Cálculo multivariado	**Lista numero 05**
Gradiente	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
alun@:	
24 de abril de 2013	**Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Documento escrito com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux
http://www.multivariado.sobralmatematica.org	

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Esta lista ainda está sendo editada, não imprima enquanto esta observação estiver presente, mas você pode, e deve baixá-la para ir começando o trabalho. Pode, ainda, haver erros.

Exercícios 1 *Gradiente e derivadas parciais*

objetivo: Objetivo: compreender que o gradiente é um vetor perpendicular à variedade de nível *e sua função no cálculo de extremos, compreender o uso da* derivada direcional *e a forma de calculá-la. Usar uma rota de nave espacial como motivação para os cálculos.*

palavras chave: *derivada direcional, gradiente, MinMax, nave espacial, Teorema da Função Implícita*

1. *Gradiente é um vetor perpendicular* à variedade de nível. *Questão teórica.*

   Considere $z = f(x, y)$, a equação de uma função de duas variáveis. O gráfico de f, $graf(f)$ é uma superfície, ou uma variedade de dimensão dois.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Como é possível escrever $z - f(x, y) = 0$ então eu podemos interpretar a equação $z = f(x, y)$ como* tendo sido obtida ao explicitar-se z em função de x, y a partir de uma equação "mais geral" $F(x, y, z) = K$ em que K é uma constante.

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Tendo uma equação "mais geral" $F(x, y, z) = K$ em que K é uma constante, sempre é possível explicitar a variável z escrevendo-se $z = f(x, y)$, como função de x, y.*
   Exemplos: a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; b) $x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$;

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível explicitar-se $z = f(x, y)$ a partir de uma equação mais geral $F(x, y, z) = K$. A derivada implícita de $F(x, y, z) = K$ permite-nos calcular*

   $$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz = 0 \quad (1)$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}/\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}/\frac{\partial F}{\partial y} \quad (2)$$
   $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (3)$$

   Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível explicitar $z = f(x, y)$ a partir de uma equação mais geral $F(x, y, z) = K$. A derivada implícita de $F(x, y, z) = K$ permite-nos calcular*

   $$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz = 0 \quad (4)$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial z};\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z} \quad (5)$$
   $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (6)$$

   Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível explicitar $z = f(x, y)$ a partir de uma equação mais geral $F(x, y, z) = K$, que também seja verdadeiro que $F(a, b, c) = K$ para um ponto $P = (a, b, c)$ do espaço e que F seja derivável. Então*

   $$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz = 0 \quad (7)$$
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial x}(z - c) = 0 \quad (8)$$
   $$\frac{\partial F}{\partial z}|_P \neq 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z}; \\ dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ z - c = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) \end{cases} \quad (9)$$

   A equação (8) é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$[1] *o vetor*

   $$(\frac{\partial F}{\partial x}|_P, \frac{\partial F}{\partial y}|_P, \frac{\partial F}{\partial z}|_P)$$

   é perpendicular ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ e o gradiente de f,

   $$(\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)})$$

   é perpendicular à curva nível $f(x, y) = c$ e também perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto (a, b).

   Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita

[1] O que é equivalente a dizer-se que é a equação do plano tangente ao gráfico de $F(x, y, z) = K$ no ponto (a, b, c)

2. *Considere* $F(x,y) = (x+3)\sin(xy)(x-4)$;

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$F_x(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} = (x-4)(x+3)y\cos(xy) + (x-4)\sin(xy) + (x+3)\sin(xy)$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$F_y(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = (x-4)(x+3)x\cos(xy)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] *A derivada implícita de* $z = F(x,y)$ *é*

$$\begin{cases} dz = F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = \\ = ((x-4)(x+3)y\cos(xy) + (2x-1)\sin(xy))\,dx + ((x-4)(x+3)x\cos(xy))\,dy \end{cases} \tag{10}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] *O gráfico da função* $z = F(x,y)$ *passa no ponto* $(-5,3,F(-5,3))$; $F(-5,3) = -18\sin(15)$

(e) (V)[ ](F)[ ] *O gráfico da função* $z = F(x,y)$ *passa no ponto* $(-5,3,F(-5,3))$; $F(-5,3) = 18\sin(15)$

3. *equação da reta tangente*

Considere $z = F(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$. *Nesta questão estou introduzindo nomes para as derivadas parciais de* F *com o objetivo de* tornar habitual uma notação consagrada para campos vetoriais*:* (P,Q) *em que* P,Q *são funções de duas ou mais variáveis (no presente caso funções de duas variáveis). Aqui é apenas uma notação extra.*

(a) (V)[ ](F)[ ] $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3y$

(b) (V)[ ](F)[ ] $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = -3x + 2y$

(c) (V)[ ](F)[ ] *Como* $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ *quando* $2x - 3y = 0$ *então se* $b = 2a/3$ *não é possível explicitar* x *como função de* y *no ponto* $(a,b) = (3,2)$.

(d) (V)[ ](F)[ ] *Se* $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ *quando* $2x - 3y = 0$ *então se* $b = 2a/3$ *é possível explicitar* y *como função de* x *numa vizinhança do ponto* $(a,b) = (3,2)$.

(e) (V)[ ](F)[ ] *Como* $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ *quando* $-3x + 2y \neq 0$ *então se* (a,b) *não pertencer a reta* $-3x + 2y = 0$ *é possível explicitar* y *como função de* x *numa vizinhança do ponto* (a,b) *mas tudo que podemos saber que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *neste ponto é*

$$m = \frac{2a - 3b}{-3a + 2b}$$

e a equação desta reta tangente será

$$y = b + m(x-a)$$

4. *gravitação universal*

Nesta questão estamos estudando a parte matemática da simulação da rota de uma nave espacial lançada da Terra para Marte e neste contexto $z = F(x,y,z)$ *representa o campo gravitacional de uma seleção conveniente dos diversos planetas no espaço*[2] *(a soma dos campos gravitacionais). Embora o campo gravitacional de qualquer corpo no Universo atue sobre qualquer outro corpo, a distância torna esta atuação desprezível, ou melhor, possível de ser corrigida com energia da própria nave. Nestas condições vamos considerar apenas 5 nós gravitacionais como os principais envolvidos neste cálculo. Você pode ler mais á respeito no texto sobre esta lista, na página do curso. Uma simplificação também vai ser feita, desprezar a variável* t*, vamos escrever* $F(x,y,z) = D$ *em vez de* $F(x,y,z,t) = D$*. Na verdade o "tempo" entra formalmente, mas na prática isto é feito* alterando as coordenadas dos nós gravitacionais *que se alteram ao longo do tempo.*

Verique quais das opções representam cálculos corretos em que

$$\begin{cases} F(x,y,z) = D; \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0; \\ D = F(a,b,c);\ \textit{ponto onde passa a hipersuperfície} \end{cases} \tag{11}$$

representa uma superfície de nível onde se move a nave espacial, a derivada implícita que serve de modelo para a variedade linear tangente, o valor de F *no ponto de tangência.*

O ponto (a,b,c)*, na equação (11), é um ponto do espaço no instante* t_0*, (omitida a variável* t*), que representa o início de um cíclo de correção do programa que pilota a nave.*

Não "existe" nenhuma expressão formal para F*, porém as expressões matemáticas das derivadas direcionais representam as "linhas de ação" da força gravitacional em ação sobre a nave e de fato são as derivadas direcionais da força gravitacional total representada pelo símbolo* F*. Os simbolos* $\vec{u}, \vec{v}$ *representam, respectivamente, vetores unitários na direção dos nós gravitacionais* 1 *e* 2*.*

(a) *Derivada direcional O produto escalar destes vetores com o gradiente,* $\nabla(F)$*, que surge quando calcularmos a derivada implícita de* F*, fornece a intensidade (um número) da força gravitacional do nó respectivo sobre a nave. É a derivada direcional na direção do vetor escolhido.*

(b) *Gradiente local Estes produtos tem que ser multiplicados pelo vetor unitário para "criar" um vetor na direção desejada e somados para produzir a diagonal da regra do paralelogramo. O produto de um*

[2] Havia um erro aqui com a omissão do predicativo "de uma seleção conveniente dos diversos planetas no espaço". Sem esta restrição a função $z = F(x,y,z)$ não teria sentido porque seria uma soma de uma infinidade de *nós gravitacionais*.

número, por um vetor unitário, cria um vetor com a intensidade desejada na direção do vetor unitário escolhido.

(c) *Gradiente do campo gravitacional Finalmente temos que somar a diagonal ao vetor posição para obtermos o resultado gráfico da força gravitacional atuando sobre a nave, isto completa o formalismo matemático, dentro do programa, para retratar a realidade da Astro Física.*

As contas devem traduzir estas operações físicas *dentro do programa que conduz a nave e este deve calcular os erros de rota e operar os propulsores para fazer a correção. Aqui estamos apresentando o formalismo matemático que se encontra dentro do programa.*

A figura (fig. (1) representa uma parcela na soma dos "lados" que compõem a a rota Terra-Marte.

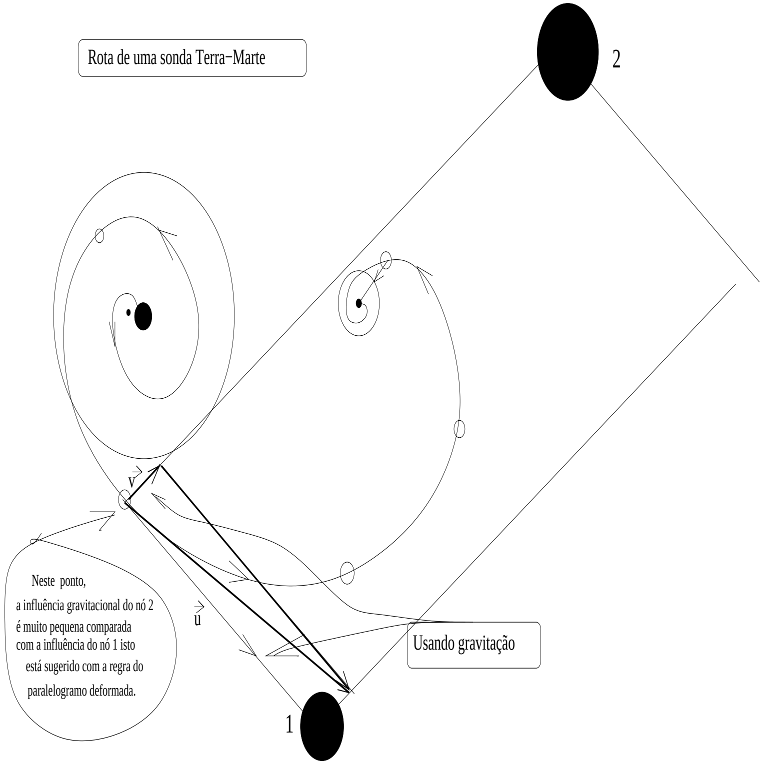

Figura 1: A derivada direcional

(a) *(V)[ ](F)[ ] A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional* 1*, figura (fig. (1), é*

$$\vec{u} \cdot (F_x dx, F_y dy) = \nabla(F)_u$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional* 1*, figura (fig. (1), é*

$$(\vec{u} \cdot (F_x dx, F_y dy))\, \vec{u} = \nabla(F)_u \vec{u}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] A força gravitacional na direção do nó gravitacional* 2*, figura (fig. (1), é*

$$(\vec{v} \cdot (F_x dx, F_y dy))\, \vec{v} = \nabla(F)_v \vec{v}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional* 1*, figura (fig. (1), é*

$$\vec{v} \cdot (F_x dx, F_y dy) = \nabla(F)_v$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A força gravitacional na direção do nó gravitacional* 1*, figura (fig. 1) , é zero.*

5. *Laplaciano*

   A definição do operador de Laplace é

$$\Delta(F) = \nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

   Considere $F(x, y, z) = 4z^2y - x^2y - y^3$

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{xx} = \frac{\partial F^2}{\partial x^2} = 2y$

   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{xx} = \frac{\partial F^2}{\partial x^2} = -2y$

   (c) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{yy} = \frac{\partial F^2}{\partial y^2} = -6y$

   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $F_{zz} = \frac{\partial F^2}{\partial z^2} = 8y$

   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $\nabla^2(F) = 0$ *portanto* $F(x, y, z) = 4z^2y - x^2y - y^3$ *é solução da equação de Laplace.*

6. *Divergente*

   Considere uma função vetorial de várias variáveis,

$$E(x, y, z) = (E_1(x, y, x), E_2(x, y, x), E_3(x, y, x)) \qquad (12)$$

   é uma função que tem tres coordenadas-função, ou uma função vetorial.

Uma forma muito comum de se apresentar funções vetoriais é a seguinte:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)E(x,y,z) \\ \mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z) \in \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto E(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \\ E(x,y,z) = (E_1(x,y,x), E_2(x,y,x), E_3(x,y,x)) \end{array}\right. \tag{13}$$

em que ρ é chamada de "densidade" e é uma função escalar, uma função numérica. E é a parte vetorial. O fator ρ é usado para fazer correções de modo conseguirmos resolver certas equações diferenciais. Aqui ele é pensado como "função de densidade", em equações diferenciais *ele visto como uma multiplicação corretiva chamado de* fator de integração.

(a) (V)[ ](F)[ ] *A jacobina de E é a matriz 3×3:*

$$J(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x} & \frac{\partial E_1}{\partial y} & \frac{\partial E_1}{\partial z} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} & \frac{\partial E_2}{\partial y} & \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x} & \frac{\partial E_3}{\partial y} & \frac{\partial E_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1x} & E_{1y} & E_{1z} \\ E_{2x} & E_{2y} & E_{2z} \\ E_{3x} & E_{3y} & E_{3z} \end{pmatrix} \tag{14}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] *O traço duma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço de $J(F)$ é o vetor*

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial y}, \frac{\partial E_3}{\partial x}\right) \tag{15}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] *O traço duma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço de $J(F)$ é a função numérica*

$$\mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial x} \in \mathbf{R} \tag{16}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] *O operador* div, *por definição, se aplica em funções vetoriais e é o traço da jacobiana.*

$$div(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial y}, \frac{\partial E_3}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{17}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *O operador* div, *por definição, se aplica em funções vetoriais e é o traço da jacobiana.*

$$div(E) = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial x} \tag{18}$$

7. *Divergente*

Considere a função vetorial

$$\left\{\begin{array}{l} V(x,y,z) = f(x,y,z)E(x,y,z) \\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) \in \mathbf{R} \text{ função numérica - densidade;} \\ (x,y,z) \mapsto E(x,y,z) = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ função vetorial;} \end{array}\right. \tag{19}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] *A jacobiana de V é*

$$J(V) = \nabla(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_x & \rho_y & \rho_z \end{pmatrix} \tag{20}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] *A jacobiana de V é*

$$J(V) = \begin{pmatrix} f + xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & f + yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & f + zf_z \end{pmatrix} \tag{21}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$J(V) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & zf_z \end{pmatrix} \tag{22}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$J(V) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & zf_z \end{pmatrix} \tag{23}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$fJ(E) + J(f)E \tag{24}$$

8. *Equação de Laplace*

Considere $F(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(a) (V)[ ](F)[ ] $F_{xx} = 6x$
(b) (V)[ ](F)[ ] $F_{yy} = 6x$
(c) (V)[ ](F)[ ] $\nabla^2(F) = 12x$
(d) (V)[ ](F)[ ] $F_{yy} = -6x$
(e) (V)[ ](F)[ ] $\nabla^2(F) = 0$ *e F é uma solução da equação de Laplace.*

9. *rotacional*

A equação

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) & a\sin(\omega t) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

é a equação de um corpo rodando em torno do eixo OZ, observe que $z(t) = z$ é constante em relação ao tempo.

(a) (V)[ ](F)[ ] *A derivada da função vetorial $\vec{r}(t)$ é*

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) & a\omega\cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada da função vetorial $\vec{r}(t)$ é*

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\omega y(t) & \omega x(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada da função vetorial $\vec{r}(t)$ é*

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -a\omega y(t)\vec{i} + a\omega x(t)\vec{j} \tag{28}$$

em que os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ são os vetores unitários da Física.

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Por definição, o rotacional é o operador*

$$rot(V) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1(x,y,z) & V_2(x,y,z) & V_3(x,y,z) \end{vmatrix} \tag{29}$$

aplicado a um campo vetorial V. Então $rot(\vec{r(t)}) = 2\omega$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Por definição, o rotacional é o operador*

$$rot(V) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1(x,y,z) & V_2(x,y,z) & V_3(x,y,z) \end{vmatrix} \tag{30}$$

aplicado a um campo vetorial V. Então

$$rot(\vec{r(t)}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{d}{dt}\vec{r}_1 & \frac{d}{dt}\vec{r}_2 & \frac{d}{dt}\vec{r}_3 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

10. <u>*Equação de Laplace*</u>

$F(x,y) = ln(x^2+y^2) + x - \frac{x}{x^2+y^2}$

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $F_x = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $F_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $F_y = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\nabla^2(F) = \frac{2x+2y}{x^2+y^2} + 1 + \frac{y^2+2xy+x^2}{(x^2+y^2)^2}$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\nabla^2(F) = \frac{2x+2y}{x^2+y^2} + 1 + \frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$