Cálculo multivariado	**Lista numero 04**
Curvas com gnuplot	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**

alun@:

15 de abril de 2013	**Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Documento escrito com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção. Alternativamente, resolva a lista diretamente na página do Moodle da Sobral Matematica.

> Esta lista ainda está sendo editada, quando estiver pronta esta observação irá desaparecer. Não imprima enquanto esta observação estiver presente.

Exercícios 1 *Curvas com gnuplot* *objetivo: Entender como gnuplot produz curvas e aprender a colocar uma curva sobre uma superfície no espaço (e ver o gráfico).*

palavras chave: *Curvas, curvas no espaço, derivada implícita, gnuplot e curvas, gradiente, integral de curvas, regra da cadéia*

1. *Curvas com gnuplot* *Sendo* $z = F(x, y) = x^2 - y^2$ *uma função diferenciável e* $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$ *então*

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $F(\alpha(t))$ *é um círculo no espaço 3D quanddo* $t \in [-\pi, \pi]$

   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ *é uma curva no espaço cuja projeção sobre o plano* XOY *é o círculo trigonométrico.*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos* $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ *fazendo* t *variar de acordo com um passo* δ *e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do* `gnuplot`

   ```
   plot "dados" with points
   ```

   irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão.

(d) (V)[ ](F)[ ] *Com auxílio de um programa posso construir os pontos* $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ *fazendo t variar de acordo com um passo* δ *e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do* `gnuplot` *irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão:*

```
splot "dados" with points
```

(e) (V)[ ](F)[ ] *Com auxílio de um programa posso construir os pontos* $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ *fazendo t variar de acordo com um passo* δ *e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do* `gnuplot` *irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão desenhada em cima da variedade bidimensional* $graf(F(x, y))$.

splot F(x,y), "dados"with points

2. *regra da cadeia*

Considere $z = F(x, y)$ *e* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva parametrizada no intervalo I*

(a) (V)[ ](F)[ ] $\gamma(t) = F(\alpha(t))$ *é uma curva plana como sugere a sucessão de comandos do* `gnuplot`

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
print "(", 3, ",", gama(3),")", " , ",  "(", 4, ",", gama(4),")", "...
```

(b) (V)[ ](F)[ ] *Se* α *for uma curva plana e* $g(t) = F(\alpha(t))$ *então*

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço $3D$ *e os comandos seguintes do* `gnuplot` *mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva* γ.

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
a = -3;
set arrow from 0,0 to x(a), y(a);
b = -3;
set arrow from 0,0 to x(b), y(b);
splot F(x,y);
```

(c) (V)[ ](F)[ ] *Se* α *for uma curva plana e* $g(t) = F(\alpha(t))$ *então*

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço $3D$ *e os comandos seguintes do* `gnuplot` *mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva* γ.

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
gama(t) = (x(t), y(t), F(x(t),y(t));
t1 = -3; a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = F(a1, b1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(x(t1),y(t1))*dx(t1) + D_yF(x(t1),y(t1))*dy(t1);
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y), gama(t);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço $3D$.*

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado "dados", contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ. Os comandos seguintes do gnuplot *mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ.*

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço $3D$.*

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado "dados", contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ. Os comandos seguintes do gnuplot *mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ.*

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = - 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
```

```
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

3. *Curva no espaço*

   Se $z = F(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$ *e* $t \mapsto \alpha(t)$ *for uma curva plana então*

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $g(t) = F(\alpha(t))$ *é uma função univariada.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ]* $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ *é uma variedade de dimensão 1 imersa na variedade tridimensional* $\mathbf{R}^3$ *cuja projeção no plano* XOY *é a curva*
   $$t \mapsto \alpha(t);$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A derivada da curva* γ *é a curva* $t \mapsto (\alpha'(t), g'(t))$.

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Dado um valor para* $t = a$ *então o vetor* $(\alpha'(a), g'(a))$ *é paralelo a um vetor tangente ao gráfico de* γ.

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Dado um valor para* $t = a$ *então o vetor*
   $$(\alpha(a), g(a)) + (\alpha'(a), g'(a))$$
   é tangente ao gráfico de γ *no ponto* $(\alpha(a), g(a))$.

4. *Integral de curvas*

   Sendo $z = F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ *e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $g(t) = F(x(t), y(t))$ *é uma função univariada que é diferenciável.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Nas condições do item anterior,*
   $$g'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t);$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ]* g' *definida no item anterior é uma função univariada.*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Pelo Teorema Fundamental do Cálculo*
   $$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a);$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Suponha que* $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$, *então* $\int\limits_0^{2\pi} g'(t)dt = 0$

5. <u>*integral de curvas*</u>

   Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ *e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Então* $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), F(x(t), y(t))$ *é uma função univariada do* tipo *"função vetorial de variável real", quer dizer, transforma* um número *n*um vetor *do* $\mathbf{R}^3$. $graf(\gamma)$ *é uma variedade de dimensão 1.*

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Podemos calcular a integral* $\int\limits_a^b \gamma(t)dt$ *em que* γ *está definida no item 5a sendo o resultado o vetor*

   $$\left(\int\limits_a^b x(t)dt, \int\limits_a^b y(t)dt, \int\limits_a^b F(x(t), y(t))dt\right)$$

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt$ *é um número real, em que* γ *está definida no 5a.*

   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

   $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t)dt, \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x(t), y(t))dt\right) = (0, 0, 2\pi)$$

   é um vetor do $\mathbf{R}^3$.

   (e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada* $\gamma'(t)$ *existe e vale*

   $$(\alpha'(t), F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t));$$

   γ *está definida no item 5a.*

6. <u>*integral de curvas*</u>

   Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ *e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t)))$ *é um curva plana.*

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t)$ *é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo "$\cdot$" é o produto escalar.*

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \times \alpha'(t)$ *é uma curva no espaço* $\mathbf{R}^3$. *O produto indicado com o símbolo "$\times$" é o produto vetorial.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se* $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ *for uma curva diferenciável então* $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$ *é uma função univariada.O produto indicado com o símbolo "·" é o produto escalar.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] A integral* $\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt$ *é um número e se*

$$\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$$

então

$$\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt = 0;$$

O produto indicado com o símbolo "·" é o produto escalar.

7. *Curva de nível*

Sendo $z = F(x, y)$ *uma função diferenciável e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* $F(x, y) = c$, *em que* c *é uma constante dada, pelo Teorema da Função Implícita, é uma variedade de dimensão 1 e pode ter uma curva por solução, chamada de "curva de nível c de* F*".*

(b) *(V)[ ](F)[ ] A curva definida no item 7a é uma curva contida no plano* XOY*, no domínio de* F*.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Calculando a derivada implícita de* $F(x, y) = c$ *podemos concluir que o gradiente de* F *é perpendicular a qualquer curva de nível.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que* $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$ *seja uma curva diferenciável do plano* XOY *então* $[a, b] \ni t \mapsto (\gamma(t), F(\gamma(t)))$ *é uma curva diferenciável do espaço* $\mathbf{R}^3$ *colocada sobre o gráfico de* F*.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] É possível calcular a integral* $\int_a^b (\gamma(t), F(\gamma(t)))dt$ *e o resultado é um número real.*

8. *Curvas com gnuplot O símbolo* ∇ *representa o gradiente. Sendo*

$$z = F(x, y)$$

uma função diferenciável e

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

em que x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}$ *não tem sentido porque não está definida a multiplicação entre dois vetores.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada implícita de* $G(t) = F(\alpha(t))$ *mostra que podemos dar um sentido ao produto de vetores que aparece no item 8b como um produto escalar* $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivação implicita usada no item 8c mostra que*

$$\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(a), y(a)) - F(x(b), y(b))$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivação implicita usada no item 8c mostra que*

$$F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

9. <u>*Curvas com gnuplot*</u>
Sendo $w = F(x, y, z)$ *uma função diferenciável e*

$$t \mapsto (\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

em que x, y, z *são três funções diferenciáveis, então*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada implicita de* $F(x, y, z) = d$ *em que* d *é uma constante, mostra que* ∇F *é perpendicular às superfícies de nível* $F(x, y, z) = d$ *quando estas existirem.*

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A função* $[a, b] \ni t \mapsto (\alpha(t), F(\alpha(t)))$ *é uma curva diferenciável no espaço 4D*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\frac{d}{dt}(\alpha(t), F(\alpha(t)) = (\alpha'(t), \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t))$

(d) <u>*Vetor normal a uma superfície*(V)[ ](F)[ ]</u> *Parte do cálculo no item 9c sugere o cálculo de um coeficiente de variação que fica representado pela expressão* perfeitamente calculável $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t)$. *Esta expressão será otimizada quando* $\gamma(t)$ *tiver a mesma direção do gradiente.*

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Suponha que seja possível definir*

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$$

correspondendo a cada valor de t *um vetor unitário na direção de* ∇F. *Então a integral*

$$\int_a^n \nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t) dt$$

está bem definida e é um número real.