Cálculo Multivariado | **Lista numero 02**
integração múltipla | tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

20 de março de 2013 | **Univ. Estadual Vale do Aca**

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux
http://www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

> Esta lista ainda não está pronta, eu a estou publicando enquanto a estou editando para que você tenha material de trabalho. Quando estiver pronta esta observação irá desaparecer. Não imprima enquanto esta observação estiver aqui.

Exercícios 1 *Integração múltipla* *objetivo: Entender domínio de integração*
palavras chave: *domínio de integração, integral aproximada, integral iterada, integral múltipla, soma de Riemann, soma de Riemann dupla.*

1. *Integral Dupla*
   Sendo $F(x,y) = xy\sin(2-x-y)$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em*
   $$\int_{-4}^{4}\int_{-3}^{10} F(x,y)dxdy$$
   é o retângulo $[-4,4]$ x $[-3,10]$;

   (b) *(V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em*
   $$\int_{-4}^{4}\int_{-3}^{10} F(x,y)dxdy$$
   é o retângulo $[-3,10]$ x $[-4,4]$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em*
   $$\int_{-4}^{4}\int_{y+4}^{y-10} F(x,y)dxdy$$
   é a região do plano limitada pelas retas
   $$x=-4; x=4; x=y+4; x=y-10;$$

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Para calcular a integral de* $z = F(x,y)$ *sobre o domínio limitado pelas curvas*
   $$y^2-5-x=0; x-15+y^2=0; x=4; x=-4$$
   devo expressar a integral como
   $$\int_{-4}^{4}\int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x,y)dydx$$
   e um valor aproximado desta integral é 17.33270527525958855238

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Para calcular a integral de* $z = F(x,y)$ *sobre o domínio limitado pelas curvas*
   $$y^2-5-x=0; x-15+y^2=0; x=4; x=-4$$
   devo expressar a integral como
   $$\int_{-a}^{a}\int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x,y)dxdy\ ; a=\sqrt{10};$$
   e um valor aproximado desta integral é 9.90208423471979144793 *com passo* $\Delta x = \Delta y = 0.005$ *obtido com* $2m11.173s$ *de processamento pelo programa* `exer06_01_d.calc`. *O programa tem as duas opções para calcular no sentido "dx dy" ou no sentido "dy dx"*,`integral_dxdy()`, `integral_dydx()` *mas você tem que, eventualmente, completar alguns dos cálculos no programa. A figura (1) página 3, mostra o domínio de integração, gráfico feito com gnuplot*

```
exer06_01_d.gnuplot}

~9.16353940918169888055

real    81m36.796s
user    74m22.315s
sys     5m53.562s
tarcisio@cap01:~/multi$
```

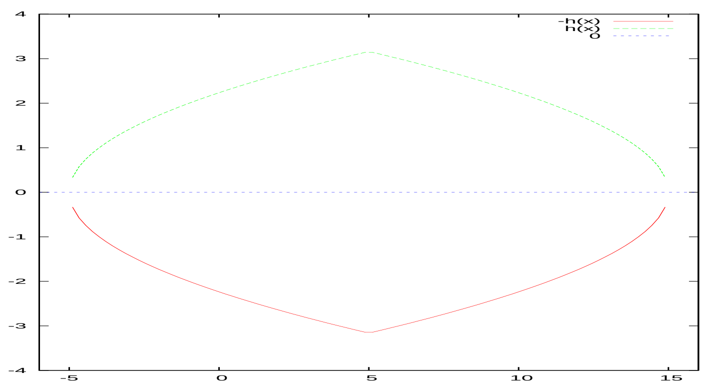

Figura 1:

2. *Coordenadas polares e a Gaussiana*

Considere a função $H(x,y) = exp(-x^2 - y^2)$

(a) *(V)[ ](F)[ ] Definindo* $h(x) = e^{x^2}$ *então* $H(x,y) = h(x)h(y)$

(b) *(V)[ ](F)[ ] Definindo* $h(x) = e^{-x^2}$ *então* $H(x,y) = h(x)h(y)$

(c) *(V)[ ](F)[ ] Definindo* $h(x) = e^{-x^2}$ *então*

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} H(x,y)dxdy = (\int_{-a}^{a} h(x)dx)^2$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível calcular (que exista a integral), e é verdade,*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)dxdy$$

Considere a mudança de variável descrita pelas equações (coordenadas polares)

$$T(\rho,\theta) = (x,y); \quad (1)$$

$$T(\rho,\theta) = \begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases} \quad (2)$$

$$\rho \in [0,\infty); \theta \in [0,2\pi] \quad (3)$$

Usando a derivada exterior definida na lista 05, então

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)dxdy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} H(T(\rho,\theta))\rho d\rho d\theta \quad (4)$$

$$I = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\rho^2}2\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}2\rho d\rho \int_{0}^{2\pi} d\theta \quad (5)$$

$$I = \pi\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}2\rho d\rho = \pi \quad (6)$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Como*

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}dxdy = (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)^2$$

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

3. *Integrais Duplas*

(a) *(V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico da primeira bissetriz e da pábola* $y = x^2$ *é*

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{x} dydx$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico da parábola* $y = x^2 - x - 6$ *e a reta* $y = 7$ *é*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{x^2-x-6}^{7} dydx$$

para os dois números x_1, x_2 *obtidos como raízes de uma equação do segundo grau.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] O sólido V é um cílindro tendo por base a região limitada pelo gráfico da parábola* $y = x^2 - x - 6$ *e a reta* $y = 7$ *e altura (constante) 4. Seu volume é quatro vezes a integral*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{x^2-x-6}^{7} dydx$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] Uma pirâmide tem por base o triângulo cujos vértices são* $(0,0),(1,0),(0,1)$ *e quarto vértice é o ponto* $(0,0,r)$*. O seu volume pela integral da equação do plano (da função* $z = F(x,y)$*) que passa nos pontos* $(1,0),(0,1),(0,0,r)$*.*

Cálculo do vetor perpendicular e determinação da função $z = F(x,y)$*.*

$$\text{vértices } P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1) \text{ e } P_4 = (0,0,r) \quad (7)$$
$$u_1 = P_2 - P_4 = (1,0,-r); u_2 = P_3 - P_4 = (0,1,-r) \quad (8)$$
$$u_1 \text{ x } u_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -r \\ 0 & 1 & -r \end{bmatrix} \quad (9)$$
$$u_1 \text{ x } u_2 = \begin{pmatrix} -r & r & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

A equação do plano que fecha a pirâmide, passando pelo ponto $(0,0,r)$ *é*

$$-rx + ry + (z - r) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = F(x,y) = r + rx - ry$$

e a integral que dá o volume da pirâmide é

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (r + rx - ry)\, dydx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (r + rx - ry)\, dy$$

Calculando a integral

$$I_x = \int_0^{1-x} (r + rx - ry)dy \quad (11)$$
$$I_x = \left((r + rx)y - r\frac{y^2}{2}\right)|_0^{1-x} = (r + rx)(1-x) - r\frac{(1-x)^2}{2} \quad (12)$$
$$I_x = r(1+x)^2 - r\frac{(1-x)^2}{2} = r\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{r}{2}(1 - 2x + x^2) \quad (13)$$
$$I = \frac{r}{2}(x - x^2 + \frac{x^2}{3})|_0^1 = \frac{r}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}r \quad (14)$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Uma pirâmide tem por base o triângulo cujos vértices são* $(0,0), (1,0), (0,1)$ *e quarto vértice é o ponto* $(0,0,r)$*. O seu volume pela integral da equação do plano (da função* $z = F(x,y)$*) que passa nos pontos* $(1,0), (0,1), (0,0,r)$*.*

Cálculo do vetor perpendicular e determinação da função $z = F(x,y)$*.*

$$\text{vértices } P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1) \text{ e } P_4 = (0,0,r) \quad (15)$$
$$u_1 = P_2 - P_4 = (1,0,-r); u_2 = P_3 - P_4 = (0,1,-r) \quad (16)$$
$$u_1 \text{ x } u_2 = \begin{pmatrix} r & r & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

A equação do plano que fecha a pirâmide, passando pelo ponto $(0,0,r)$ *é*

$$rx + ry + (z - r) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = F(x,y) = r - rx - ry$$

e a integral que dá o volume da pirâmide é

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (r - rx - ry)\, dydx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (r - rx - ry)\, dy$$

Calculando a integral

$$I_x = \int_0^{1-x} (r - rx - ry)dy \quad (18)$$
$$I_x = r(1-x)^2 - r\frac{(1-x)^2}{2} \quad (19)$$
$$I = \frac{r}{2}(x - x^2 + \frac{x^2}{3})|_0^1 = \frac{r}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}Bh \quad (20)$$

4. *Integral Dupla Quero calcular a integral de* $\int\int_W F(x,y)dxdy$ *com*

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] sobre o domínio* W*, o disco unitário com centro no ponto* $(-3,3)$ *e o programa* `riemanndupla()` *faz isto.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] sobre o domínio* W*, o disco unitário com centro no ponto* $(-3,3)$ *e o programa* `riemanndupla()` *faz isto se chamado de forma conveniente.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] sobre o domínio* W*, o disco unitário com centro no ponto* $(-3,3)$ *e o programa* `riemanndupla()` *teria que ser alterado para fazer este cálculo, porque a condição de seleção dos retângulos não serviria para este caso.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] o símbolo que resolve este cálculo seria*

$$\int_{-4}^{-2} \int_f^g F(x,y)dxdy$$

com $f(x) = -\sqrt{1 - (x-3)^2}; g(x) = \sqrt{1 - (x-3)^2}$*.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] o símbolo que resolve este cálculo seria*

$$\int_{-4}^{-2} \int_f^g F(x,y)dydx$$

com $f(x) = -\sqrt{1 - (x+3)^2}; g(x) = \sqrt{1 - (x+3)^2}$*.*

5. *Integração múltipla Se* $F(x,y) = F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ *então*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* F *é uma função negativa.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* $\int\int_W F(x,y)dxdy$ *será sempre um número positivo para qualquer domínio* W *não vazio.*

(c) *(V)[ ](F)[ ]* $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = \frac{8}{3}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = 0$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = 10$

6. *Se* $F(x,y) = -(x+y)$

   Integração múltipla

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} F(x,y)dxdy = \frac{4}{3}$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} F(x,y)dxdy = -\frac{4}{3}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} F(x,y)dxdy = -2$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} F(x,y)dxdy = -3$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} F(x,y)dxdy = 3$

7. *Integração múltipla* *Se* $F(x,y) = x^2 + y^2$ *então*

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dydx$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = \frac{8}{3}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = -\frac{8}{3}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = \frac{1}{3}$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)dxdy = 0$

8. *Se* $F(x,y) = x + y$ *então*

   Integração múltipla

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = 5;$ *em que* $f(x) = x$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = -5;$ *em que* $f(x) = x$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = -1;$ *em que* $f(x) = x$.

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = 1;$ *em que* $f(x) = x$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = 1/2;$ *em que* $f(x) = x$.

9. *Integração múltipla* *O domínio* W *de integração é a região do plano delimitada pelo eixo* OX *pela parábola* $y = f(x) = x^2$ *e pelas retas* $x = -4; x = 4$.
   Se $F(x,y) = x^2 + xcos(y)$

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-4}^{4}\int_{0}^{f} F(x,y)dxdy$ *é o cálculo desejado.*

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-4}^{4}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx$ *é o cálculo desejado.*

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-4}^{4}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = \int_{-4}^{4} \left(x^4 - xsen(x^2)\right) dx$ *desejado.*

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-4}^{4}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = 0$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-4}^{4}\int_{0}^{f} F(x,y)dydx = -5$

10. *integral simples*

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{1} cos^2(x) + sin^2(x)dx = 1$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{\pi} cos^2(x) + sin^2(x)dx = \pi$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{2\pi} cos^2(x) + sin^2(x)dx = 2\pi$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{2\pi} cos^2(x)dx = \int_{0}^{2\pi} sin^2(x)dx$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{0}^{2\pi} cos^2(x)dx = \int_{0}^{2\pi} sin^2(x)dx = \pi$