(t) ;
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

mostram o gráfico das curvas  $\alpha_1, \alpha_4$  sendo então possível definir o círculo (curva fechada)  $\gamma$  com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_1(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (21)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos  $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$  e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva  $\gamma$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_1(t) = t; y_1(t) = 9 - pow(t,2);
x_3(t) = t; y_3(t) = 23/4.0 - pow(t,2)/2.0;
plot x_1(t), y_1(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas  $\alpha_1, \alpha_3$  sendo então possível definir o círculo (curva fechada)  $\gamma$  com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r, r]; \alpha_1(t); \\ t \in [r, -r]; \alpha_3(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (22)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos  $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$  e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva  $\gamma$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_3(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

(e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Os comandos do gnuplot

```
pow(x,n)= x**n;
set parametric
r = sqrt(13/2.0);
set trange [-r:r]
x_2(t) = t; y_2(t) = pow(t,2) - 4 pow(t,2);
x_4(t) = t; y_3(t) = - pow(t,2) + 31/2.0;
plot x_2(t), y_2(t), x_4(t), y_4(t)
```

mostram o gráfico das curvas  $\alpha_2, \alpha_4$  sendo então possível definir o círculo (curva fechada)  $\gamma$  com as equações

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \in [-r : r]; \alpha_2(t); \\ t \in [r : -r]; \alpha_4(t); \end{cases} ; r = \sqrt{13/2.0}; \quad (23)$$

é uma curva fechada que passa nos pontos  $A = (r, \frac{5}{2}), B = (-r, \frac{5}{2})$  e qualquer um deles pode ser definido como o ponto inicial da curva  $\gamma$ .

**observação:** Aqui usei uma forma pouco usual de parametrização, usando o intervalo  $[r, -r]$ , em vez disto, o que se faz em geral é trocar o sinal do parâmetro:

$$t \in [-r, r]; \alpha_4(-t)$$

com isto inverte-se o sentido do percurso da curva (troca-se o sinal da derivada).

## 6. Integral de linha

Considere o campo vetorial

$$(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)); \quad (24)$$

$$(P(x, y), Q(x, y)) = (y, -x); \quad (25)$$

e as curvas

$$\alpha_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 9 - t^2); \quad (26)$$

$$\alpha_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t^2 - 4); \quad (27)$$

$$\alpha_3 = (x_3(t), y_3(t)) = (t, 23/4 - t^2/2); \quad (28)$$

$$\alpha_4 = (x_4(t), y_4(t)) = (t, -2t^2 + 31/2); \quad (29)$$

que se encontram todas nos pontos  $A = (\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$  ou no ponto  $B = (-\sqrt{\frac{13}{2}}, \frac{5}{2})$ .

O símbolo  $\oint$  representa uma integral que está sendo calculada ao longo de uma curva e é chamado de “integral de linha”. O seu valor se reduz a uma integral comum do Cálculo I quando escrevermos uma parametrização para a curva sobre um intervalo  $[a, b]$ .

$$(a) \oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} (P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1) dt$$

em que  $[A_1, B_1]$  é um intervalo de parametrização da curva  $\alpha_1$ .

$$(b) \oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} (P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1) dt$$

em que  $[A_1, B_1]$  é um intervalo de parametrização da curva  $\alpha_1$ , a menos do sinal. Depende do sentido do percurso.

$$(c) \oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt = \pm 13$$

$$(d) \oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 13.4$$

$$(e) \oint_{\alpha_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_1}^{B_1} P(x_1, y_1)dx_1 + Q(x_1, y_1)dy_1 dt \approx \pm 56.9390587745$$

7. Este item está baseado no programas `DiferencialExata.py` que se encontram no link “programas” da página da disciplina. A leitura e compreensão deste programa facilita a resolução da questão, mas não é necessária. Esta questão foi feita com auxílio deste programa e dum script do `gnuplot` que se encontra na questão 5 desta lista.

Considere o campo vetorial  $(P(x, y), Q(x, y)) = (y/2, -x/2)$

Integral de Linha

(a)  $\oint (P, Q)$  é uma derivada porque

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

atendendo assim à condição do teorema de Clairot-Schwarz para derivadas mistas.

(b)  $\oint A$  integral de  $Pdx + Qdy$  sobre o círculo unitário

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é nula.

(c)  $\oint A$  integral de  $Pdx + Qdy$  sobre o círculo unitário

$$(\cos(t), \sin(t)); t \in [0, 2\pi]$$

é vale  $\pm\pi$ .

(d)  $\oint A$  integral

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

vale  $\pi$ .

(e)  $\oint A$  integral

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

vale 0.

8. Derivada de um campo Vetorial

$F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

(a)  $(V)[\ ](F)[\ ] J(F) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

(b)  $(V)[\ ](F)[\ ] J(F) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$

(c)  $(V)[\ ](F)[\ ] J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}^m$

(d)  $(V)[\ ](F)[\ ] J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$

(e)  $(V)[\ ](F)[\ ] J(F) : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}^{n+m}$

9. Integral de Linha

$$F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (x, y);$$

é a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

(a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  A derivada implícita de  $F$  é

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (30)$$

(b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  A derivada implícita de  $F$  é

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \quad (31)$$

(c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$

A derivada implícita de  $F$  é

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (32)$$

(d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \quad (33)$$

(e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \quad (34)$$

10. Equação diferencial Descobrir qual é a função que corresponde a uma derivada.

(a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Dada a derivada (verifique se de fato é uma derivada)

$$J(F) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \quad (35)$$

então  $F(x, y) = 2xy$ .

(b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Dada a derivada (verifique se de fato é uma derivada)

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \end{pmatrix} \quad (36)$$

então  $F(x, y) = 2xy + C$  em que  $C$  é uma constante arbitrária.

(c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Dada a derivada (verifique se de fato é uma derivada)

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \end{pmatrix} \quad (37)$$

então  $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4$ .

(d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Dada a derivada (verifique se de fato é uma derivada)

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \end{pmatrix} \quad (38)$$

então  $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + C$  em que  $C$  é uma constante arbitrária.

(e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Dada a derivada (verifique se de fato é uma derivada)

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \end{pmatrix} \quad (39)$$

então  $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + C$  em que  $C$  é uma constante arbitrária.