

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 Operadores diferenciais

objetivo: Derivação parcial e análise vetorial

palavras chave: Curvas no espaço 3D, derivadas parciais, derivação implícita, equações diferenciais. operadores diferenciais.

1. assunto Derivadas parciais

Considere a função $z = F(x, y) = x^3 + 3x^2y - 5xy^2 + y^4$

(a) $(V)[](F)[] \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 10xy + 4y^3$

(b) $(V)[](F)[] \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 5y^2$

(c) $(V)[](F)[] \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 10xy + 4y^3$

(d) $(V)[](F)[] \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 + 6xy - 5y^2$

(e) $(V)[](F)[] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -10x + 12y^2$

2. Produto vetorial Dados os vetores

$$u = (1, 2, 3); v = (1, -2, -3) \quad (1)$$

(a) $(V)[](F)[] \|u\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \|v\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$

(b) $(V)[](F)[] u \cdot v = 14\cos(\theta)$ em que θ é o ângulo entre estes dois vetores.

(c) $(V)[](F)[]$ Os vetores u, v são perpendiculares.

(d) $(V)[](F)[]$ O cosseno do ângulo entre os vetores u e v é

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-12}{14} = -\frac{6}{7}$$

(e) $(V)[](F)[]$ A projeção do vetor $w = (3, -5, 8)$ na direção do vetor u é o número positivo

$$\left\| \frac{w \cdot u}{\|u\|} \right\| = \frac{\|w \cdot u\|}{\|u\|} = \frac{17}{98}$$

3. derivação implícita

Seja $F(x, y) = xy/(1+x^2+y^2)$

(a) $(V)[](F)[] F_x = \frac{y(1+x^2+y^2)-2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}$ e $F_y = \frac{x(1+x^2+y^2)-2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$

(b) $(V)[](F)[]$ O plano tangente ao gráfico de $z = F(x, y)$ no ponto (a, b) é

$$P(x, y) = F(a, b) + F_y(a, b)(x - a) + F_x(a, b)(y - b);$$

(c) (V)[](F)[] O plano tangente ao gráfico de $z = F(x, y)$ no ponto (a, b) é

$$P(x, y) = F(a, b) + F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)(y - b);$$

(d) (V)[](F)[] Usando a equação do plano tangente no ponto $(a, b) = (-3.0, -3.0)$, $z = P(x, y)$ podemos calcular um valor aproximado para $F(-3.01, -3.01) \approx 0.473850415512465$.

(e) (V)[](F)[] A derivada implícita de $z = F(x, y)$ é

$$dz = F_x dx + F_y dy$$

em que substituindo dx, dy, dz por $x-a, y-b, z-c; c = F(a, b)$, respectivamente, resulta na equação do plano tangente no ponto (a, b, c) .

4. Derivada implícita

(a) (V)[](F)[] Sendo $z = F(x, y) = \frac{xy}{\cos(xy)}$ então

$$F_x = \frac{y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy)}{\cos^2(xy)}$$

(b) (V)[](F)[] Sendo $z = F(x, y) = \frac{xy}{\cos(xy)}$ então

$$F_x dx = \frac{y \cos(xy) + xy^2 \sin(xy)}{\cos^2(xy)} dx$$

(c) (V)[](F)[] Sendo $z = F(x, y) = \frac{xy}{\cos(xy)}$ então

$$F_y = \frac{x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)}{\cos^2(xy)}$$

(d) (V)[](F)[] Sendo $z = F(x, y) = \frac{xy}{\cos(xy)}$ então

$$F_y dy = \frac{x \cos(xy) + x^2 y \sin(xy)}{\cos^2(xy)} dy$$

(e) (V)[](F)[] Sendo $z = F(x, y) = \frac{xy}{\cos(xy)}$ então a equação do plano tangente no ponto $(a, b, c) = (a, b, F(a, b))$ é o polinômio do primeiro grau

$$P(x, y) = \frac{ab}{\cos(ab)} + \frac{b \cos(ab) + ab^2 \sin(ab)}{\cos^2(ab)}(x - a) + \frac{a \cos(ab) + a^2 b \sin(ab)}{\cos^2(ab)}(y - b)$$

5. Curvas no espaço

O gráfico de uma função univariada assumindo valores no espaço 3D pode ser uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e sua derivada seria

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t));$$

se existir.

(a) (V)[](F)[] Seja $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 4)$ o gráfico de alpha é uma curva plana do espaço 3D

(b) (V)[](F)[] Se $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 4)$ então sua derivada alpha é $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ é uma curva plana do espaço 3D

(c) (V)[](F)[] Se $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 4)$ então sua derivada alpha é $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ é uma curva plana do espaço 3D

(d) (V)[](F)[] Se $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ então sua derivada alpha é $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ é uma curva plana do espaço 2D e portanto também do espaço 3D e a figura (1), página 4, mostra um vetor

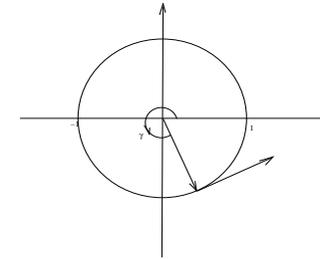


Figura 1: Um vetor tangente á curva

tangente á curva no ponto $\cos(\gamma), \sin(\gamma)$

(e) (V)[](F)[] Se $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ então sua derivada alpha é $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$. Suponha que alpha represente a posição de um ponto no espaço no instante t , então a velocidade com que este ponto trafega no espaço tem módulo constante, igual $\sqrt{2}$, entretanto a velocidade não é constante.

Na figura ((2)), página 5,

6. computação Analise o programa (2) página 5.

(a) (V)[](F)[] O programa tem uma função `rotulo()` definida dentro do programa que imprime o número 0.

(b) (V)[](F)[] O programa tem uma função `rotulo()` definida dentro do programa que é chamada pelo programa na quarta linha do código de `main()`.

(c) (V)[](F)[] O programa tem chama um método `Tela.rotulo()` definido na classe `Ambiente.h` e nunca chama, dentro do programa, a função `rotulo()`.

(d) (V)[](F)[] A função `rotulo()`, embora definida no programa, nunca será usada.

```

#include <iostream>
#include "/home/tarcisio/tex/c/cplusplus/Ambiente.h" // Biblioteca particular:
using namespace std; // a evitar - polui o espaço de nomes

int rotulo();
Ambiente Tela; // Uma instância de Ambiente - herda seus métodos

int main()
{
    int numero=250; // (05) uma variável do tipo inteiro
    Tela.limpa_janela();
    Tela.mask(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    Tela.rotulo("Este programa pede que você forneça um número",
               " maior do que 100 e verifica se você atendeu o ",
               "solicitado. ", " "); // (10)
    Tela.apeteco2(); // (20)
    numero = Tela.entrada_int(
               "Forneça-me um número maior do que 100 ", numero); // (05)
    // Tela.limpa_janela(); // melhora a aparência do programa!
    if (numero > 100) // (60)
        cout << "Você atendeu ao combinado. " << endl
              << numero << " é maior do que 100 " << endl
              << "como eu lhe pedi. " << endl; // (50)
    else
        cout << "...você não fez o que pedi! " << endl;
    Tela.apetecof(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    // Tela.copyleft(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    return(0);
}

int rotulo() {
    return(0);
}

```

Figura 2: Um primeiro programa - para esta lista...

(e) $(V)[](F)[]$ Tela.limpa_janela() é um método de Ambiente.h

7. computação

Analisando o programa (2) página 5.

- (a) $(V)[](F)[]$ Este programa pede que o usuário lhe forneça um número, mas não especifica se deve ser inteiro ou ponto flutuante e isto é um erro do programador.
- (b) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe um único parâmetro.
- (c) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe três parâmetros do tipo texto.

(d) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe quatro parâmetros do tipo texto.

(e) $(V)[](F)[]$ Tela.rotulo() é um método definido em Ambiente.h e pela estrutura do programa este método recebe cinco parâmetros do tipo texto.

8. computação

Continuando a análise do programa (2) 5.

- (a) $(V)[](F)[]$ No programa (2) há uma entrada de dados que é um método de Ambiente.h destinado a receber dados do tipo int.
- (b) $(V)[](F)[]$ O tipo de dados int é a mesma coisa que um número inteiro como os matemáticos o entendem.
- (c) $(V)[](F)[]$ O programa (2) tem if() e se usuário atender o que pede o programa, haverá um erro porque há três comandos de impressão e, entretanto, if() somente aceita duas opções.
- (d) $(V)[](F)[]$ O programa (2) tem if() e se usuário atender o que pede o programa, serão impressas três frases que fazem parte de um único comando.
- (e) $(V)[](F)[]$ O programa (2) tem if() com um else que será executado caso o usuário não atenda o que pede o programa.

9. computação

Continuando a análise do programa (2) 5.

- (a) $(V)[](F)[]$ O programa (2) usa um arquivo de cabeçalhos Ambiente.h que não é arquivo padrão de C++.
- (b) $(V)[](F)[]$ O programa (2) define uma instância da classe Ambiente definida no arquivo Ambiente.h na segunda linha de definições do programa e designa esta instância também de Ambiente
- (c) $(V)[](F)[]$ O programa (2) define uma instância da classe Ambiente definida no arquivo Ambiente.h na segunda linha de definições do programa e designa esta instância também de Tela
- (d) $(V)[](F)[]$ Se prog() for um método definido na classe Ambiente então a forma correta de usá-la neste program é Tela.prog(). Um exemplo é Tela.apeteco2().
- (e) $(V)[](F)[]$ O programa (2) tem dois comandos suspensos com uso de comentários.

10. computação

Na figura ((3)), página 7,

Analisando o programa (3).

```

#include <iostream>
#include "Ambiente.h" // Biblioteca particular: comunicacao com usuário
using namespace std; // a evitar - polui o espaço de nomes

int rotulo();
Ambiente Tela; // Uma instância de Ambiente - herda seus métodos

int main()
{
    int numero; // uma variável do tipo inteiro
    Tela.mask(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    rotulo();
    cout << "Forneça-me um número maior do que 100 ";
    cin >> numero;
    // (20) if() else
    if (numero < 100)
        cout << "Você não atendeu ao combinado " << endl;
    cout << "0 erro no programa se encontra aqui, apague este comando. "
        << endl; // (21) apague este comando
    else
        cout << "Obrigado por atender ao combinado " << endl;
    Tela.apetecof(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    Tela.copyleft(); // Tela herdou este método definido em Ambiente
    return(0);
}

int rotulo()
{
    cout << "Este programa pede que você forneça um número maior do que " << endl
        << "100 e verifica se você atendeu o solicitado. " << endl;
    return(0);
}

```

Figura 3: O segundo programa - desta lista...

- (a) $(V)[\](F)[\]$ Este programa não tem erros.
- (b) $(V)[\](F)[\]$ O programa tem um erro indicado no próprio programa.
- (c) $(V)[\](F)[\]$ O erro indicado no programa consiste em três comandos passados para `if()`.
- (d) $(V)[\](F)[\]$ O erro indicado no programa consiste em dois comandos passados para `if()`.
- (e) $(V)[\](F)[\]$ Atendendo à observação sobre o erro no programa ele será compilado com sucesso.