

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Esta lista ainda está sendo editada, não imprima enquanto esta observação estiver presente, mas você pode, e deve baixá-la para ir começando o trabalho. Pode, ainda, haver erros.

### Exercícios 1 *Gradiente e derivadas parciais*

*objetivo:* *Objetivo: compreender que o gradiente é um vetor perpendicular à variedade de nível e sua função no cálculo de extremos, compreender o uso da derivada direcional e a forma de calculá-la. Usar uma rota de nave espacial como motivação para os cálculos.*

**palavras chave:** *derivada direcional, gradiente, MinMax, nave espacial, Teorema da Função Implícita*

1. Gradiente é um vetor perpendicular à variedade de nível. *Questão teórica.*

*Considere  $z = f(x, y)$ , a equação de uma função de duas variáveis. O gráfico de  $f$ ,  $\text{graf}(f)$  é uma superfície, ou uma variedade de dimensão dois.*

(a) (V)[ ](F)[ ] *Como é possível escrever  $z - f(x, y) = 0$  então eu podemos interpretar a equação  $z = f(x, y)$  como tendo sido obtida ao explicitar-se  $z$  em função de  $x, y$  a partir de uma equação “mais geral”  $F(x, y, z) = K$  em que  $K$  é uma constante.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *Tendo uma equação “mais geral”  $F(x, y, z) = K$  em que  $K$  é uma constante, sempre é possível explicitar a variável  $z$  escrevendo-se  $z = f(x, y)$ , como função de  $x, y$ .*

*Exemplos: a)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ; b)  $x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$ ;*

(c) (V)[ ](F)[ ] *Suponha que seja possível explicitar-se  $z = f(x, y)$  a partir de uma equação mais geral  $F(x, y, z) = K$ . A derivada implícita*

de  $F(x, y, z) = K$  permite-nos calcular

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} / \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} / \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (3)$$

*Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita*

- (d) (V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível explicitar  $z = f(x, y)$  a partir de uma equação mais geral  $F(x, y, z) = K$ . A derivada implícita de  $F(x, y, z) = K$  permite-nos calcular

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z} \quad (5)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (6)$$

*Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita*

- (e) (V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível explicitar  $z = f(x, y)$  a partir de uma equação mais geral  $F(x, y, z) = K$ , que também seja verdadeiro que  $F(a, b, c) = K$  para um ponto  $P = (a, b, c)$  do espaço e que  $F$  seja derivável. Então

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}|_P \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}; \\ dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ z - c = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) \end{cases} \quad (9)$$

A equação (8) é a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ <sup>1</sup> o vetor

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}|_P, \frac{\partial F}{\partial y}|_P, \frac{\partial F}{\partial z}|_P \right)$$

é perpendicular ao plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  e o gradiente de  $f$ ,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)} \right)$$

é perpendicular à curva nível  $f(x, y) = c$  e também perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b)$ .

*Obs: Leia, sem assustar-se, o teorema da função implícita*

---

<sup>1</sup>O que é equivalente a dizer-se que é a equação do plano tangente ao gráfico de  $F(x, y, z) = K$  no ponto  $(a, b, c)$

2. Considere  $F(x, y) = (x + 3) \sin(xy)(x - 4)$ ;

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$F_x(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} = (x-4)(x+3)y \cos(xy) + (x-4) \sin(xy) + (x+3) \sin(xy)$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$F_y(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = (x-4)(x+3)x \cos(xy)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] A derivada implícita de  $z = F(x, y)$  é

$$\begin{cases} dz = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy = \\ = ((x-4)(x+3)y \cos(xy) + (2x-1) \sin(xy)) dx + ((x-4)(x+3)x \cos(xy)) dy \end{cases} \quad (10)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função  $z = F(x, y)$  passa no ponto  $(-5, 3, F(-5, 3))$ ;  
 $F(-5, 3) = -18 \sin(15)$

(e) (V)[ ](F)[ ] O gráfico da função  $z = F(x, y)$  passa no ponto  $(-5, 3, F(-5, 3))$ ;  
 $F(-5, 3) = 18 \sin(15)$

3. equação da reta tangente

Considere  $z = F(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ . Nesta questão estou introduzindo nomes para as derivadas parciais de  $F$  com o objetivo de tornar habitual uma notação consagrada para campos vetoriais:  $(P, Q)$  em que  $P, Q$  são funções de duas ou mais variáveis (no presente caso funções de duas variáveis). Aqui é apenas uma notação extra.

(a) (V)[ ](F)[ ]  $P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3y$

(b) (V)[ ](F)[ ]  $Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = -3x + 2y$

(c) (V)[ ](F)[ ] Como  $P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$  quando  $2x - 3y = 0$  então se  $b = 2a/3$  não é possível explicitar  $x$  como função de  $y$  no ponto  $(a, b) = (3, 2)$ .

(d) (V)[ ](F)[ ] Se  $Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  quando  $2x - 3y = 0$  então se  $b = 2a/3$  é possível explicitar  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança do ponto  $(a, b) = (3, 2)$ .

(e) (V)[ ](F)[ ] Como  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  quando  $-3x + 2y \neq 0$  então se  $(a, b)$  não pertencer a reta  $-3x + 2y = 0$  é possível explicitar  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança do ponto  $(a, b)$  mas tudo que podemos saber que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  neste ponto é

$$m = \frac{2a - 3b}{-3a + 2b}$$

e a equação desta reta tangente será

$$y = b + m(x - a)$$

#### 4. gravitação universal

Nesta questão estamos estudando a parte matemática da simulação da rota de uma nave espacial lançada da Terra para Marte e neste contexto  $z = F(x, y, z)$  representa o campo gravitacional de uma seleção conveniente dos diversos planetas no espaço<sup>2</sup> (a soma dos campos gravitacionais). Embora o campo gravitacional de qualquer corpo no Universo atue sobre qualquer outro corpo, a distância torna esta atuação desprezível, ou melhor, possível de ser corrigida com energia da própria nave. Nestas condições vamos considerar apenas 5 nós gravitacionais como os principais envolvidos neste cálculo. Você pode ler mais a respeito no texto sobre esta lista, na página do curso. Uma simplificação também vai ser feita, desprezar a variável  $t$ , vamos escrever  $F(x, y, z) = D$  em vez de  $F(x, y, z, t) = D$ . Na verdade o “tempo” entra formalmente, mas na prática isto é feito alterando as coordenadas dos nós gravitacionais que se alteram ao longo do tempo.

Verifique quais das opções representam cálculos corretos em que

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = D; \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0; \\ D = F(a, b, c); \text{ ponto onde passa a hipersuperfície} \end{array} \right. \quad (11)$$

representa uma superfície de nível onde se move a nave espacial, a derivada implícita que serve de modelo para a variedade linear tangente, o valor de  $F$  no ponto de tangência.

O ponto  $(a, b, c)$ , na equação (11), é um ponto do espaço no instante  $t_0$ , (omitida a variável  $t$ ), que representa o início de um ciclo de correção do programa que pilota a nave.

Não “existe” nenhuma expressão formal para  $F$ , porém as expressões matemáticas das derivadas direcionais representam as “linhas de ação” da força gravitacional em ação sobre a nave e de fato são as derivadas direcionais da força gravitacional total representada pelo símbolo  $F$ . Os símbolos  $\vec{u}, \vec{v}$  representam, respectivamente, vetores unitários na direção dos nós gravitacionais 1 e 2.

- (a) Derivada direcional O produto escalar destes vetores com o gradiente,  $\nabla(F)$ , que surge quando calcularmos a derivada implícita de  $F$ , fornece a intensidade (um número) da força gravitacional do nó respectivo sobre a nave. É a derivada direcional na direção do vetor escolhido.
- (b) Gradiente local Estes produtos tem que ser multiplicados pelo vetor unitário para “criar” um vetor na direção desejada e somados para produzir a diagonal da regra do paralelogramo. O produto de um

---

<sup>2</sup>Havia um erro aqui com a omissão do predicativo “de uma seleção conveniente dos diversos planetas no espaço”. Sem esta restrição a função  $z = F(x, y, z)$  não teria sentido porque seria uma soma de uma infinidade de nós gravitacionais.

número, por um vetor unitário, cria um vetor com a intensidade desejada na direção do vetor unitário escolhido.

- (c) Gradiente do campo gravitacional Finalmente temos que somar a diagonal ao vetor posição para obtermos o resultado gráfico da força gravitacional atuando sobre a nave, isto completa o formalismo matemático, dentro do programa, para retratar a realidade da Astro Física.

As contas devem traduzir estas operações físicas dentro do programa que conduz a nave e este deve calcular os erros de rota e operar os propulsores para fazer a correção. Aqui estamos apresentando o formalismo matemático que se encontra dentro do programa.

A figura (fig. (1) representa uma parcela na soma dos “lados” que compõem a a rota Terra-Marte.

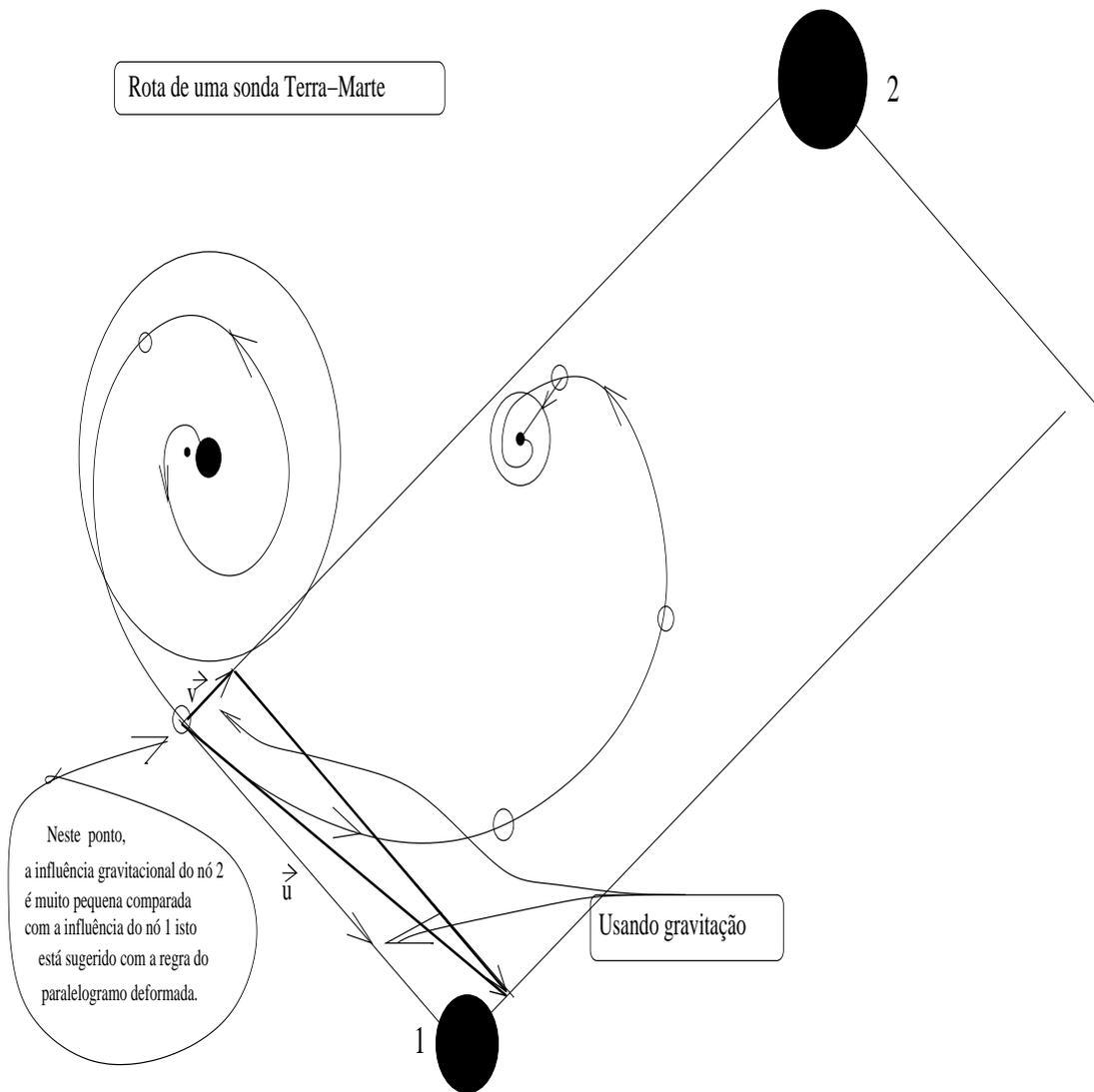


Figura 1: A derivada direcional

(a)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]}$  A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional 1, figura (fig. (1)), é

$$\vec{u} \cdot (F_x dx, F_y dy) = \nabla(F)_u$$

(b)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]}$  A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional 1, figura (fig. (1)), é

$$(\vec{u} \cdot (F_x dx, F_y dy)) \vec{u} = \nabla(F)_u \vec{u}$$

(c)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]}$  A força gravitacional na direção do nó gravitacional 2, figura (fig. (1)), é

$$(\vec{v} \cdot (F_x dx, F_y dy)) \vec{v} = \nabla(F)_v \vec{v}$$

(d)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]}$  A força gravitacional, uma grandeza vetorial, na direção do nó gravitacional 1, figura (fig. (1)), é

$$\vec{v} \cdot (F_x dx, F_y dy) = \nabla(F)_v$$

(e)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]}$  A força gravitacional na direção do nó gravitacional 1, figura (fig. 1), é zero.

### 5. Laplaciano

A definição do operador de Laplace é

$$\Delta(F) = \nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Considere  $F(x, y, z) = 4z^2y - x^2y - y^3$

(a)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]} F_{xx} = \frac{\partial F^2}{\partial x^2} = 2y$

(b)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]} F_{xx} = \frac{\partial F^2}{\partial x^2} = -2y$

(c)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]} F_{yy} = \frac{\partial F^2}{\partial y^2} = -6y$

(d)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]} F_{zz} = \frac{\partial F^2}{\partial z^2} = 8y$

(e)  $\frac{(V)}{[ ](F)[ ]} \nabla^2(F) = 0$  portanto  $F(x, y, z) = 4z^2y - x^2y - y^3$  é solução da equação de Laplace.

### 6. Divergente

Considere uma função vetorial de várias variáveis,

$$E(x, y, z) = (E_1(x, y, x), E_2(x, y, x), E_3(x, y, x)) \quad (12)$$

é uma função que tem tres coordenadas-função, ou uma função vetorial.

Uma forma muito comum de se apresentar funções vetoriais é a seguinte:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z)E(x, y, z) \\ \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z) \in \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto E(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \\ E(x, y, z) = (E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z)) \end{cases} \quad (13)$$

em que  $\rho$  é chamada de “densidade” e é uma função escalar, uma função numérica.  $E$  é a parte vetorial. O fator  $\rho$  é usado para fazer correções de modo conseguirmos resolver certas equações diferenciais. Aqui ele é pensado como “função de densidade”, em equações diferenciais ele visto como uma multiplicação corretiva chamado de fator de integração.

(a) (V)[ ](F)[ ] A jacobina de  $E$  é a matriz  $3 \times 3$ :

$$J(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x} & \frac{\partial E_1}{\partial y} & \frac{\partial E_1}{\partial z} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} & \frac{\partial E_2}{\partial y} & \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x} & \frac{\partial E_3}{\partial y} & \frac{\partial E_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1x} & E_{1y} & E_{1z} \\ E_{2x} & E_{2y} & E_{2z} \\ E_{3x} & E_{3y} & E_{3z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] O traço duma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço de  $J(F)$  é o vetor

$$\left( \frac{\partial E_1}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial y}, \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) \quad (15)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] O traço duma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço de  $J(F)$  é a função numérica

$$\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \in \mathbf{R} \quad (16)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O operador  $\text{div}$ , por definição, se aplica em funções vetoriais e é o traço da jacobiana.

$$\text{div}(E) = \left( \frac{\partial E_1}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial y}, \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) \quad (17)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O operador  $\text{div}$ , por definição, se aplica em funções vetoriais e é o traço da jacobiana.

$$\text{div}(E) = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \quad (18)$$

## 7. Divergente

Considere a função vetorial

$$\begin{cases} V(x, y, z) = f(x, y, z)E(x, y, z) \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbf{R} \text{ função numérica - densidade;} \\ (x, y, z) \mapsto E(x, y, z) = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ função vetorial;} \end{cases} \quad (19)$$

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  A jacobiana de  $V$  é

$$J(V) = \nabla(\rho) = ( \rho_x \quad \rho_y \quad \rho_z ) \quad (20)$$

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$  A jacobiana de  $V$  é

$$J(V) = \begin{pmatrix} f + xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & f + yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & f + zf_z \end{pmatrix} \quad (21)$$

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$

$$J(V) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & zf_z \end{pmatrix} \quad (22)$$

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$

$$J(V) = f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xf_x & xf_y & xf_z \\ yf_x & yf_y & yf_z \\ zf_x & zf_y & zf_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$

$$fJ(E) + J(f)E \quad (24)$$

## 8. Equação de Laplace

Considere  $F(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$   $F_{xx} = 6x$

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$   $F_{yy} = 6x$

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $\nabla^2(F) = 12x$

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$   $F_{yy} = -6x$

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$   $\nabla^2(F) = 0$  e  $F$  é uma solução da equação de Laplace.

## 9. rotacional

A equação

$$\vec{r}(t) = ( a \cos(\omega t) \quad a \sin(\omega t) \quad z ) = ( x(t) \quad y(t) \quad z(t) ) \quad (25)$$

é a equação de um corpo rodando em torno do eixo  $OZ$ , observe que  $z(t) = z$  é constante em relação ao tempo.

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  A derivada da função vetorial  $\vec{r}(t)$  é

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = ( -a\omega \sin(\omega t) \quad a\omega \cos(\omega t) \quad 0 ) \quad (26)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função vetorial  $\vec{r}(t)$  é

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\omega y(t) & \omega x(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função vetorial  $\vec{r}(t)$  é

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -a\omega y(t)\vec{i} + a\omega x(t)\vec{j} \quad (28)$$

em que os vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  são os vetores unitários da Física.

(d) (V)[ ](F)[ ] Por definição, o rotacional é o operador

$$\text{rot}(V) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1(x, y, z) & V_2(x, y, z) & V_3(x, y, z) \end{vmatrix} \quad (29)$$

aplicado a um campo vetorial  $V$ . Então  $\text{rot}(\vec{r}(t)) = 2\omega$

(e) (V)[ ](F)[ ] Por definição, o rotacional é o operador

$$\text{rot}(V) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1(x, y, z) & V_2(x, y, z) & V_3(x, y, z) \end{vmatrix} \quad (30)$$

aplicado a um campo vetorial  $V$ . Então

$$\text{rot}(\vec{r}(t)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{d}{dt}\vec{r}_1 & \frac{d}{dt}\vec{r}_2 & \frac{d}{dt}\vec{r}_3 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

## 10. Equação de Laplace

$$F(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$(a) \text{ (V)[ ](F)[ ] } F_x = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(b) \text{ (V)[ ](F)[ ] } F_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(c) \text{ (V)[ ](F)[ ] } F_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(d) \text{ (V)[ ](F)[ ] } \nabla^2(F) = \frac{2x + 2y}{x^2 + y^2} + 1 + \frac{y^2 + 2xy + x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(e) \text{ (V)[ ](F)[ ] } \nabla^2(F) = \frac{2x + 2y}{x^2 + y^2} + 1 + \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$