0.2 Variedade de nível

Na primeira questão estamos trabalhando com $w = F(x, y, z)$ que pode ser uma variedade de dimensão 3 para dela deduzirmos variedades de nível que podem ser de dimensão 2,

$$F(x, y, z) = K; K \in \mathbf{R}$$

sempre sob a suposição de que podemos encontrar uma solução $F(a, b, c) = K$; o que pode ser dito com outras palavras, "encontramos um ponto $P = (a, b, c)$ por onde passa $F(x, y, z) = K$". Sob certas condições, o teorema da função implícita nos garante que é possível explicitar uma das variáveis x, y, z em função das outras duas. Aqui estamos simplificando a linguagem e tratando de explicitar z como função de x, y, partindo da suposição que este caso é possível. Na prática isto deve ser verificado e considerado o caso possível, se existir.

Uma das impossibilidades para escrevermos $z = f(x, y); c = f(a, b)$ consiste em que $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ que você pode encontrar como um condicionante em uma das equações da lista de exercícios.

Sendo possível escrever $z = f(x, y); c = f(a, b)$ a derivada implícita desta expressão tem que ser dedutível da derivada implícita de $F(x, y, z) = K$ e isto tem duas consequências:

1. f é derivável;

2. As derivadas parciais de f se deduzem da expressão da derivada implícita de F e os cálculos para obter estas derivadas parciais são

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial x}(z - c) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}|_P \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z}; \\ dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ z - c = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) \end{cases} \tag{3}$$

A equação (2) é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ o vetor

$$(\frac{\partial F}{\partial x}|_P, \frac{\partial F}{\partial y}|_P, \frac{\partial F}{\partial z}|_P)$$

é perpendicular ao plano tangente (variedade linear de dimensão dois tangente) ao gráfico de f, ou equivalentemente ao gráfico da variedade de nível de dimensão dois $F(x, y, z) = K$ no ponto $P = (a, b, c); c = f(a, b)$.

É o Teorema da Função Implícita que descreve as condições em que é possível explicitar uma das variáveis em uma expressão.

0.3 Operador diferencial

∇ é um *operador diferencial*:

"operadores" são funções que tem funções como parâmetros, assim evitam-se frases como "vou aplicar a função T na função f", e na verdade "operadores" tem uma hierarquia diferente, eles em geral são definidos em espaços de funções. A *integral* é um operador, assim como a *derivada*. Chamamos de *operadores diferenciais* aqueles que envolvem o *operador derivada*. Como as funções multivariadas tem diversas formas de diferenciação (derivadas parciais) há uma riqueza muito grande de *operadores diferenciais* definidos em espaços de funções multivariadas.

Os operadores diferenciais (como qualquer função) definem equações, mas neste caso são as "equações diferenciais". A importância destas equações é muito grande pelo potencial de informações que elas codificam: *guardam os aspectos dinâmicos da realidade que elas modelam.*

0.3.1 Nabla

O Gradiente tem dois nomes, também é chamado de Nabla. Em português parece ser mais comum usar a denominação "Gradiente". Por definição

$$\left\{\begin{array}{l} w = F(x,y,z); \\ \nabla F = (F_x, F_y, F_z) \\ \nabla() = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \end{array}\right. \tag{4}$$

Na última linha, na equação (4), você a definição do operador,

$$\nabla(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Quando calculamos a *derivada implícita* de F vemos aparecer o Gradiente num aparente produto escalar:

$$\left\{\begin{array}{l} w = F(x,y,z); \\ dw = F_x dx + F_y dy = F_z dz = \nabla(F) \cdot (dx, dy, dz) \end{array}\right. \tag{5}$$

Esta expressão é histórica e cheia de contradições uma das quais vem da impossibilidade de se dar valores às "variáveis" "dx", "dy", "dz" e durante mais de um século os matemáticos usavam estas "variáveis" sem exatamente saber o que elas significavam: *não eram variáveis.*

Foi preciso mais de dois séculos para conseguissemos atingir uma compreensão clara da expressão na equação (5): é um modelo para construirmos a variedade linear tangente e a forma de obtenção passa pelas transformações (não é dar valor a estas variáveis, é interpretá-las com um meio de transformação):

$$\left\{\begin{array}{l} w = F(x,y,z); \text{ e sabemos que } F(a,b,c) = D \\ dx := (x-a); dy := (y-b); dz := (z-c); \\ F_x|_{(a,b,c)} = A; F_y|_{(a,b,c)} = B; F_z|_{(a,b,c)} = C; \\ A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Feitas estas transformações, a partir do fato de que existe um ponto (a, b, c) que satisfaça à variedade de nível $F(x, y, z) = D$ deduzimos a equação da variedade linear tangente à variável de nível neste ponto $P = (a, b, c)$.

Este método é muito poderoso e sua prática evita erros graves.

Ao mesmo tempo este formalismo nos conduz a um resultado importante, o operador Gradiente produz um vetor perpendicular à variedade $w = F(x, y, z)$ e em consequência também á variedade linear tangente $F(x, y, z) = D$ isto se deduz da equação linear que aparece na última linha da equação (6), em que o vetor (A, B, C) é perpendicular à variedade linear tangente deduzida neste sistema de equações, sendo perpendicular à variedade linear tangente, o é também à variedade $z = F(x, y, z)$. Daí se pode facilmente deduzir um vetor normal dividindo pelo módulo de (A, B, C).

Finalmente, como (A, B, C) é perpendicular à variedade de nível se conclui que este vetor mostra um caminho para o máximo ou o mínimo de $z = F(x, y, z)$, observe o que a figura (1), página 4, mostra um caminho para para um ponto extremo. Nesta figura vê-se uma única "curva de nível", mas se houver uma sucessão de "curvas de nível" encaixadas, conseguiremos construir uma poligonal usando a direção do gradiente que se aproxima do extremo, como mostra a figura (2), página 5.

0.4 Rota Terra-Marte de um navio espacial

Produzimos a rota Terra-Marte de um navio espacial, usando *propulsão* e a *gravitação universal*, a figura (3), página 6, exemplifica parte do que acontece usando *cinco nós gravitacionais* mais importantes.

A função

$$w = F(x, y, z, t) \tag{7}$$

que expressa a força gravitacional sobre um objeto no espaço pode ser modelada usando apenas a *lei de Newton da gravitação universal* para uma viagem espacial *pequena* como esta entre Terra e Marte. Como tal, F é a solução de um *sistema de equações diferenciais* que será mais ou menos complexa em função dos *nós gravitacionais* considerados importantes para resolver o problema duma trajetória pretendida, quando se desprezam todos os nós, exceto uma pequena quantidade, e se faz a correção da trajetória usando propulsão. O resultado é uma orbita que representa uma *solução aproximada da equação diferencial* que aparece na figura (3), página 6.

Neste ponto, a influência gravitacional do nó 2 é muito pequena comparada com a influência do nó 1 isto está sugerido com a *regra do paralelogramo deformada* que aparece na figura (5).

A figura (4), página 7 mostra um campo vetorial discreto cujas soluções são ramos de hipérbole e foi obtida com por um programa escrito em `calc` que produziu um arquivo de dados para `gnuplot`. A inclusão desta figura aqui tem apenas o objetivo de mostrar-lhe qual é o resultado da "solução discreta" de

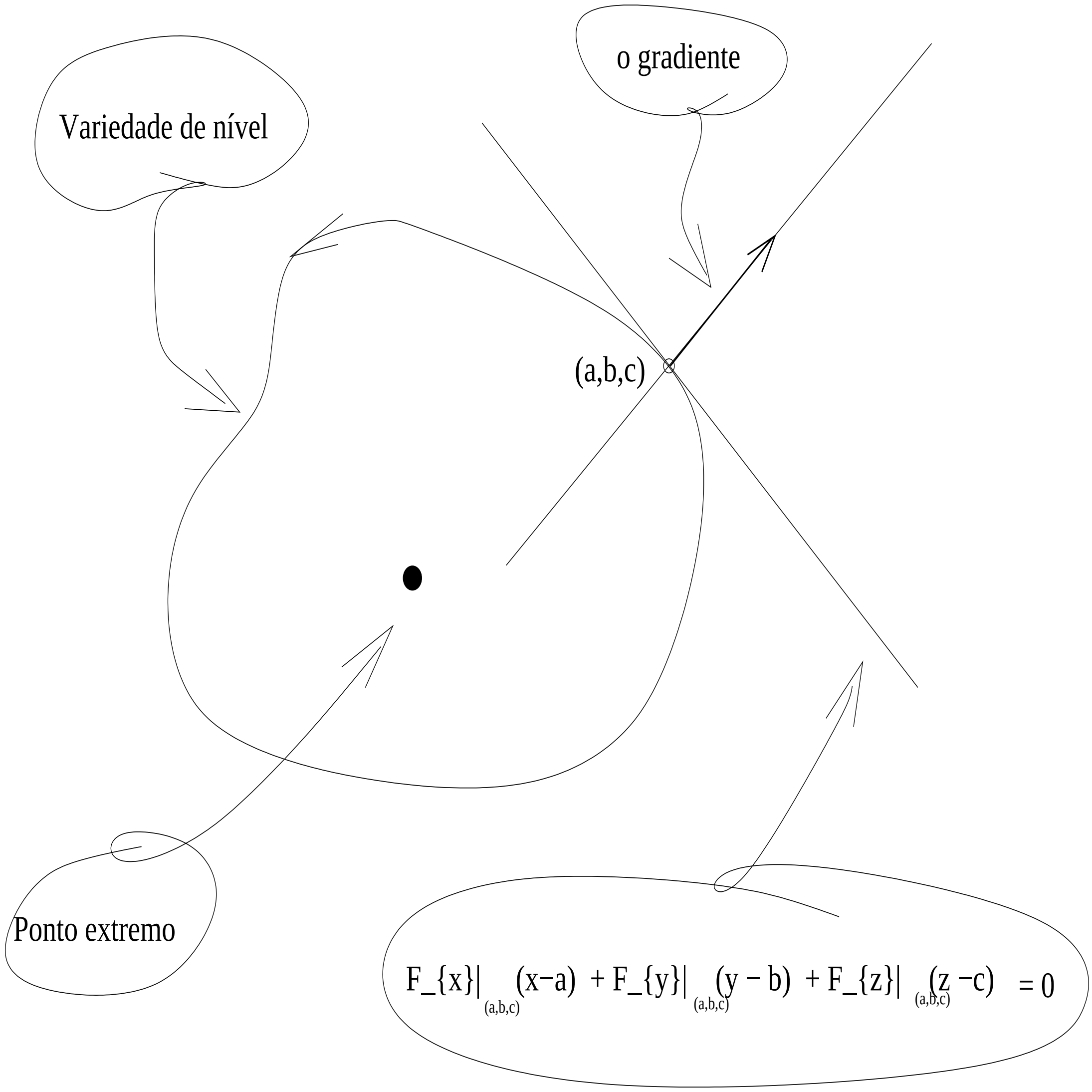

Figura 1: Um caminho para o MinMax de F

uma equação diferencial: um campo vetorial discreto "sugerindo" as linhas de ação das órbitas (soluções) duma equação diferencial.

O objetivo é usar a rota da nave no percurso Terra-Marte como motivação para uso da *derivada direcional*, que vai responder por cada uma das parcelas *levemente* corrigidas pela *propulsão*. O que estamos mostrando aqui com este exemplo imponente, rota de uma nave entre Terra e Marte, é o que acontece corriqueiramente num avião que usa um *piloto automático*, que é o papel do programa que dirige o vôo da nave: corrigir o vôo a cada cíclo de funcionamento do programa.

A figura (5), página 8, mostra um *passo* desta correção que é feita a cada cíclo do programa, a solução que vemos na figura (3) é "quase uma poligonal" com lados *relativamente muito pequenos*. Não é uma poligonal porque a influência gravitacional é permanente, não apenas dos *nós gravitacionais selecionados*,

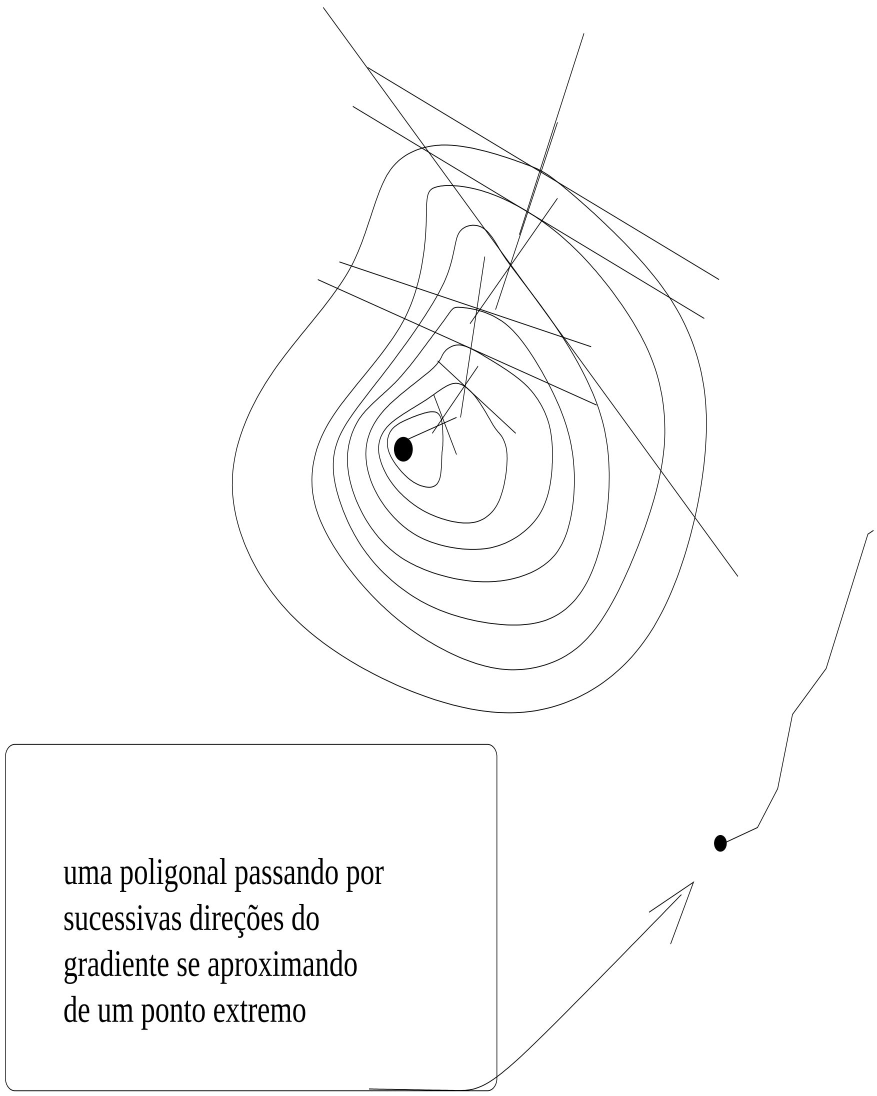

Figura 2: Uma poligonal em direção a um extremo

mas de todos os corpos[1] celestes presentes no Universo... e também devido às pequenas correções feita com propulsão quando se verifica um afastamento da rota desejada.

Para que você perceba melhor o signficado desta "convergência da soma das influências gravitacionais", e a pequena influência da grande maioria das parcelas abandonadas, considere dois exemplos:

1. Uma soma de Riemann é uma "*soma finita*" quer dizer que nela desprezamos a *quase totalidade das parcelas* retendo apenas uma quantidade finita das mesmas. A parte desprezada é tão pequena que não influencia muito no resultado final, se a função for integrável.

[1]A influência da quase totalidade deles, somada, é tão pequena que pode ser desprezada na obtenção do resultado final desejado.

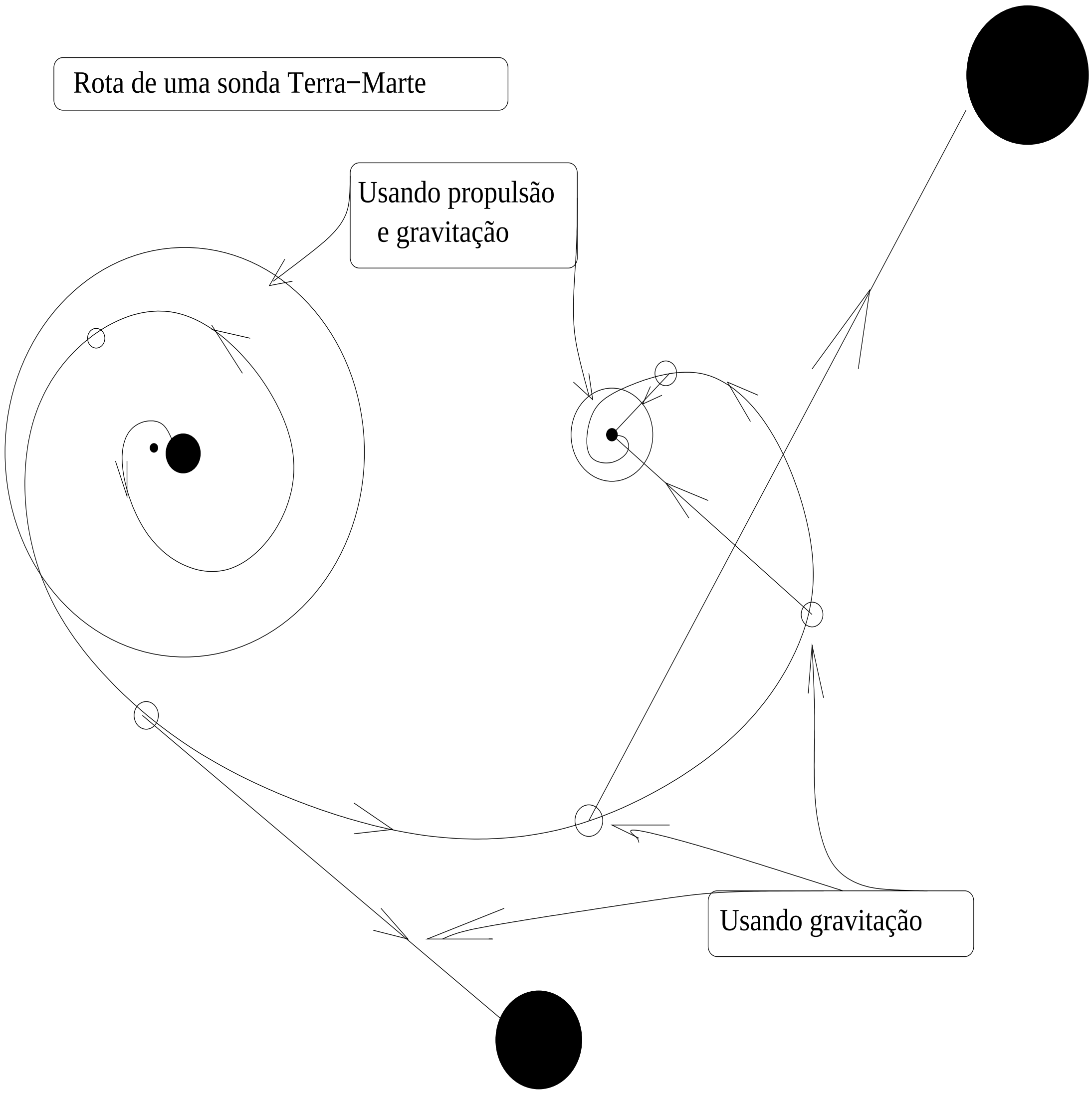

Figura 3: rota Terra-Marte de um navio espacial

2. A soma dos termos da sucessão $\frac{1}{k^2}; k \geq 1$ é finita e vale $\frac{\pi^2}{6}$ e se você rodar um programa para somar estes termos, desprezando quase todos, exceto os primeiros N:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

o programa irá parar quando $k = N$, o resultado será menor do que $\frac{\pi^2}{6}$ não importa qual o valor que você escolher para N. Experimente:

```
define soma(n) {
        local soma = 0, k = 1;
        while (k <= n){
                soma = soma + 1.0/power(k,2);
                k = k + 1;
```

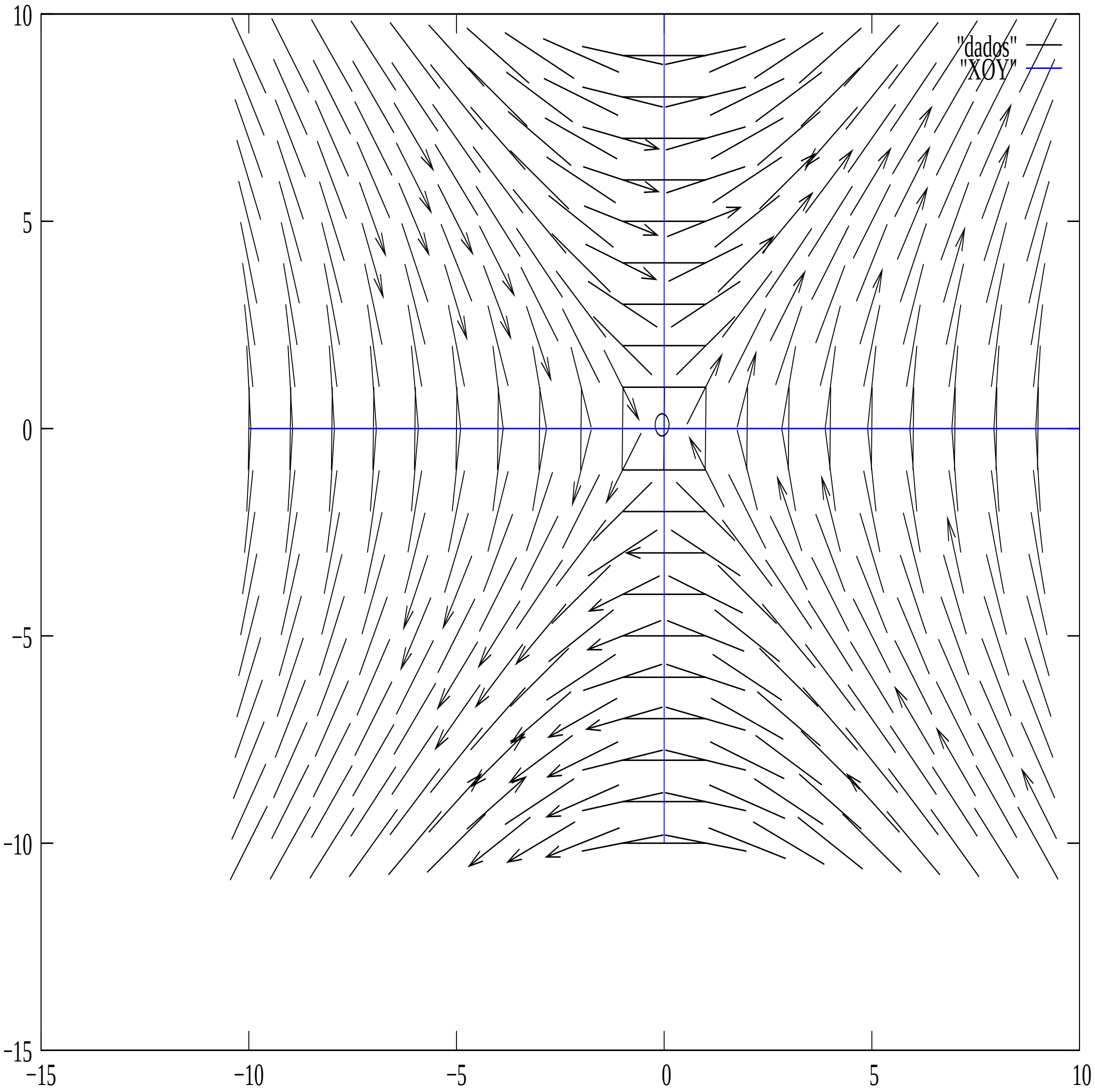

Figura 4: Campo vetorial - modelagem de uma equação diferencial

```
        }
        return soma;
};
print soma(10000) ≈ π²/6
```

A regra do paralelogramo que aparece em uso na figura (5) mostra a composição das forças gravitacionais emanadas dos nós $\underline{1,2}$ para um determinado valor do tempo. Neste instante o nó $\underline{2}$ tem uma influência muito fraca. Esta influência irá aumetando até que a nave espacial atinja a vizinhança de Marte onde a influência do planeta que é objetivo da rota se torna mais significativa, entretanto não seria suficiente para reter a nave em sua órbita sendo necessário nova correção com propulsão para que a nave entre em órbita de Marte e finalmente pouse no planeta.

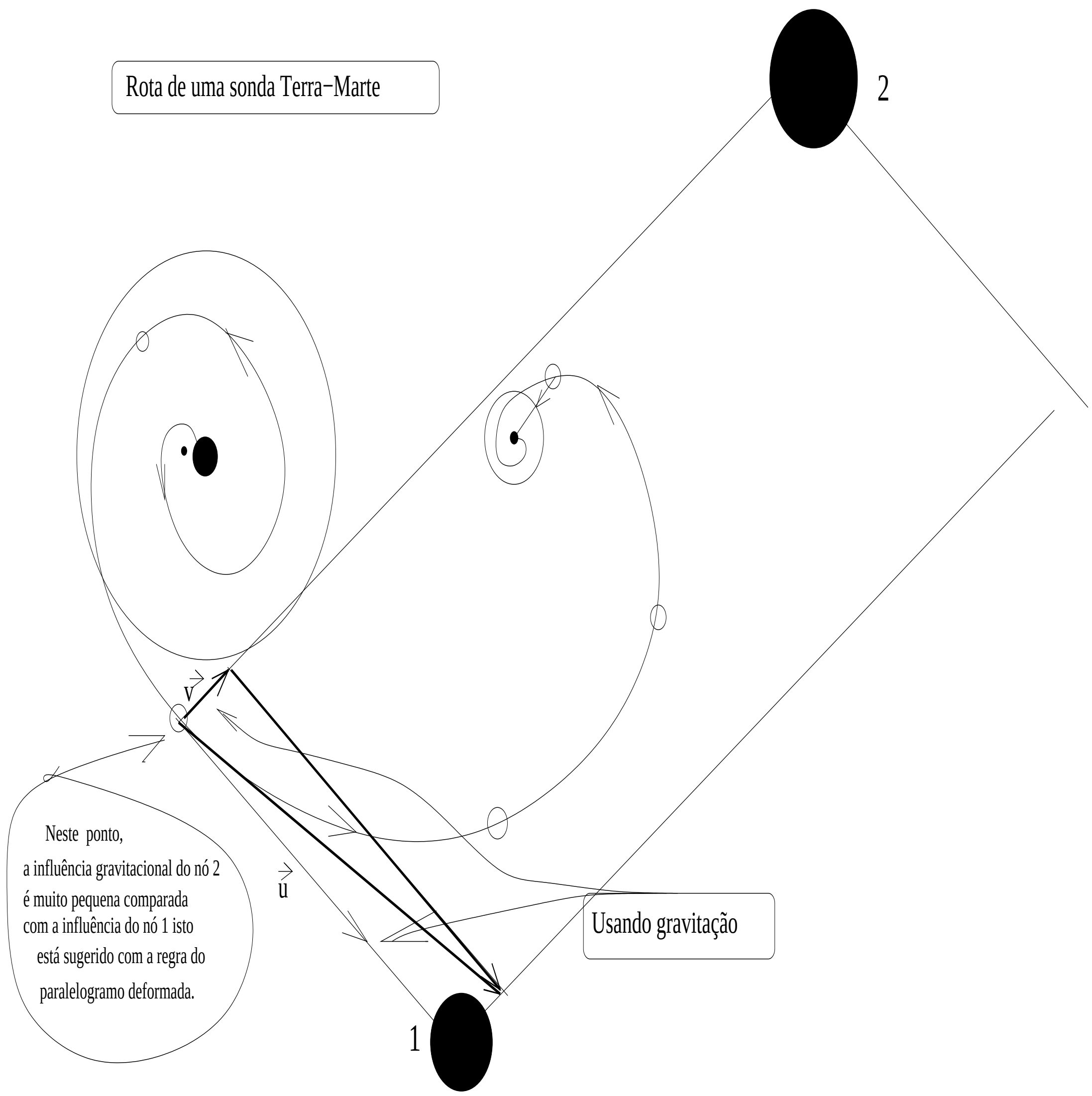

Figura 5: A derivada direcional

Verique quais das opções representam cálculos corretos em que

$$\begin{cases} F(x,y,z,t) = D; \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0; \\ D = F(a,b,c,t_0);\ \text{ponto onde passa a hipersuperfície} \end{cases} \tag{8}$$

representa uma superfície de nível onde se move a nave espacial, a derivada implícita que serve de modelo para a variedade linear tangente, o valor de F no ponto de tangência.

Não "existe" nenhuma expressão formal para F, porém as expressões matemáticas das derivadas direcionais representam as "linhas de ação" da força gravitacional em ação sobre a nave e de fato são as derivadas direcionais da força gravitacional total representada pelo símbolo F. Os simbolos $\vec{u}, \vec{v}$ representam, respectivamente, vetores unitários na direção dos nós gravitacionais 1 e 2.

1. O produto escalar destes vetores com o *gradiente*, $\nabla(F)$, que surge quando calcularmos a derivada implícita de F, fornece a intensidade (um número) da força gravitacional do nó respectivo sobre a nave.
2. Estes produtos tem que ser multiplicados pelo vetor unitário para "criar" um vetor na direção desejada e somados para produzir a diagonal da regra do paralelogramo.
3. Finalmente temos que somar a diagonal ao vetor posição para obtermos o resultado gráfico da força gravitacional atuando sobre a nave, isto completa o formalismo matemático, dentro do programa, para retratar a realidade da Física.

As contas devem traduzir estas *operações físicas* dentro do programa que conduz a nave e este deve calcular os erros de rota e operar os propulsores para fazer a correção. Aqui estamos apresentando o formalismo matemático que se encontra dentro do programa.

A figura (fig. (6) representa uma parcela na soma dos "lados" que compõem a a rota Terra-Marte.

0.5 O laplaciano

O operador de Laplace, também chamado *Laplaciano* tem uma expressão muito interessante que pode ser relacionado com *Gradiente*

$$\Delta(F) = \nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{9}$$

é o quadrado do módulo do gradiente. As duas notações são muito usadas, mas há uma preferência pela primeira $\Delta(F)$.

Se considerarmos F uma variável, uma expressão desconhecida, $\Delta(F) = 0$ é uma *equação diferencial parcial* de segunda ordem conhecida como equação de Laplace sendo uma das poucas *equações diferenciais parciais* sobre a qual se *conhece tudo...* as soluções desta equação foram descobertas *por acaso* ao longo dos muitos estudos que ela mereceu desde os primeiros estudos deste assunto no século 16, mas foi preciso chegarmos ao século 19 para que se consolidasse a resposta: *as funções harmônicas.*

A pesquisa moderna se dedica a procurar soluções para equações derivadas da equação de Laplace quando se a altera com "pequenos termos" produzindo equações sem solução conhecida e que representam interessantes desafios que se justificam: *a natureza não é harmônica como as leis da Física tentam impor, mas pequenas distorções na equação de Laplace traduzem o comportamento de muitos fenômenos da natureza.* E aqui surge uma palavra que é chave nos estudos das equações diferenciais, "perturbação". Um exemplo lhe mostra uma equação publicada recentemente com algumas soluções encontradas

$$-\Delta u - \frac{r}{\|x\|^2}u = f(x,u); u \in H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

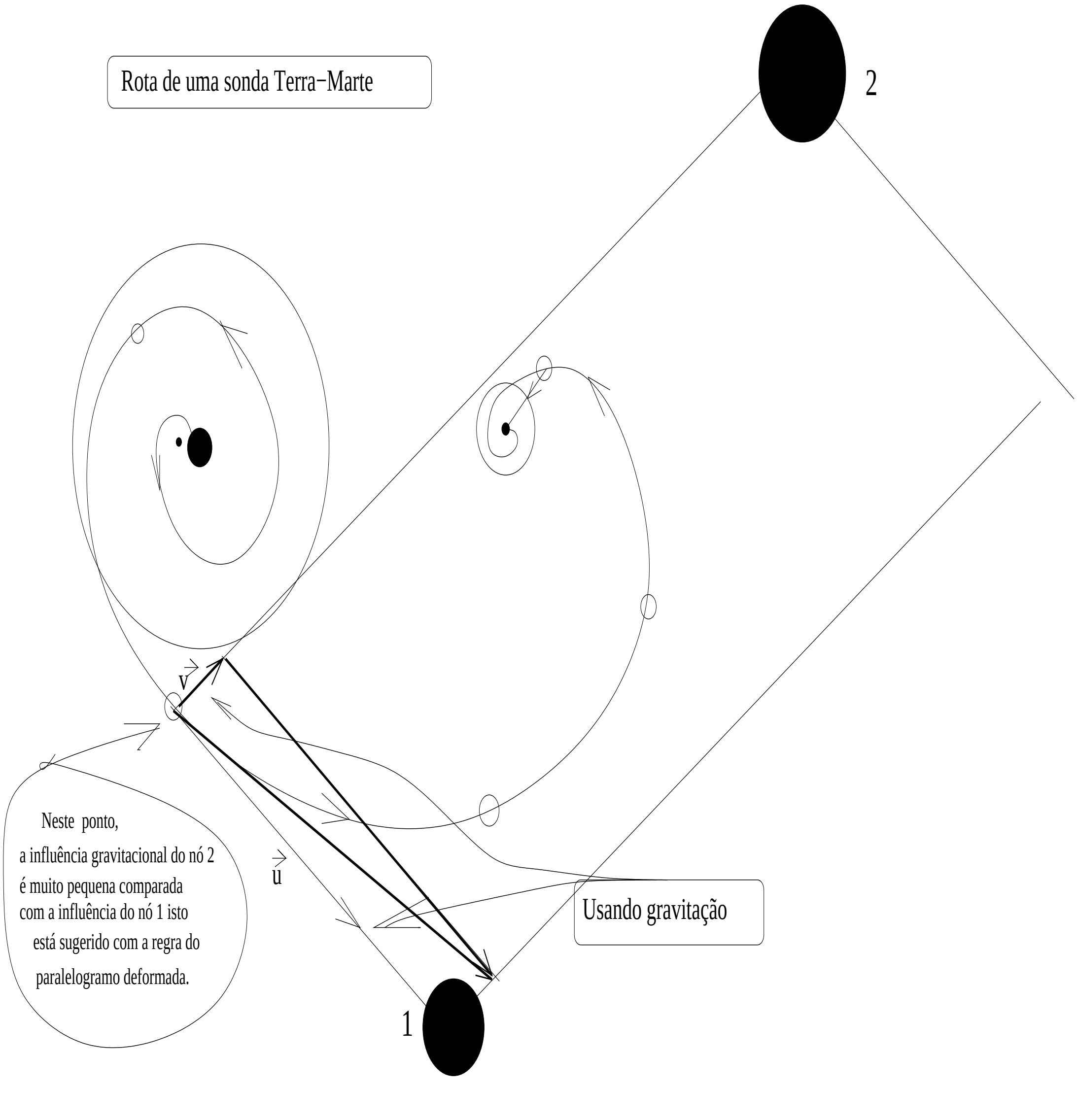

Figura 6: A derivada direcional

em que você pode ver a pertubação $\frac{r}{\|x\|^2}$ presente na equação que objetiva entender o comportamento de certas funções u nas vizinhanças de zero.

A Física e a Engenharia descobriram nestes trezentos anos de estudo das equações diferenciais que a equação de Laplace ou algumas modificações dela, descreve bem alguns fenômenos de fluxos,ŕpropagação da densidade de um fluxo dentro de outro, ou a concentração na diluição de compostos químicos. Todos estes fenômenos são importantes para nós hoje em dia tomados pelos problemas de poluição.

A equação de Laplace é uma equação simples (e resolvida) de uma classe de equações chamadas *elípticas*.

Os objetivos aqui são mostrar-lhe que as equações diferenciais existem e criar alguma experiência inicial com elas, apresentar o uso da notação.