Cálculo multivariado
curvas e superfícies
T. Praciano-Pereira

Lista numero 03
tarcisio.praciano@gmail.com
Dep. de Computação

alun@:

9 de abril de 2013 — **Univ. Estadual Vale do Aca**

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux
http://www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Data da entrega 17 de Abril de 2013

Exercícios 1 *Curvas* *objetivo: Descrição e propriedades de caminhos no espaço*

palavras chave: *curvas, derivada implícita, plano tangente, reta tangente, vetor perpendicular, vetor tangente, parametrização, variedade de dimensão n, variedade linear tangente.*

1. *Curvas e Derivação O gráfico de uma função pode ser visto como uma curva parametrizada pelo sistema de equações* $t \mapsto (t, f(t))$ *ou mais geralmente, se forem dadas duas equações,* $x(t), y(t)$ *a função*

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

representa uma curva, neste caso uma curva cuja imagem se encontra no espaço $2D$ *o que entendemos por "uma curva plana". Se três equações forem dadas* $x(t), y(t), z(t)$ *então*

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

seria uma curva do espaço $3D$.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O gráfico da função* $y = f(x)$ *pode ser obtido como curva parametrizada com o* sistema de equações paramétricas

$$t \mapsto (\ t \quad , \quad f(t)\ ) \tag{1}$$

   (b) *(V)[ ](F)[ ] A curva* $t \mapsto (0, t)$ *é o eixo OX.*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A curva* $t \mapsto (t, 0)$ *é o eixo OX.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] A curva $t \mapsto (0,t)$ é o eixo OY.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] A curva $t \mapsto (t,t)$ é o eixo OY é a primeira bissetriz dos eixos.*

Comandos do `gnuplot` *para você experimentar:*

```
set parametric  \# basta digitar 'set param', gnuplot entende o resto
x(t) = 0; y(t) = t;
plot x(t), y(t);   \# um par de equações separadas por vírgula...
x1(t) = sin(t); y1(t) = cos(t);
plot  x(t), y(t), x1(t), y2(t); \# dois pares de equações...
set arrow from 0,0 to x1(3), y1(3) head;
replot;      \#  refaz o plot
help     \# é a ajuda do gnuplot, um manual on-line, sorry, in English!
```

2. *Curvas e Derivação*

   No `gnuplot` *o comando:*

   `set arrow from a,b to p,q [head]`

   coloca um segmento orientado do ponto (a,b) até o ponto (p,q). O comando "`unset arrow`*" limpa a memória de "vetores" do* `gnuplot`.

   Considere a curva

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (cos(t), sin(t))$$

   cuja derivada é

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-sin(t), cos(t))$$

   (a) *(V)[ ](F)[ ]Os comandos seguintes do* `gnuplot` *desenham o sistema de eixos coordenados e a primeira bissetriz dos eixos:*

```
set parametric
x1(t) = t; y1(t) = 0;
x2(t) = 0; y2(t) = t;
x3(t) = t; y3(t) = t;
set arrow from 0,0 to -3,3 head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t),x3(t), y3(t);
```

   (b) *(V)[ ](F)[ ]Os comandos seguintes do* `gnuplot` *desenham o sistema de eixos coordenados e a primeira bissetriz dos eixos:*

```
set parametric
unset arrow
x1(t) = t; y1(t) = 0;
```

```
x2(t) = 0; y2(t) = t;
x3(t) = t; y3(t) = -t;
set arrow from 0,0 to -3,3 head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t),x3(t), y3(t);
```

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* `gnuplot` *produzem o gráfico da curva α com um vetor tangente à curva um ponto determinado.*

```
set parametric
unset arrow
x3(t) =  cos(t); y3(t) = sin(t);
set size 1,0.6;
a=-3;
set arrow from 0,0 to -sin(a), cos(a) head
x1(t) = t; y1(t) = 0;
x2(t) = 0; y2(t) = t;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t),x3(t), y3(t);
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* `gnuplot` *produzem o gráfico de um vetor e de outro vetor paralelo a ele obtido com a regra do paralelogramo. Traça também os eixos coordenados.*

```
set parametric; unset arrow;
a = -3; b = 5; p = 5; q = 7;
set xrange [-15:15]; set yrange [-15:15];
x1(t) = t; y1(t) = 0; x2(t) = 0; y2(t) = t;
set arrow from 0,0 to a,b head; set arrow from 0,0 to p,q head;
set arrow from p,q to (a+p), (b+q) head;
plot x1(t), y1(t), x2(t), y2(t);
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* `gnuplot` *produzem o gráfico da curva α com um vetor tangente à curva um ponto determinado.*

```
set parametric; unset arrow;
x(t) =  cos(t); y(t) = sin(t);
set size 1,0.6; set xrange [-15:15]; set yrange [-15:15];
dx(t) =  -sin(t); dy(t) = cos(t);
a=-3; A = x(a); B = y(a); P =  x(a) + dx(a); Q = y(a) + dy(a);
set arrow from A,B to P,Q  head;
x1(t) = t; y1(t) = 0; x2(t) = 0; y2(t) = t;
plot x(t), y(t), x1(t), y1(t), x2(t), y2(t);
```

3. *Curvas e Derivação*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* `gnuplot` *mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.*

```
pow(x,n) = x**n;
set parametric
```

```
unset arrow
x3(t) = 2t; y3(t) = t + pow(t,2);
dx3(t) = 2; dy3(t) = 1 + 2*t;
A = dx3(-3); B = dy3(-3);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

(b) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* gnuplot *mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.*

```
set parametric; unset arrow;
pow(x,n) = x**n; a = -3;
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
P=x(a); Q =  y(a); A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos do* gnuplot *mostram o gráfico de uma parábola com um vetor tangente em um determinado ponto do gráfico.*

```
set parametric; unset arrow;
set xrange [-35:35]; set yrange [-55:55]; set trange [-15:15];
pow(x,n) = x**n; a = 3; b = -3;
x(t) = 2*t; y(t) = t + pow(t,2);
dx(t) = 2; dy(t) = 1 + 2*t;
A1 = x(a); B1 = y(a); A2=dx(a);  B2=dy(a);
P1 = A1 + A2; Q1 =  B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
\# reusando variáveis, desnecessário!
A1 = x(b); B1 = y(b); A2=dx(b);  B2=dy(b);
P1 = A1 + A2; Q1 =  B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
plot t,0, 0,t, x(t), y(t);
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* gnuplot*, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram três vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.*

```
c = 1;  A1 = x(c); B1 = y(c); A2=dx(c);  B2=dy(c);
P1 = A1 + A2; Q1 =  B1 + B2;
set arrow from A1,B1 to P1, Q1 head;
replot
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* gnuplot*, se rodados depois dos anteriores, item 3c, mostram quatro vetores tangentes ao gráfico de uma parábola.*

```
c = 1;
A3 = x3(c); B3 = y3(c);
P3 = x3(c)+dx3(c); Q3 =  y3(c)+dy3(c);
set arrow from A3,B3 to P3,Q3 head;
plot t,0, 0,t, x3(t), y3(t);
```

4. *Variedades e dimensão*

   Entenda variedade *como uma palavra que representa um* objeto *do espaço, esta palavra mais um "adjetivo do tipo* dimensão*" nos libertam da linguagem restritiva da* geometria euclidiana*, assim como a palavra* polinômio *nos permite falar de expressões algébricas de um grau qualquer nos libertando dos termos restritivos* monômio, binômio, trinômio ...

   (a) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ *representa uma* variedade *de dimensão 1 (*uma curva na terminologia antiga*).*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $F(x, y, z) = 4x^3 - y + xyz = 0$ *representa uma* variedade *de dimensão 2 (*uma superfície na terminologia antiga*).*
   (c) *(V)[ ](F)[ ] A expressão* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ *representa uma* variedade *de dimensão 1 (*uma curva na terminologia antiga*).*
   (d) *(V)[ ](F)[ ] Na expressão* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$*, se for possível explicitar* y*, podemos escrever uma expresão equivalente na forma* $y = f(x)$ *que é uma função univariada e cujo gráfico representa uma* variedade *de dimensão 1 (*uma curva na terminologia antiga*) possivelmente com uma restrição de domnínio.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ] Na expressão* $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 8 = 0$*, se for possível explicitar* z*, podemos escrever esta expresão na forma* $z = f(x, y)$ *que é uma função de duas variáveis e cujo gráfico representa uma* variedade *de dimensão 2 (*uma superfície na terminologia antiga*).*

5. *Derivada implícita*

   Considere a expressão $f(x, y) = 0$ *cuja derivada implícita é*

   $$f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = 0$$

   e representa um modelo para a variedade linear tangente que pode ser aplicada usando as substituições (na ordem indicada abaixo):

   $$dx := (x - a); dy := (y - a); \tag{2}$$
   $$x := a; y := b; \tag{3}$$

   em que se supõe que $f(a, b) = 0$ *seja verdadeira, ou, equivalentemente, o ponto* (a, b) *pertence à variedade* $f(x, y) = 0$.

(a) *(V)[ ](F)[ ]* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ *é um círculo de centro na origem e de raio 2 e*

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

é a equação da reta tangente ao círculo no ponto (a, b)*, para um ponto* (a, b) *arbitrário do plano.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ *é um círculo de centro na origem e de raio 2 e*

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

é a equação da reta tangente ao círculo no ponto (a, b)*, supondo-se que* $a^2 + b^2 - 4 = 0$

(c) *(V)[ ](F)[ ] A equação* $A(x - a) + B(y - b) = 0$ *é a equação de uma reta que passa no ponto* (a, b) *e é perpendicular ao vetor* (A, B) *como mostra a figura (1), página 7,*

Por analogia $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c) = 0$ *é a equação do plano que passa no ponto* (a, b, c) *e é perpendicular ao vetor* (A, B, C)*, e os comandos do* `gnuplot` *mostram um exemplo disto para valores escolhidos das constantes* a, b, c, A, B, C*.*

```
a=3.0;b=-1.0;c=1.0; A=2.0;B=3.0;C=4.0;
f(x,y) = c  -(A/C)*(x-a) - (B/C)*(y-b)
set arrow from 0,0,0 to a,b, f(a,b) head
splot f(x,y) , 0
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] A equação* $A(x - a) + B(y - b) = 0$ *é a equação de uma reta que passa no ponto* (a, b) *e é perpendicular ao vetor* (A, B) *como mostra a figura (1), página 7, Por analogia* $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c) = 0$ *é a equação do plano que passa no ponto* (a, b, c) *e é perpendicular ao vetor* (A, B, C)*, e os comandos do* `gnuplot` *mostram um exemplo disto para valores escolhidos das constantes* a, b, c, A, B, C*.*

```
a=3.0;b=-1.0;c=1.0; A=2.0;B=3.0;C=4.0;
f(x,y) = c  -(A/C)*(x-a) - (B/C)*(y-b)
set arrow from 0,0,0 to A,B, C head
splot f(x,y) , 0
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Nas condições da questão do item 5d, os comandos do* `gnuplot` *mostram um vetor perpendicular ao plano*

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0;$$

porém transladado, no espaço, para um ponto do plano:

```
unset arrow
set arrow from a,b,f(a,b) to (a+A), (b+B), (f(a,b)+C) head
splot f(x,y) ,0
```

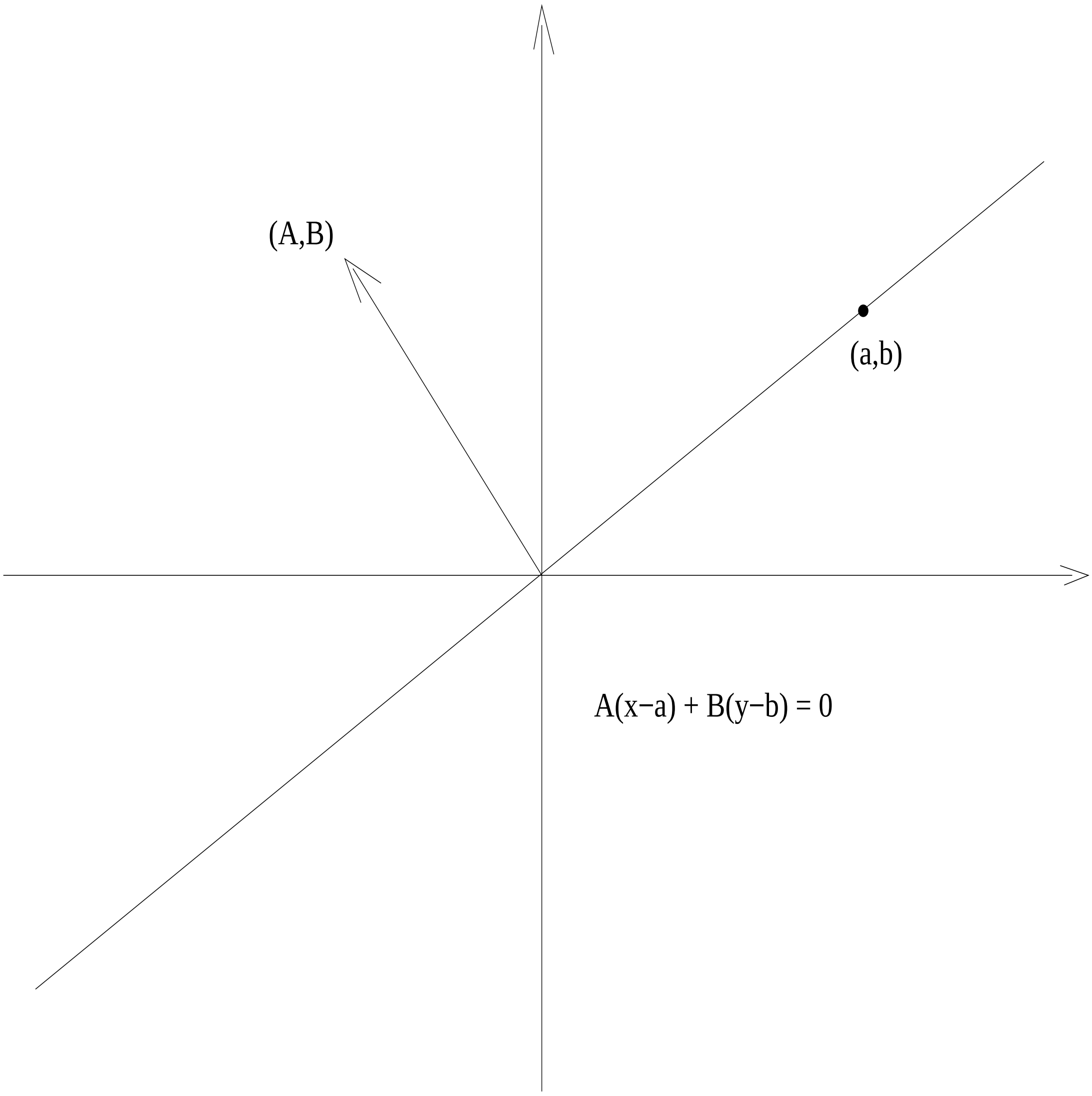

Figura 1: A equação da reta

6. *Curvas e Derivação*

   Considere $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\sin^2(t), 1 - \cos(2t))$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O gráfico da curva α fica inteiramente dentro de um quadrado de lado 2.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Uma transformação trigonométrica adequada mostra que o traço da curva α é equivalente à curva $\beta(t) = (t, 2t^2); t \in [-2, 2]$*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Uma transformação trigonométrica adequada mostra que o traço da curva α é equivalente à curva $\beta(t) = (t, 2t^2); t \in [-1, 1]$*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* `gnuplot` *mostram o gráfico da curva α com um vetor tangente ao gráfico desta curva em um ponto determinado do gráfico:*

```
set param; a = -10;
x(t) = sin(t); y(t) = 1 - cos(2*t);
dx(t) = cos(t); dy(t) = 2*sin(2*t);
A = dx(a); B = dy(a);
set arrow from 0,0 to A,B head;
plot x(t),y(t), 0,t, t,0;
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Os comandos seguintes do* `gnuplot` *mostram o gráfico da curva α com um vetor tangente ao gráfico desta curva em um ponto determinado do gráfico:*

```
set param; a = -4;
x(t) = sin(t); y(t) = 1 - cos(2*t);
dx(t) = cos(t); dy(t) = 2*sin(2*t);
A = dx(a); B = dy(a);  P = x(a); Q = y(a);
set arrow from P,Q to (A+P), (B+Q) head;
plot x(t),y(t), 0,t, t,0;
```

Observação: se você escolher diversos valores para `a` *na lista de comandos do* `gnuplot`*, você poderá se convencer de que a curva α percorre diversas vezes o seu traço o que justifica porque um dos itens é falso. O traço é a região geométrica do espaço que uma curva percorre podendo passar pelo mesmo ponto do espaço várias vezes.*

7. *Curvas e Derivação Considere a variedade $\mathcal{S} = F(x, y, z) = 0$.*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] $\mathcal{S}$ pode ser uma variedade de dimensão 2,* um plano na nomenclatura geométrica.

   (b) *(V)[ ](F)[ ] $\mathcal{S}$ pode ser uma variedade de dimensão 2,* uma superfície na nomenclatura geométrica.

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A derivada implícita*

$$F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz = 0;$$

   representa um modelo para uma variedade linear de dimensão 2 tangente ao gráfico de $\mathcal{S}$ e você pode realizar este modelo para um ponto $(a, b, c); F(a, b, c) = 0$ com as substituições

$$dx := (x - a); dy := (y - b); dz := (z - c); \quad (4)$$
$$x := a; y := b; z := c; \quad (5)$$

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Sendo*

$$\mathcal{S} = F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

   os comandos do `gnuplot` *abaixo exibem um plano tangente ao gráfico de $\mathcal{S}$ em um ponto escolhido:*

```
pow(x,n) = x**n;  f(x,y) = sqrt(9 - pow(x,2) - pow(y,2) );
a = 1; b = 2; c = f(a,b); set xrange [-3:3]; set xrange [-3:3];
d_x_F(x,y,z) = 2*x; d_y_F(x,y,z) = 2*y; d_z_F(x,y,z) = 2*z;
d_x_f(x,y,c) =  - d_x_F(x,y,c)/d_z_F(x,y,c);
d_y_f(x,y,c) =  - d_y_F(x,y,c)/d_z_F(x,y,c);
P(x,y) =  f(a,b) + d_x_f(a,b,c)*(x-a) + d_y_f(a,b,c)*(y -b);
splot f(x,y) , P(x,y)
```

Obs: *embora a função f não dependa de z no programa de computador sou obrigado a definir suas derivadas parciais usando a variável c com a finalidade de passar este valor para as derivadas parciais de F. Na verdade a função f existe em função do ponto c ela é um corte da variedade $\mathcal{S}$ por um hiperplano do espaço $\mathbf{R}^4$ que passa no ponto $(a, b, c, 9)$ e isto fica refletido na necessidade de passar o parâmetro c.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Se você executar no script do item 7d os comandos*

```
unset arrow
A = d_x_F(a,b,c); B = d_y_F(a,b,c); C = d_z_F(a,b,c);
set arrow from a,b,f(a,b) to   (a+A) ,(b+B) , (f(a,b)+C)
replot;
```

você terá o gráfico do plano tangente no ponto (a, b, c) com o vetor (A, B, C), perpendicular ao plano, deslocado para a posição de tangência do plano.

8. *Curvas e Derivação*

   Considere a curva $\alpha(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O traço da curva α estará contido no círculo trigonométrico.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] O traço da curva α é o círculo trigonométrico.*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O traço da curva α é o círculo trigonométrico, quando $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$. O coeficiente ω é chamado de "frequência".*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] A derivada de α é a curva $\beta(t) = \omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ que é outro círculo com raio ω.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ] As translações com o deslocamento $\alpha(t)$ para cada valor do tempo t, de um ponto sobre a derivada de α, nos mostram vetores tangentes ao traço de α. A expressão de um vetor tangente, no ponto $\alpha(t)$ é $\alpha'(t) + \alpha(t)$.*

9. *Curvas e Derivação*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O traço de $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ se encontra sobre um círculo de raio 1 tendo por centro o ponto $P = (10, 5)$.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] O traço de* $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ *é o círculo de raio* 1 *tendo por centro o ponto* $P = (5, 10)$.

(c) *(V)[ ](F)[ ] O traço de* $\alpha(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ *se encontra sobre um círculo de raio* 1 *tendo por centro o ponto* $P = (5, 10)$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] O traço de* $\alpha(t) = (\cos(3t) + 5, \sin(3t) + 10)$ *se encontra sobre um círculo de raio* 1 *tendo por centro o ponto* $P = (5, 10)$ *e o módulo de sua derivada é* 3 *o que pode ser interpretado como o caminho que uma partícula percorre (no plano) com velocidade que tem módulo* 3*, isto é, percorre um pedaço de círculo unitário com velocidade 3 vezes superior ao da partícula cujo percurso seja descrito por* $\beta(t) = (\cos(t) + 5, \sin(t) + 10)$ *o que justifica o nome de "frequência" ao parâmetro* ω*,* a partícula passaria e vez mais pelo mesmo ponto do traço no mesmo intervalo de tempo.

(e) *(V)[ ](F)[ ] O traço da curva* $\alpha(t) = (\cos(3t) - 5, \sin(3t) - 5); t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ *é um círculo de raio* 1 *com centro no ponto* $P = (-5, -5)$.

10. *Variedade de dimensão 2*

Considere a variedade definida por

$$\begin{cases} (s,t) \mapsto (\cos(s)\sin(t), sin(s)\sin(t), \cos(t)) = \omega(s,t); \\ s \in [0, 2\pi]; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \end{cases} \tag{6}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] O modulo do vetor posição* $\omega(s,t)$ *é* 1 *para quaisquer sejam os valores dos parâmetros* s, t.

(b) *(V)[ ](F)[ ] A variedade* $\omega(s,t) + (1, 2, 3)$ *em que* ω *está definido na equação (6), tem por traço uma esfera de raio 1 centrada na origem.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] A equação* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tem por gráfico o traço da variedade definida na equação (6). É uma equação implícita de uma variedade de dimensão 2, observe que* $w = F(x, y, z)$ *tem 4 variáveis, sendo portanto uma variedade de dimensão 3 (em princípio), logo* $F(x, y, z) = 1$ *tem três variáveis, sendo uma variedade de dimensão 2 (em princípio), que esperamos poder explicitar como:* $z = f(x, y)$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que possamos explicitar* $F(x, y, z) = 1$ *em* z*, escrevendo* $z = f(x, y)$*. Podemos deduzir da derivada implícita de* $F(x, y, z) = 1$ *a derivada implicita de* $z = f(x, y)$*, verifique se o autor executou as contas corretamente:*

$$\begin{cases} dw = F_x dx + F_y dy F_z dz = 0 \\ dz = -F_x/F_z dx - F_y/F_z dy \\ dz = f_x dx f_y dy \\ (a, b, c) \in F(x, y, z) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = f(a, b) \end{cases} \tag{7}$$

então

$$P(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \tag{8}$$

é uma função linear de duas variáveis, é a fórmula de Taylor de primeiro grau de $z = f(x, y)$ sendo portanto o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto (a, b, c), ou equivalentemente, ao gráfico de $F(x, y, z) = 1$ no ponto (a, b, c).

(e) *(V)[ ](F)[ ] A equação do plano tangente ao gráfico da esfera unitária $F(x, y, z) = 1 = x^2 + y^2 + z^2$ se deduz da derivada implícita de $z = f(x, y)$ pelas substituições*

$$\begin{cases} dx := (x-a); dy := (y-b); dz := (z-c); \\ (x,y) := (a,b); \end{cases} \tag{9}$$

e é então

$$P(x,y) = c - \frac{2a}{2c}(x-a) - \frac{2b}{2c}(y-b) \tag{10}$$

e isto indica que há um problema de definição *nos polos da esfera.*