



Cálculo multivariado
curvas e superfícies

T. Praciano-Pereira

alun@:

9 de abril de 2013

Lista numero 03

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

Univ. Estadual Vale do Aca

Documento escrito com \LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

<http://www.multivariado.sobralmatematica.org>

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Data da entrega 17 de Abril de 2013

Exercícios 1 *Curvas objetivo: Descrição e propriedades de caminhos no espaço*

palavras chave: *curvas, derivada implícita, plano tangente, reta tangente, vetor perpendicular, vetor tangente, parametrização, variedade de dimensão n, variedade linear tangente.*

1. *Curvas e Derivação* O gráfico de uma função pode ser visto como uma curva parametrizada pelo sistema de equações $t \mapsto (t, f(t))$ ou mais geralmente, se forem dadas duas equações, $x(t), y(t)$ a função

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

representa uma curva, neste caso uma curva cuja imagem se encontra no espaço 2D o que entendemos por “uma curva plana”. Se três equações forem dadas $x(t), y(t), z(t)$ então

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

seria uma curva do espaço 3D.

- (a) $(V)[](F)[]$ O gráfico da função $y = f(x)$ pode ser obtido como curva parametrizada com o sistema de equações paramétricas

$$t \mapsto (t , f(t)) \quad (1)$$

- (b) $(V)[](F)[]$ A curva $t \mapsto (0, t)$ é o eixo OX.

- (c) $(V)[](F)[]$ A curva $t \mapsto (t, 0)$ é o eixo OX.

- (d) $(V)[](F)[]$ A curva $t \mapsto (0, t)$ é o eixo OY.

- (e) $(V)[](F)[]$ A curva $t \mapsto (t, t)$ é o eixo OY é a primeira bissetriz dos eixos.

Comandos do gnuplot para você experimentar:

```
set parametric \# basta digitar 'set param', gnuplot entende o resto
x(t) = 0; y(t) = t;
plot x(t), y(t); \# um par de equações separadas por vírgula...
x1(t) = sin(t); y1(t) = cos(t);
plot x(t), y(t), x1(t), y2(t); \# dois pares de equações...
set arrow from 0,0 to x1(3), y1(3) head;
replot; \# refaz o plot
help \# é a ajuda do gnuplot, um manual on-line, sorry, in English!
```

2. Curvas e Derivação

No gnuplot o comando:

```
set arrow from a,b to p,q [head]
```

coloca um segmento orientado do ponto (a, b) até o ponto (p, q) . O comando “unset arrow” limpa a memória de “vetores” do gnuplot.

Considere a curva

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$$

cuja derivada é

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$$

- (a) $(V)[](F)[]$ Os comandos seguintes do gnuplot desenham o sistema de eixos coordenados e a primeira bissetriz dos eixos:

```
set parametric
x1(t) = t; y1(t) = 0;
x2(t) = 0; y2(t) = t;
x3(t) = t; y3(t) = t;
set arrow from 0,0 to -3,3 head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t), x3(t), y3(t);
```

- (b) $(V)[](F)[]$ Os comandos seguintes do gnuplot desenham o sistema de eixos coordenados e a primeira bissetriz dos eixos:

```
set parametric
unset arrow
x1(t) = t; y1(t) = 0;
```

```
x2(t) = 0; y2(t) = t;
x3(t) = t; y3(t) = -t;
set arrow from 0,0 to -3,3 head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t), x3(t), y3(t);
```

- (c) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot produzem o gráfico da curva α com um vetor tangente à curva em um ponto determinado.

```
set parametric
unset arrow
x3(t) = cos(t); y3(t) = sin(t);
set size 1,0.6;
a=-3;
set arrow from 0,0 to -sin(a), cos(a) head
x1(t) = t; y1(t) = 0;
x2(t) = 0; y2(t) = t;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t), x3(t), y3(t);
```

- (d) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot produzem o gráfico de um vetor e de outro vetor paralelo a ele obtido com a regra do paralelogramo. Traça também os eixos coordenados.

```
set parametric; unset arrow;
a = -3; b = 5; p = 5; q = 7;
set xrange [-15:15]; set yrange [-15:15];
x1(t) = t; y1(t) = 0; x2(t) = 0; y2(t) = t;
set arrow from 0,0 to a,b head; set arrow from 0,0 to p,q head;
set arrow from p,q to (a+p), (b+q) head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t);
```

- (e) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot produzem o gráfico da curva α com um vetor tangente à curva em um ponto determinado.

```
set parametric; unset arrow;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
set size 1,0.6; set xrange [-15:15]; set yrange [-15:15];
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
a=-3; A = x(a); B = y(a); P = x(a) + dx(a); Q = y(a) + dy(a);
set arrow from A,B to P,Q head;
x1(t) = t; y1(t) = 0; x2(t) = 0; y2(t) = t;
plot x(t), y(t), x1(t), y1(t), x2(t), y2(t);
```

3. Curvas e Derivação

- (a) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.

```
pow(x,n) = x**n;
set parametric
```

```
unset arrow
x3(t) = 2t; y3(t) = t + pow(t,2);
dx3(t) = 2; dy3(t) = 1 + 2*t;
A = dx3(-3); B = dy3(-3);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

- (b) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.

```
set parametric; unset arrow;
pow(x,n) = x**n; a = -3;
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
P=x(a); Q = y(a); A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

- (c) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos do gnuplot mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.

```
set parametric; unset arrow;
set xrange [-35:35]; set yrange [-55:55]; set trange [-15:15];
pow(x,n) = x**n; a = 3; b = -3;
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
A1 = x(a); B1 = y(a); A2=dx(a); B2=dy(a);
P1 = A1 + A2; Q1 = B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
\# reusando variáveis, desnecessário!
A1 = x(b); B1 = y(b); A2=dx(b); B2=dy(b);
P1 = A1 + A2; Q1 = B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

- (d) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos seguintes do gnuplot, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram três vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.

```
c = 1; A1 = x(c); B1 = y(c); A2=dx(c); B2=dy(c);
P1 = A1 + A2; Q1 = B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
replot
```

- (e) $(V)[\](F)[\]$ Os comandos seguintes do gnuplot, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram quatro vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.

```

c = 1;
A3 = x3(c); B3 = y3(c);
P3 = x3(c)+dx3(c); Q3 = y3(c)+dy3(c);
set arrow from A3,B3 to P3,Q3 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);

```

4. Variedades e dimensão

Entenda variedade como uma palavra que representa um objeto do espaço, esta palavra mais um “adjetivo do tipo dimensão” nos libertam da linguagem restritiva da geometria euclidiana, assim como a palavra polinômio nos permite falar de expressões algébricas de um grau qualquer nos libertando dos termos restritivos monômio, binômio, trinômio . . .

- (a) $(V)[\](F)[\]$ A expressão $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ representa uma variedade de dimensão 1 (uma curva na terminologia antiga).
- (b) $(V)[\](F)[\]$ A expressão $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ representa uma variedade de dimensão 2 (uma superfície na terminologia antiga).
- (c) $(V)[\](F)[\]$ A expressão $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ representa uma variedade de dimensão 1 (uma curva na terminologia antiga).
- (d) $(V)[\](F)[\]$ Na expressão $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$, se for possível explicitar y , podemos escrever uma expressão equivalente na forma $y = f(x)$ que é uma função univariada e cujo gráfico representa uma variedade de dimensão 1 (uma curva na terminologia antiga) possivelmente com uma restrição de domínio.
- (e) $(V)[\](F)[\]$ Na expressão $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 8 = 0$, se for possível explicitar z , podemos escrever esta expressão na forma $z = f(x, y)$ que é uma função de duas variáveis e cujo gráfico representa uma variedade de dimensão 2 (uma superfície na terminologia antiga).

5. Derivada implícita

Considere a expressão $f(x, y) = 0$ cuja derivada implícita é

$$f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = 0$$

e representa um modelo para a variedade linear tangente que pode ser aplicada usando as substituições (na ordem indicada abaixo):

$$dx := (x - a); dy := (y - a); \quad (2)$$

$$x := a; y := b; \quad (3)$$

em que se supõe que $f(a, b) = 0$ seja verdadeira, ou, equivalentemente, o ponto (a, b) pertence à variedade $f(x, y) = 0$.

- (a) $(V)[\](F)[\]$ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ é um círculo de centro na origem e de raio 2 e

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

é a equação da reta tangente ao círculo no ponto (a, b) , para um ponto (a, b) arbitrário do plano.

- (b) $(V)[\](F)[\]$ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ é um círculo de centro na origem e de raio 2 e

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

é a equação da reta tangente ao círculo no ponto (a, b) , supondo-se que $a^2 + b^2 - 4 = 0$

- (c) $(V)[\](F)[\]$ A equação $A(x - a) + B(y - b) = 0$ é a equação de uma reta que passa no ponto (a, b) e é perpendicular ao vetor (A, B) como mostra a figura (1), página 7,

Por analogia $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$ é a equação do plano que passa no ponto (a, b, c) e é perpendicular ao vetor (A, B, C) , e os comandos do **gnuplot** mostram um exemplo disto para valores escolhidos das constantes a, b, c, A, B, C .

```

a=3.0;b=-1.0;c=1.0; A=2.0;B=3.0;C=4.0;
f(x,y) = c -(A/C)*(x-a) - (B/C)*(y-b)
set arrow from 0,0,0 to a,b, f(a,b) head
splot f(x,y) , 0

```

- (d) $(V)[\](F)[\]$ A equação $A(x - a) + B(y - b) = 0$ é a equação de uma reta que passa no ponto (a, b) e é perpendicular ao vetor (A, B) como mostra a figura (1), página 7, Por analogia $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$ é a equação do plano que passa no ponto (a, b, c) e é perpendicular ao vetor (A, B, C) , e os comandos do **gnuplot** mostram um exemplo disto para valores escolhidos das constantes a, b, c, A, B, C .

```

a=3.0;b=-1.0;c=1.0; A=2.0;B=3.0;C=4.0;
f(x,y) = c -(A/C)*(x-a) - (B/C)*(y-b)
set arrow from 0,0,0 to A,B, C head
splot f(x,y) , 0

```

- (e) $(V)[\](F)[\]$ Nas condições da questão do item 5d, os comandos do **gnuplot** mostram um vetor perpendicular ao plano

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0;$$

porém transladado, no espaço, para um ponto do plano:

```

unset arrow
set arrow from a,b,f(a,b) to (a+A), (b+B), (f(a,b)+C) head
splot f(x,y) , 0

```

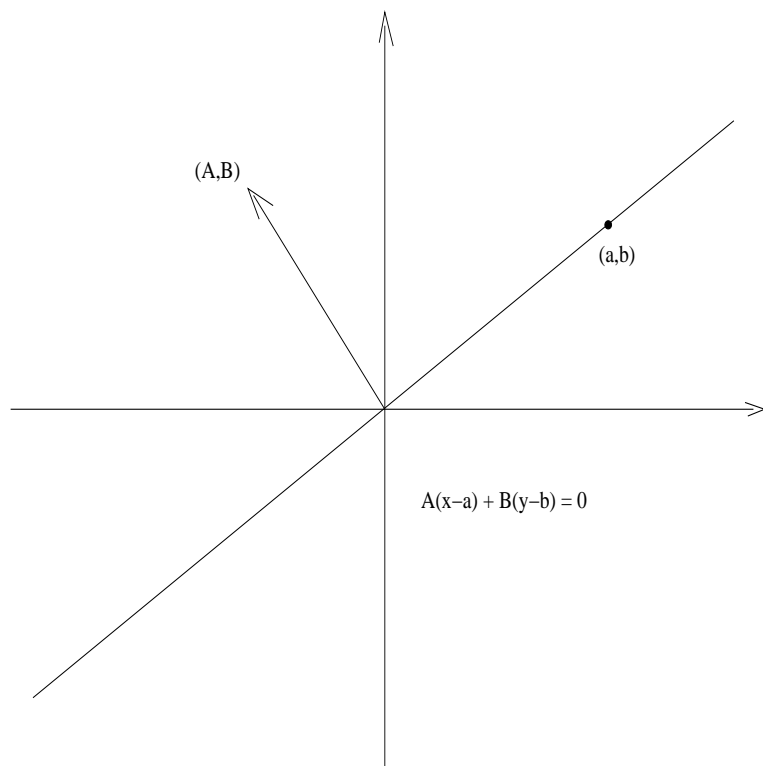


Figura 1: A equação da reta

6. Curvas e Derivação

Considere $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\sin^2(t), 1 - \cos(2t))$

- $(V)[](F)[]$ O gráfico da curva α fica inteiramente dentro de um quadrado de lado 2.
- $(V)[](F)[]$ Uma transformação trigonométrica adequada mostra que o traço da curva α é equivalente à curva $\beta(t) = (t, 2t^2); t \in [-2, 2]$
- $(V)[](F)[]$ Uma transformação trigonométrica adequada mostra que o traço da curva α é equivalente à curva $\beta(t) = (t, 2t^2); t \in [-1, 1]$
- $(V)[](F)[]$ Os comandos seguintes do **gnuplot** mostram o gráfico da curva α com um vetor tangente ao gráfico desta curva em um ponto determinado do gráfico:

```
set param; a = -10;
x(t) = sin(t); y(t) = 1 - cos(2*t);
dx(t) = cos(t); dy(t) = 2*sin(2*t);
A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot x(t),y(t), 0,t, t,0;
```

- $(V)[](F)[]$ Os comandos seguintes do **gnuplot** mostram o gráfico da curva α com um vetor tangente ao gráfico desta curva em um ponto determinado do gráfico:

```
set param; a = -4;
x(t) = sin(t); y(t) = 1 - cos(2*t);
dx(t) = cos(t); dy(t) = 2*sin(2*t);
A = dx(a); B = dy(a); P = x(a); Q = y(a);
set arrow from P,Q to (A+P), (B+Q) head;
plot x(t),y(t), 0,t, t,0;
```

Observação: se você escolher diversos valores para a na lista de comandos do **gnuplot**, você poderá se convencer de que a curva α percorre diversas vezes o seu traço o que justifica porque um dos itens é falso. O traço é a região geométrica do espaço que uma curva percorre podendo passar pelo mesmo ponto do espaço várias vezes.

7. Curvas e Derivação Considere a variedade $S = F(x, y, z) = 0$.

- $(V)[](F)[]$ S pode ser uma variedade de dimensão 2, um plano na nomenclatura geométrica.
- $(V)[](F)[]$ S pode ser uma variedade de dimensão 2, uma superfície na nomenclatura geométrica.
- $(V)[](F)[]$ A derivada implícita

$$F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz = 0;$$

representa um modelo para uma variedade linear de dimensão 2 tangente ao gráfico de S e você pode realizar este modelo para um ponto $(a, b, c); F(a, b, c) = 0$ com as substituições

$$dx := (x - a); dy := (y - b); dz := (z - c); \quad (4)$$

$$x := a; y := b; z := c; \quad (5)$$

- $(V)[](F)[]$ Sendo

$$S = F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

os comandos do **gnuplot** abaixo exibem um plano tangente ao gráfico de S em um ponto escolhido:

```

pow(x,n) = x**n; f(x,y) = sqrt(9 - pow(x,2) - pow(y,2) );
a = 1; b = 2; c = f(a,b); set xrange [-3:3]; set xrange [-3:3];
d_x_F(x,y,z) = 2*x; d_y_F(x,y,z) = 2*y; d_z_F(x,y,z) = 2*z;
d_x_f(x,y,c) = - d_x_F(x,y,c)/d_z_F(x,y,c);
d_y_f(x,y,c) = - d_y_F(x,y,c)/d_z_F(x,y,c);
P(x,y) = f(a,b) + d_x_f(a,b,c)*(x-a) + d_y_f(a,b,c)*(y -b);
plot f(x,y) , P(x,y)

```

Obs: embora a função f não dependa de z no programa de computador sou obrigado a definir suas derivadas parciais usando a variável c com a finalidade de passar este valor para as derivadas parciais de F . Na verdade a função f existe em função do ponto c ela é um corte da variedade S por um hiperplano do espaço \mathbf{R}^4 que passa no ponto $(a, b, c, 9)$ e isto fica refletido na necessidade de passar o parâmetro c .

(e) $(V)[](F)[]$ Se você executar no script do item 7d os comandos

```

unset arrow
A = d_x_F(a,b,c); B = d_y_F(a,b,c); C = d_z_F(a,b,c);
set arrow from a,b,f(a,b) to (a+A) ,(b+B) , (f(a,b)+C)
replot;

```

você terá o gráfico do plano tangente no ponto (a, b, c) com o vetor (A, B, C) , perpendicular ao plano, deslocado para a posição de tangência do plano.

8. Curvas e Derivação

Considere a curva $\alpha(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$

- (a) $(V)[](F)[]$ O traço da curva α estará contido no círculo trigonométrico.
- (b) $(V)[](F)[]$ O traço da curva α é o círculo trigonométrico.
- (c) $(V)[](F)[]$ O traço da curva α é o círculo trigonométrico, quando $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$. O coeficiente ω é chamado de “frequência”.
- (d) $(V)[](F)[]$ A derivada de α é a curva $\beta(t) = \omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ que é outro círculo com raio ω .
- (e) $(V)[](F)[]$ As translações com o deslocamento $\alpha(t)$ para cada valor do tempo t , de um ponto sobre a derivada de α , nos mostram vetores tangentes ao traço de α . A expressão de um vetor tangente, no ponto $\alpha(t)$ é $\alpha'(t) + \alpha(t)$.

9. Curvas e Derivação

- (a) $(V)[](F)[]$ O traço de $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ se encontra sobre um círculo de raio 1 tendo por centro o ponto $P = (10, 5)$.

(b) $(V)[](F)[]$ O traço de $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ é o círculo de raio 1 tendo por centro o ponto $P = (5, 10)$.

(c) $(V)[](F)[]$ O traço de $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ se encontra sobre um círculo de raio 1 tendo por centro o ponto $P = (5, 10)$.

(d) $(V)[](F)[]$ O traço de $\alpha(t) = (\cos(3t) + 5, \sin(3t) + 10)$ se encontra sobre um círculo de raio 1 tendo por centro o ponto $P = (5, 10)$ e o módulo de sua derivada é 3 o que pode ser interpretado como o caminho que uma partícula percorre (no plano) com velocidade que tem módulo 3, isto é, percorre um pedaço de círculo unitário com velocidade 3 vezes superior ao da partícula cujo percurso seja descrito por $\beta(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ o que justifica o nome de “frequência” ao parâmetro ω , a partícula passaria e vez mais pelo mesmo ponto do traço no mesmo intervalo de tempo.

(e) $(V)[](F)[]$ O traço da curva $\alpha(t) = (\cos(3t) - 5, \sin(3t) - 5); t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ é um círculo de raio 1 com centro no ponto $P = (-5, -5)$.

10. Variedade de dimensão 2

Considere a variedade definida por

$$\left\{ \begin{array}{l} (s, t) \mapsto (\cos(s) \sin(t), \sin(s) \sin(t), \cos(t)) = \omega(s, t); \\ s \in [0, 2\pi]; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \end{array} \right. \quad (6)$$

(a) $(V)[](F)[]$ O módulo do vetor posição $\omega(s, t)$ é 1 para quaisquer sejam os valores dos parâmetros s, t .

(b) $(V)[](F)[]$ A variedade $\omega(s, t) + (1, 2, 3)$ em que ω está definido na equação (6), tem por traço uma esfera de raio 1 centrada na origem.

(c) $(V)[](F)[]$ A equação $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem por gráfico o traço da variedade definida na equação (6). É uma equação implícita de uma variedade de dimensão 2, observe que $w = F(x, y, z)$ tem 4 variáveis, sendo portanto uma variedade de dimensão 3 (em princípio), logo $F(x, y, z) = 1$ tem três variáveis, sendo uma variedade de dimensão 2 (em princípio), que esperamos poder explicitar como: $z = f(x, y)$.

(d) $(V)[](F)[]$ Suponha que possamos explicitar $F(x, y, z) = 1$ em z , escrevendo $z = f(x, y)$. Podemos deduzir da derivada implícita de $F(x, y, z) = 1$ a derivada implícita de $z = f(x, y)$, verifique se o autor executou as contas corretamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} dw = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \\ dz = -F_x/F_z dx - F_y/F_z dy \\ dz = f_x dx + f_y dy \\ (a, b, c) \in F(x, y, z) = 1 \Rightarrow c = f(a, b) \end{array} \right. \quad (7)$$

então

$$P(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad (8)$$

é uma função linear de duas variáveis, é a fórmula de Taylor de primeiro grau de $z = f(x, y)$ sendo portanto o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto (a, b, c) , ou equivalentemente, ao gráfico de $F(x, y, z) = 1$ no ponto (a, b, c) .

(e) $(V)[](F)[]$ A equação do plano tangente ao gráfico da esfera unitária $F(x, y, z) = 1 = x^2 + y^2 + z^2$ se deduz da derivada implícita de $z = f(x, y)$ pelas substituições

$$\begin{cases} dx := (x - a); dy := (y - b); dz := (z - c); \\ (x, y) := (a, b); \end{cases} \quad (9)$$

e é então

$$P(x, y) = c - \frac{2a}{2c}(x - a) - \frac{2b}{2c}(y - b) \quad (10)$$

e isto indica que há um problema de definição nos polos da esfera.