Logaritmos e exponencial

Tarcisio Praciano-Pereira

21 Novembro de 2001
Publicação preliminar nº-2001/005

Laboratório de Matemática Computacional
Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Caixa Postal D3
62 011 370 - Sobral - Ce - BRASIL

Esta é uma versão expandida do minicurso sobre logaritmos que foi dado na Semana da Matemática 2001 da Universidade Estadual Vale do Acaraú e que deveria ter sido publicada em um volume desta Semana o que infelizmente não aconteceu.

1.1 Potências e progressões

> Quando elevamos um número, sucessivamente, a potências inteiras, aplicamos uma regra: "*somamos os expoentes, quando multiplicamos potências de mesma base*".
> Temos um método para associar multiplicação e adição. Estudando mais a fundo esta propriedade podemos ver que ela associa progressões aritméticas com progressões geométricas.

Tome um número estritamente positivo qualquer, $\underline{a}$. Escreva suas potências sucessivas:

$$a^0, a, a^2, a^3, \ldots, a^n$$

este é o exemplo mais simples de progressão geométrica. Passamos de um elemento para outro multiplicando por $\underline{a}$, a razão desta progressão geométrica é base $\underline{a}$.

Podemos re-escrever a progressão geométrica assim:

$$a^0 = 1, a, a^{1+1}, a^{1+2}, \ldots, a^{1+n-1}$$

para salientar que os expoentes formam uma progressão aritmética.

Este exemplo *mostra* que *toda progressão geométrica está associada com uma progressão aritmética de forma semelhante a que expusemos agora* .

Neste livrinho nós vamos explorar esta associação mostrando que podemos construir uma máquina de calcular com esta simplissíma idéia. Para falar a verdade, vamos mostrar como foi construida a mais antiga máquina de cálculo que foi usada, ininterruptamente, por 400 anos: os logaritmos.

Vamos aqui também derrubar um mito comum: *toda funçã tem uma equação algébrica*. A construção que vamos aqui fazer é elementar e em apenas um ponto necessitaria conhecimentos além daqueles que o estudante deve ter na Escola Secundária, mas este ponto pode facilmente passar desapercebido. Quem o notar estará convidado a nos trazer suas sugestões para melhora do texto.

1.2 Logaritmos

> Ao final da Idade Média, foi descoberta uma família de funções que tinham a propriedade
>
> $$f(xy) = f(x) + f(y)$$
>
> e esta propriedade foi "rapidamente" explorada fazendo delas um dos tipos de *máquina de calcular* que teve até hoje um dos usos mais longo na história da Humanidade, de 1550 a 1970, mais de quatrocentos anos[a], quando foram destronadas pelas máquinas de calcular elétricas e depois pelas eletrônicas. Chmamam-se *logaritmos* estas funções.
> Hoje os *logaritmos* tem um uso bem diferente, outras propriedades foram descobertas que os tornaram modelos importantes em vários campos do conhecimento. Aqui vamos fazer uma turné de museu reconstruindo a *máquina de cálcular*. Começaremos a nossa apresentação reprisando as descobertas de John Napier (1550-1617), o inventor dos logaritmos, que escreveu em 1614 o livro "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" Descrição padrão dos magníficos logaritmos e construiu uma máquina de calcular mecânica.
>
> [a]O chamado triângulo de Pascal teve e tem vida mais longa, se supõe que os chineses o conheciam alguns milhares de anos antes dos gregos.

1.2.1 A história

Se *houver* alguma função que tenha a propriedade

Hipótese: 1 *Propriedade fundamental dos logaritmos*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

se considerarmos $x = 1$ então

$$f(1 * y) = f(y) = f(1) + f(y) \equiv \tag{1.2}$$

$$f(1) = 0 \qquad f(1 * y) = f(1) + f(y) = 0 + f(y) = f(y) \tag{1.3}$$

Veremos que não somente existe uma tal função, mas existe uma "família"de funções com estas propriedades. Uma função que tenha tais propriedades, se chama `logaritmo` e a *hipótese* fundamental se escreve assim:

$$\boxed{log(xy) = log(x) + log(y)}$$

Esta descoberta desta simples relação, (eq. 1), levou rapidamente os "`logaritmos`" a uma posição muito especial, possivelmente porque os números tinham na *Idade Média*, um lugar importante dentro do misticismo, e muito em particular os dois números *zero* e *um* que, embora sendo *apenas* os elementos neutros da adição e da multiplicação, estes simples fatos fazim de ambos de números cabalísticos para os nossos antepassados, e até mesmo para muita gente dos nossos dias.

Além deste aspecto místico, estas funções transformam a complicada operação de *multiplicar* na operação mais fácil de *somar*, vamos provar isto.

Os matemáticos da época conseguiram extrair destes fatos vários outros que foram montando um sistema muito interessante.

Vamos seguir trabalhando dentro da hipótese (hip. 1), como se ela fosse verdeira, então

$$log(a^2) = log(a \cdot a) = log(a) + log(a) = 2log(a),$$

transformando potência em multiplicação.

Se fixarmos um número qualquer, $\underline{a > 0}$, e considerando suas potências, teriamos:

$log(a)$	$log(a)$
$log(a^2)$	$2log(a)$
$log(a^3)$	$3log(a)$
$log(a^4)$	$4log(a)$
$log(a^5)$	$5log(a)$
$log(a^6)$	$6log(a)$

Observe que esta tabela associa, uma progressão geométrica, na primeira coluna, com uma progressão aritmética, na segunda coluna. Esta associação é injetiva, (na verdade bijetiva) porque as progressões aritméticas são estritamente crescentes se a razão for positiva, como será sempre o caso aqui. As progressões geométricas crescem ou decrescem dependendo de que a razão seja maior ou menor do que 1.

Vemos aqui e na equação (1), página 2, dois fatos que se encontram por trás da importância dos logaritmos na *Idade Média* e que inclusive os trouxeram impertubáveis até os nossos dias:

- transformam produtos em soma;
- transformam progressões geométricas em progressões aritméticas.
- Transformam "*coisas mais difíceis*" em "*coisas mais fáceis*".

Esta última propriedade `é a questão` quando se tratam de máquinas:

> uma máquina que se prese transforma "*coisas difíceis*" em "*coisas fáceis*".

E aqui vai a contribuição nossa, moderna, para o assunto.

Nossos antepassados, a duras penas, tentaram descobrir uma função adequada que tivesse a hipótese (hip. 1), página 2. Subindo nos ombros deles, *como dizia Newton*, podemos ver que é fácil **inventar** uma função exatamente usando a tabulação acima:

> *escolhemos o número* $\underline{a}$ e dizemos quanto vale $\underline{log(a)}$.
> O resto é pura construção.

Vamos mostrar como isto funciona. Depois vamos mostrar, com um exemplo, uma tabela de falsos logaritmos, que não é suficiente colar duas progressões, uma aritmética e uma geométrica, para ser um sistema de logaritmos. Existe, portanto, uma pequena restrição ao "qualquer" que usamos acima. Discutiremos isto, mais adiante, quando falarmos de "falsos logaritmos".

1.2.2 Construção de um logaritmo

Vamos escolher

$$a = 2 \ \text{ e } \ log(a) = 1$$

observe, insistimos, poderia ser qualquer outro valor, diferente de zero, para para $\underline{log(a)}$, nossa escolha foi `inteiramente` arbitrária. A única coisa que nos guiou foi começar as coisas de forma mais simples, depois faremos outro exemplo com valores diferentes.

Com estes dados vamos repetir a tabela de potências que escrevemos acima:

	$log(x)$	x
2	$log(2)$	1
4	$log(4)$	2
8	$log(8)$	3
16	$log(16)$	4
32	$log(32)$	5
64	$log(64)$	6

e já podemos fazer umas continhas para testar o nosso invento. É sempre assim que se faz, constroi-se um *protótipo* de pequenas proporções e se verifica seu funcionamente. Se fizer *alguma coisa útil* então partimos para a *incrementação.*

Vamos calcular quanto vale 4 x 4.

$$4 \mapsto log(4) = 2$$
$$log(4 \quad \text{x} \quad 4) = log(4) + log(4) \mapsto 2 + 2 = 4 \mapsto log(16)$$
$$\text{conclusão: } 4 \quad \text{x} \quad 4 = 16$$

> Que ingênuo!
> você deve ter exclamado.

Mas, coloque-se agora no século 16, não era todo mundo que sabia fazer esta conta.

Continuando imersos no século 16, vamos lá encontrar além de alguns raros matemáticos, também havia dois tipos de profissionais raríssimos:

- Copiadores, ou escribas, (os digitadores de então);
- Calculistas, (os programadores da época).

Os *calculistas* criavam tabelas, e os *copiadores* copiavam estas tabelas para as poucas bibliotecas existentes. Quando um calculista terminava seus longos cálculos preenchendo uma folha, os *escribas* faziam 20 ou 30 cópias da mesma, que devia ser o tempo necessário ao *calculista* para preparar outra folha.

Hoje nós temos computadores e mais abaixo você vai encontrar uma tabela de logaritmos feita em centésimos de segundos com um programa de computador. Mas, antes de envolver o computador, vamos mostrar um pouco do trabalho paciente dos calculistas para melhorar a fraquíssima tabela que temos acima.

Os hábeis calculistas devem ter observado que na primeira coluna da tabela se encontrava uma progressão geométrica de razão 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$$

e que na segunda coluna havia uma progressão aritmética: de razão 1

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

portanto, para melhorar esta tabela, se tinha que encontrar progressões mais finas que contivessem as duas anteriores.

> Refinando a tabela;
> Aumentando a precisão da tabela.

Exemplo: 1 *Uma tabela mais fina que contenha esta acima*

x	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2^3}$	4	$\sqrt{2^5}$	8	$\sqrt{2^7}$	16	$\sqrt{2^9}$	32	$\sqrt{2^{11}}$	64
$log(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6

Havia que descobrir um número $\underline{r}$ que multiplicado por si próprio n vezes produzisse 2 permitindo refinar os valores entre 1 e 2 na primeira coluna e assim prosseguir com as potências de $\underline{r}$ para refinar os valores entre 2 e 4 e assim sucessivamente na primeira coluna.

Depois descobrir a imagem de r para fazer o mesmo na segunda coluna.

Temos assim um problema de logaritmos e de progressões, em conjunto, que vamos agora resolver.

Com esta frase torcemos a história e vamos assim nos corrigir: temos um problema de progressões *geométricas* e *aritméticas*, em conjunto, para resolver. Deixemos para você a análise lógica do período e da contradição nele incluída. Divirta-se.

Somente um calculista sabia resolver este problema naquela época. Hoje temos vários instrumentos para nos facilitar a vida, mas vamos evitar de usá-los para salientar o trabalho duro dos nossos antepassados.

Para não sofrer muito, vamos escolher

$$n = 5$$

quer dizer que desejamos *enxertar* uma nova progressão geométrica na progressão geométrica anterior. No exemplo anterior já fizemos isto com $n = 2$.

1					2					4
1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}

A solução se encontra na equação, ou melhor, na correspondência entre as duas colunas,

$$2 \mapsto r^5$$

que produz a seguinte equação:

$$r^5 = 2 \;\; \Rightarrow \;\; r = \sqrt[5]{2}$$

r é a raiz quinta de 2, que tinha que ser descoberto experimentalmente pois não havia máquinas de calcular na época. Haveria que sair experimentando a multiplicação sucessiva de número decimais um pouco maiores que 1 até encontrar a raiz quinta de 2, *aproximadamente*, que era outro problema *místico* para os nossos antepassados, e até para muita gente de hoje em dia...

Claro, aqui nós vamos usar um programinha de coputador, senão, gastariamos uma semana inteira para descobrir $r = \sqrt[5]{2}$ com uma precisão aceitável, coisa que para os calculistas da *Idade Média* era questão para um par de horas.

Antes vamos citar uma desigualdade, que é fácil de ser demonstrada, e que provavelmente alguns calculistas conheciam, para lhe dar um pouco do sabor do que era fazer cálculos quando não havia a tecnológia que se encontra a nossa disposição e, naturalmente, aumentar a sua dívida moral para com os que nos antecederam nos legando as raizes do que disfrutamos hoje.

A desigualdade diz:

a media aritmética entre dois números é maior, ou igual, do que a média geométrica entre os mesmos números,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Tente demonstrar esta afirmação, tudo que você vai precisar é a "equação do segundo grau". Mais a frente faremos a demontração.

Podemos generalizar esta afirmação para uma quantidade qualquer de números, agora nos interessam cinco, porque nos decidimos pela raiz quinta de 2:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} \geq \sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5} \qquad (1.4)$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\right)^5 \geq x_1x_2x_3x_4x_5 \approx 2 \qquad (1.5)$$

e agora vamos experimentar com alguns números. Uma simples calculadora com memória pode nos ajudar.

Devemos escolher 5 números "candidatos"a serem a raiz quinta de 2. Quer dizer que eles devem ser maiores do que 1 e menores do que 2, (por que?)

Eis o nosso *projeto*:

- • Vamos repetir a experiência até obter um produto que seja menor 2.
- • Pela desigualdade, a média aritmética será maior do que a média geométrica que é uma proposta de raiz;
- • Se a média aritmética for maior do que a raiz quinta de 2 teremos uma aproximação por falta e outra por excesso.
- • O melhor deste esquema é que, se os números utilizados não forem muito *dispersos*, a diferença entre as duas médias é pequena e portanto poderemos ter uma ótima aproximação.

Vamos começar os experimentos com:

$$1.25; 1.33; 1.4; 1.41; 1.4$$

vamos usar uma calculadora com 10 memórias das quais vamos usar 7; cinco para guardar os fatores que estaremos testando, e uma para guardar o produto destes fatores e a sétima para guardar a média aritmética dos fatores.

Abaixo a lista dos resutaldos obtidos, em que P é o produto, e M é a média aritmética:

- $$x_1 = 1.25; x_2 = 1.33; x_3 = 1.4; x_4 = 1.41; x_5 = 1.4$$
  $$M = 1.358 \;;\; P = 4.594485 \approx 2$$
- $$x_1 = 1.25; x_2 = 1.25; x_3 = 1.25; x_4 = 1.25; x_5 = 1.25 \;;$$
  $$M = 1.25 \;;\; P = 3.0517578125 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.15; x_2 = 1.135; x_3 = 1.125; x_4 = 1.15; x_5 = 1.14 \ ;$$
$$M = 1.14 P = 1.92508059375 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.15; x_2 = 1.145; x_3 = 1.135; x_4 = 1.15; x_5 = 1.145;$$
$$M = 1.145 \ ; \ P = 1.9678976884375 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.148; x_2 = 1.145; x_3 = 1.14735; x_4 = 1.1475; x_5 = 1.1459;$$
$$M = 1.14675 \ ; \ P = 1.98309129589694025 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.148; x_2 = 1.147; x_3 = 1.14795; x_4 = 1.1478; x_5 = 1.14795;$$
$$M = 1.14774 \ ; \ P = 1.991670409950073902 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.149; x_2 = 1.149; x_3 = 1.14795; x_4 = 1.1478; x_5 = 1.14895;$$
$$M = 1.14854 \ ; \ P = 1.9986206930929315395 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.1488; x_2 = 1.148; x_3 = 1.14899; x_4 = 1.1489; x_5 = 1.14899;$$
$$M = 1.148736 \ ; \ P = 2.00032720825047469273 \approx 2$$

- $$x_1 = 1.1488; x_2 = 1.148; x_3 = 1.14898; x_4 = 1.1487; x_5 = 1.14899;$$
$$M = 1.148694 \ ; \ P = 1.99996158577245650457 \approx 2$$

Vamos aceitar este último resultado. A média aritmética deles é

$$1.148694$$

e a raiz quinta de 2 obtida com a calculadora é:

$$1.1486983549970350068$$

e vemos que o erro cometido com os cálculos de médias fica na 6 casa decimal, portanto um erro menor do que 0.000004.

Observe que no penúltimo resultado obtivemos um produto maior do que 2 o que nos obrigou a reduzir alguns fatores.

Exercício: 1 *Cálculo de raízes*

1. *Calcule a raiz 7ª de 2, usando médias e teste o resultado com uma máquina de calcular.*
2. *Calcule a raiz 9ª de 4, usando médias e teste o resultado com uma máquina de calcular. A calculadora deverá ter 11 posições de memória, e a amostra deve ser formada de números próximos de 1.*

Temos assim um método experimental para descobrir as raízes de um número. Como a média aritmética é maior ou igual do que a geométrica, ela vai nos dar uma aproximação presumivelmente melhor, (deve ser testada):

$$M = 1.148694 = r \ ; \ (1.148694)^5 = 1.99996208783624992043$$

que vamos considerar uma aproximação aceitável. Este é o número

$$r = 1.148694$$

que procuravamos para preencher a tabela, no lado da progressão geométrica.

Do outro lado, na progressão arimética, será mais fácil, até porque se não fosse, os logaritmos não valeriam a pena. Basta dividir os extremos pelo número de termos intermediários que desejamos, $n = 5$, para encontrar a razão $\underline{a}$ da progressão aritmética:

$$a = \frac{0+1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

e agora montamos a tabela,

- • de um lado multiplicando sucessivamente por $r = 1.148694$ a partir de 1;
- • do outro somando sucessivamente $d = 0.2$ a partir de zero.

x	log(x)
1	0
1.148694	0.2
1.319497905636	0.4
1.515699327216639384	0.6
1.74107472297779036056	0.8
1.99996208783624992043	1
2.29734445052497326610	1.2

Acima estamos apresentando um pedaço da tabela, apenas

- <u>do lado da P.A.</u> entre 0 e 1.2 ;

- <u>do lado da P.G.</u> entre 1 e 2.29734445052497326610

Testando, vamos multiplicar dois números que se encontrem na tabela, ou que estejam próximo dos que desejamos.

Exemplo: 2 *A multiplicação de dois números*
Os dois números abaixo não se encontram na tabela:

$$1.3150355625 \ ; \ 1.72931853064$$

e queremos multiplicá-los. Vamos usar dois números que estejam na tabela e que representem uma aproximação dos números que nos interessam. Encontramos na tabela:

$$1.319497905636 \mapsto 0.4$$
$$1.74107472297779036056 \mapsto 0.8$$

e eles correspondem, respectivamente aos logaritmos $0.4, 0.8$ *Vamos somar os seus* logaritmos*:* $0.4 + 0.8 = 1.2$ *que é o* logaritmo*, (aproximadamente), do resultado:*

$$1.2 \mapsto 2.29734445052497326610 \ .$$

Quer dizer que:

$$1.3150355625 \quad \text{x} \quad 1.72931853064 \approx 2.29734445052497326610 \qquad (1.6)$$

Se você tentar com a calculadora esta multiplicação, vai encontrar

$$2.274115366681845885$$

vericando que em nossas contas há um erro menor do que 0.02 <u>*mas*</u>*, não se esqueça de que também na calculadora há erros e que nós estamos no início da construção da nossa tecnologia.*

Você vai logo ver como podemos garantir que os erros sejam menores, entretanto, erro sempre vai existir.

> Se *somarmos* os logaritmos dos números que desejamos *multiplicar*, vamos encontrar o logaritmo do resultado, e através dele, na tabela, um valor aproximado do produto.

Claro, as contas que fizemos são muito penosas para serem feitas à mão, sobretudo hoje, quando elas parecem desnecessárias. Mas, até há pouco tempo,

este método ainda era utilizado. Até 1960, em todas as escolas se usavam tabelas de logaritmo para fazer contas. Máquinas eletro-mecânicas de calcular já existiam, mas eram caras, ao passo que as tabelas de logaritmo eram baratas e ofereciam resultados, muitas vezes, melhores do que os obtidos com máquinas eletromecânicas.

Veja que os logaritmos reinaram sobre a tecnologia de 1550 a 1960, ou seja por 4 séculos, isto lhes garante o direito de um pouco de nossa atenção, são, sem dúvida, um respeitável assunto de museu.

Com um auxílio de um programa de computador podemos obter $\sqrt[5]{2}$ com muito maior precisão, quase instantâneamente, e fazer uma tabela de logaritmos de maior precisão. Você vai encontrar isto mais adiante, inclusive o programa usado.

Exercícios: 1 *Médias, desigualdades e progressões*
Uma primeira definição de logaritmo, para começar.

Definição: 1 *Logaritmo*
Vamos chamar de logaritmo, e usar a notação,

$$log(x)$$

aos números que se encontram na segunda coluna das tabelas em que estamos fazendo a correspondência entre progressões geométricas. Na primeira coluna, as progressões geométricas, e na segunda coluna, as progressões aritméticas, os logaritmos.

1. (a) *Prove que dados um número positivo x então*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

   (b) *Prove que* $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$.

Solução: 1 *Uma forma comum de demonstrar esta desigualdade, consiste em procurar completar o quadrado:*

$$x + \tfrac{1}{x} \geq 2$$
$$x^2 + 1 \geq 2x \ \textit{se} \ x > 0$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 0$$

Como todas as passagens são equivalentes, a conclusão é que sendo a última verdadeira então partimos de uma verdade. Demonstramos assim sob a hipótese $x > 0$. Se $x < 0$ concluiriamos, como os cáculos acima, que $(x-1)^2 \leq 0$ que, sendo falso, nos indica que a desigualdade somente é válida quando $x > 0$.

No livro de Little, Hardy e Polya, Inequalities, podemos encontrar a seguinte demonstração, que parte da identidade algébrica:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)\ ;\ x = \frac{a+b}{2}\ ; y = \frac{a-b}{2}$$

Dados dois números positivos, a, b podemos, sem perda de generalidade considerar $a > b$ então

$$\begin{array}{c} ab = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 \\ (\frac{a-b}{2})^2 \leq (\frac{a+b}{2})^2 \\ ab = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 \leq (\frac{a+b}{2})^2 \\ ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 \\ MG(a,b) = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = MA(a,b) \\ MG(a,b) \leq MA(a,b) \end{array}$$

——————————————————

2. *Um erro lógico Páginas atrás dissemos que na frase*

   "Temos assim um problema de logaritmos e de progressões, em conjunto, que vamos agora resolver."

   havia um erro lógico. Qual é o erro?

   Solução: 2 *O erro lógico na frase:*

   "Temos assim um problema de logaritmos e de progressões, em conjunto, que vamos agora resolver."

   Os logaritmos ainda não existiam, estavam em contrução, só haviam progressões, naquele momento.

——————————————————

3. *Definimos log como sendo a correspondência entre duas colunas de dados, uma função cujo domínio, por enquanto é difuso... Começamos com a propriedade fundamental*

   $$log(xy) = log(x) + log(y).$$

   Deduza desta propriedade, as seguintes:

   (a) $log(a^n) = nlog(a)\ ;\ a > 0\ ;\ n \in \mathbf{N}$
   (b) $log(\frac{1}{a} = -log(a)$
   (c) $log(\frac{a}{b} = log(a) - log(b)$
   (d) *Se* $log(a) > 0$ *então* $log(\frac{1}{a}) < 0$
   (e) $log(abc) = log(a) + log(b) + log(c)$

   (f) $log(\sqrt[m]{a}) = \frac{log(a)}{m}$

4. *Use a tabela 1.2.6, página 33, para calcular*

   $$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \frac{3}{2}; \sqrt[5]{2}$$

   e teste a precisão dos resultados com uma calculadora.

5. *Use a tabela (tab. 1.2.6), página 35 , para calcular*

   $$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \frac{3}{2}; \sqrt[5]{2}$$

   e teste a precisão dos resultados com uma calculadora. Compare com os resultados obtidos na outra tabela, verificando que você usou dois tipos de logaritmos.

1.2.3 Construindo outro logaritmo

E se lhe dissemos que não precisaremos calcular nenhuma raiz e-nésima para construir logaritmos?

É isto mesmo, basta tomar um número qualquer *muito próximo de 1* que ele é a raiz e-nésima, (para algum n que depois poderemos determinar) de algum número (que depois vamos saber)...

Não se assuste com a forma disciplicente com que falamos. Fique certo de que se não se trata de nenhum "discurso" de "politiqueiro" sujo. Apenas se convença de que um número bem próximo de 1, maior do que 1, é a raiz enésima de algum número grande...

Por exemplo $r = 1.0000000000012345$ é a raiz enésima de algum número... basta você multiplicá-lo por ele mesmo varias vezes, (as calculadoras fazem isto se você apenas apertar no =), você *poderá* (ou não) encontrar um inteiro...

Por exemplo,

$$(1.0000123)^{10005} = 1.130953116548$$

em outras palavras,

$$\sqrt[10005]{1.130953116548} = 1.0000123$$

e isto já nos oferece material suficiente para construir uma tabela de logaritmos extremamente eficiente:

- Na coluna do x vamos colocar a progressão aritmética cujo primeiro termo é $\frac{1}{10005}$ sendo também este número a razão da progressão.
- Na coluna $log(x)$ vamos colocar as potências de 1.0000123 quer dizer uma P.G. de razão 1.0000123 sendo este o primeiro termo.

- Consequentemente o termo de ordem 10005 da P.A. será 1 e estará em correspondencia com o termo de ordem 10005 da P.G. que será 1.130953116548, quer dizer que $log(1.130953116548) = 1$ e naturalmente esta é a base da nossa tabela de logaritmos.
- Acabamos de descrever a primeira página da nossa *tabela de logaritmos*. A proxima página vai consistir de somar 1 a todos os elementos da coluna do x e multiplicar por 1.130953116548 todos os elementos da coluna do $log(x)$ e assim sucessivamente.

Observação: 1 *Determinação experimental de raizes...*
O que dissemos acima pode fazê-lo perder horas a fio. Por exemplo, $1.0001^{6932} = 2.0000363$ *quer dizer que você teria que dar 6932 toques para conseguir* 2.0000363.

Depois, veja, com todo o esforço que fizemos, não encontramos a raiz exata de 2, a linha que aparece em nossa tabela é:

x	log(x)
1.99996208783624992043	1

e nos gostariamos que fosse

x	log(x)
2	1

Como já dissemos, tudo o que nos interessa é "duas progressões", uma geométrica, com razão multiplicativa r :

$$1, r, r^2, \cdots, r^n = a$$

e uma aritmética, com razão aditiva d :

$$0, d, 2d, 3d, 4d, \cdots, nd.$$

Se $nd \mapsto a$ teremos construido, $\boxed{\textit{por acaso}}$, o *logaritmo base* $\underline{a}$.

Acabamos de dizer que anteriormente construimos o logaritmo de base 2. Depois voltaremos a esta história da base.

Não dissemos grandes novidades, apenas nos liberamos do cálculo de uma raiz especificada de um certo número. Mas ainda existe uma dificuldade psicológica. No caso anterior dividimos 1 por n para definirmos as duas progressões, como faremos agora se não escolhemos n ?

Total liberdade, novamente. Escolheremos um número pequeno, agora próximo de zero, para ser a razão da progressão aritmética.

Se aparecer a linha

x	log(x)
N	1

com $N \in \mathbf{N}$ encontramos, $\boxed{\textit{por acaso}}$, a tabela de logaritmos de base N. Se não encontrarmos, teremos uma tabela de *logaritmos anônimos*!

Mãos a obra com, usando $r = 1.01$ como razão (multiplicativa) da progressão geométrica e $delta = 0.01$ como razão (aditiva) da progressão aritmética.

Não faremos estes cálculos a mão, para isto temos computadores a nossa disposição. Vamos escrever abaixo o programa que usaremos para construir a tabela:

```
    delta = 0.01
r = 1.01
y = 0
x =1
imprima "x log(x)"
imprima -————————"
## enquanto y for menor que 0.21 repete as linhas abaixo
enquanto (y ¡= 1.1):
    imprima x,,y ## imprime os dados
    y = y + delta ## aumenta o valor de y
    x = x*r ## aumenta o valor de x
```

o resultado deste programa é tabela:

```
x         log(x)
----------------------------
1 0
1.01 0.01
1.0201 0.02
1.030301 0.03
1.04060401 0.04
1.0510100501  0.05
1.0615201506  0.06
1.07213535211  0.07
1.08285670563  0.08
```

```
1.09368527268   0.09
1.10462212541   0.1
1.11566834667   0.11
1.12682503013   0.12
1.13809328043   0.13
1.14947421324   0.14
1.16096895537   0.15
1.17257864492   0.16
1.18430443137   0.17
1.19614747569   0.18
1.20810895044   0.19
1.22019003995   0.2
1.23239194035   0.21
```

Podemos fazer um programa um pouco mais sofisticado para obter os dados em uma tabela com várias colunas. O resultado você pode encontrar na tabela 1.2.6, página 33.

O programa "mais sofisticado" calcula espaços e tabulações produzindo uma tabela arrumadinha como a que você pode ver. Quando você estiver dominando programação poderá fazer algo igual ou muito melhor. O que nos interessa, entretanto aqui não é programação, mas sim os logaritmos.

1.2.4 Os logaritmos decimais

Analisando a tabela de logaritmos anônimos que construimos antes, vemos um problema grave que os nossos antepassados logo observaram. Se quisermos calcular 2.1947675^2 basta multiplicarmos por dois o seu logaritmo, $2 \quad x \quad 0.79 = 1.58 \mapsto 4.8170045$ e portanto

$$2.1947675^2 = 4.8170045$$

mas se quisermos calcular o quadrado de 2.2167152 a tabela já não mais alcança. Chegamos ao limite da tabela.

Solução para o problema: fazer uma tabela mais completa.

Claro, há outros problemas com que já nos deparamos, um deles diz respeito à granularidade da tabela, ou sua precisão. O número 2.2177152 não estána tabela, portanto não podemos fazer nenhuma conta com ele.

Os nossos antepassados encontraram algumas soluções brilhantes para estes problemas. Vamos descrever uma aqui, outras deixaremos de lado, pois, caso contrário, estaremos, mais do que visitando o museu, construindo novas paredes no prédio do museu e isto pode ser mal compreendido pela segurança...

Eles (nossos antepassados) pensaram e cismaram:

E, se quando o logaritmo y mudar de unidade, o número x mudasse uma casa decimal, o *ponto flutuante* corresse uma casa para trás? (ou para frente!)

A vantagem é que a cada novo inteiro os algarimos na coluna do x se repetiriam e apenas o ponto decimal correria para direita. Aí teriamos uma tabela com validade muito maior, veja o exemplo:

x	log(x)
2.346676545566	0.3704532326933746
23.46676545566	1.3704532326933746
234.6676545566	2.3704532326933746

e nós poderiamos imediatamente saber:

$$log(234667.6545566) = 5.3704532326933$$
$$log(2346.676545566) = 3.3704532326933746$$
$$log(23466.76545566) = 4.3704532326933746$$

e uma tabela relativamente pequena teria uma utilidade bastante grande porque facilmente a poderiamos extender.

Observação: 2 *A maneira "algébrica"de fazer Matemática*

Este truque e as potências de 10

Veja que a invenção de que estamos falando acima tem propriedades interessantes:

$$23466.76545566 = 10 \quad \text{x} \quad 2346.676545566$$

$$\log(23466.76545566) = log(10) + log(2346.676545566)$$

$$\log(23466.76545566) = 1 + log(2346.676545566)$$

quer dizer que estamos falando do "logaritmo base 10".

Veja o método que estamos adotando, é assim que se faz matemática, sempre *foi assim que se fez matemática. Analisamos um problema e criamos uma expressão "algébrica" para o que desejamos e vamos manipulando as expressões na busca de uma saída.*

As vezes dá certo, descobrimos um teorema, publicamos ruidosamente o resultado. Muitas vezes não dá em nada interessante e evitamos discutir o assunto com os outros... tem muita matemática ficou silenciosamente na cesta de lixo.

Foi usando este "método algébrico"que começamos a discutir os logaritmos, procuravamos uma função que tivesse a propriedade:

$$log(xy) = log(x) + log(y)$$

para *transformar* as complicadas multiplicações na adições que são mais simples e caimos em tabelas que tranformassem progressões geométricas em progressões aritméticas.

Vamos usar outra palavra em lugar de *transformar*.

Vamos dizer que *sincronizamos* progressões geométricas e progressões aritméticas fixando a associação:

$$1 \mapsto 0.$$

Usamos a história da raiz para criarmos dois segmentos de progressões sincronizadas. Esta foi a primeira forma como apareceram os logaritmos com uma "base" definida.

Depois vimos que podiamos nos liberar disto e criar uma multitude de logaritmos e criamos *logaritmos anônimos* simplesmente sincronizando duas progressões.

Agora queremos encontrar progressões *sincronizadas* de uma forma mais poderosa, e isto vai nos levar de volta ao cálculo de raizes, que deliberadamente abandonamos para trabalhar com mais liberdade mas ao mesmo tempo chegamos a conclusão que as tabelas de logaritmos assim construídas poderiam ficar enormes e é preciso voltar atrás e estruturá-las melhor.

Com o que fizemos inicialmente, já temos a solução quase pronta, o que desejamos é descobrir r tal que

$$1, r, r^2, r^3, \cdots, r^n = 10$$

e sincronizar esta progressão com

$$0, d, 2d, 3d, \cdots, nd = 1$$

porque $r^{2n} = 100$ e estará sincronizado com $2nd = 2$ enfim, a cada nova casa decimal, os logaritmos pulam de uma unidade.

Redescobrimos, assim os logaritmos decimais, ou ainda os logaritmos de base 10.

Como já resolvemos esta questão antes, sabemos que

$$r = \sqrt[n]{10}$$

e quanto maior n mais refinada será a tabela de logaritmos, e, infelizmente também, mais trabalhoso para calcular a raiz e-nésima de 10, entretanto os cálculos deixaremos por conta do nosso *calculista de mesa*, que igual os calculistas árabes de Malba Tahan, calcula silenciosamente, obedientemente, e sem erros... e veja que não estamos fazendo nenhuma sugeira. Estamos construindo os logaritmos de forma autêntica, vamos usaar o computador apenas para escrever as progressões aritmética e geométrica mais rápido e com maior precisão. Estamos apenas usando trabalho escravo, coisa comum em nossos dias, o nosso escravo, aqui, é a máquina enquanto outros escravisam seres humanos ou os simples e dóceis animais.

Vamos retomar os nossos cálculos de raizes, usando a propriedade das médias aritméticas para obter $\sqrt[n]{10}$. Se quisermos ter uma página para cada passagem de inteiro, usando a formatação da tabela (tab. 1.2.6), página 33, então teremos que usar $n = 160$, e portanto teremos que calcular médias com 160 números.

Que mágico número, 160 é este?
Verifique você mesmo, quantas colunas tem as tabelas de logaritmos que fizemos, por exemplo a tabela (tab. 1.2.6), página 35 .
Quatro colunas, certo?
Em cada coluna 40 linhas, que é o que cabe a página, certo?
Daí $160 = 40 \quad \text{x} \quad 4$, somente isto. Nenhum mistério.

Mesmo para um hábil calculista da *Idade Média* isto poderia tomar mais de um par de horas, talvez alguns dias. Claro, "naqueles tempos" sempre havia muito "tempo"... podemos entretanto solicitar ao nosso calculista de mesa que faça o serviço, e o resultado pode ser obtido em menos do que um par de segundos:

```
power(10,1/160)
        1.01449520806873610874
```

e assim, num piscar de olhos sabemos que $r = 1.01449520806873610874$ que vamos arredondar para $r = 1.0144952$ porque o calculista exagerou.

Agora usando $delta = \frac{1}{160}$ no programa "sofisticado" que rodamos anteriormente vamos obter uma nova tabela, (tab. 1.2.6), página 35

Analisando a tabela você "poderia"encontrar:

$$x = 2.0241832 \; log(x) = 0.30625 \tag{1.7}$$
$$x = 20.241806 \; log(x) = 1.30625 \tag{1.8}$$
$$x = 202.41832 \; log(x) = 2.30625 \tag{1.9}$$
$$x = 0.20241832 \; log(x) = 0.30625 - 1 = -0.69375 \tag{1.10}$$

Você não encontrou os números citados acima (com exceção de dois casos) porque a tabela tem uma amplidão reduzida:

$$x \in [1, 98.570940] \; ; \; log(x) \in [0, 1.99375]$$

Quando um número apenas tiver o "ponto flutuante" deslocado de uma casa, relativamente a outro, o seu *logaritmo decimal* difere de uma unidade, relativamente ao do outro.

Ou ainda:

$$log(x) = y \;\; \Rightarrow \;\; log(10x) = y + 1 \; ; log(100x) = y + 2 \ldots$$

Com isto, uma tabela de logaritmos bem refinada, com x variando entre os números 1 e 100 será útil para fazer muitas operações, como é o caso da tabela (tab. 1.2.6), página 35

Observe, também que o número $x = 10$ não aparece na tabela, quem aparece é 9.9999872. Isto se deve a erros de arrendondamento, mas 9.9999872 é praticamente 10. Poderiamos ter editado a tabela de modo que aparecesse 10 em lugar de 9.9999872 mas aí, você, leitor, estaria sendo enganado.

Quer dizer que (tab. 1.2.6), página 35 é uma tabela de logaritmos "quase decimais"... Use o programa `log_tabela.py` para construir sua tabela de logaritmos com precisão arbitrária, (escolhida por você), e com alcance que você mesmo irá determinar, seria certamente um bom artigo para feiras de artesanato, talvez ninguém queira comprar, mas irá, certamente, chamar atenção.

1.2.5 A base de um logaritmo

Por diversas vezes fizemos referência ao fato de que ao encontramos, (*se* encontrarmos), a linha:

x	log x
a	1.0

então diremos que se trata da tabela do logaritmo na base <u>a</u>.

A tabela (tab.1.2.6), página 35, é uma tabela de logaritmos decimais, ou logaritmos de base 10.

Observação: 3 *Precisão nas tabelas de logaritmo*
Observe o artigo indefinido na frase anterior e em geral quando falamos de uma *tabela de logaritmos.*
Basta escolher outro valor para n e teremos outra tabela de logaritmos decimais.
Este `outra tabela` *é uma expressão perigosa. Haveria então muitos logaritmos decimais?*
*A reposta é "***não***". O que pode haver é diversas tabelas com maior ou menor precisão.*
O valor de n é que determina quanto a tabela é fina. Com um maior valor de n, teremos mais dados na tabela que será então mais perfeita. Dizemos que a granularidade da tabela é menor.
Observe ainda que isto não quer dizer que haja vários logaritmos decimais. Apenas quer dizer que podemos fazer tabelas mais precisas diminuindo a granularidade das mesmas, (ou equivalentemente, aumentando o índice da raiz calculada $r = \sqrt[n]{10}$).

Os logaritmos de base a são designados por $y = log_a(x)$ que se lê:

"y é o logaritmo base a de x."

Na tabela de logaritmos base <u>a</u> poderemos encontrar (se ela for suficientemente fina...)

x	$logx$
a	1.0
a^2	2.0
a^3	3.0
	$\ldots$
a^n	n

que justifica a denominação de "base a" para estes logaritmos. Já vimos que na tabela de logaritmos decimais temos

x	$log x$
10	1.0
100	2.0
1000	3.0
	......
10^n	n

Estamos em condições agora de descrever várias propriedades dos logaritmos. Vamos nos fixar nos logaritmos decimais, por enquanto, depois veremos que é fácil transferir as propriedades para qualquer outro logaritmo.

Relembrando, um logaritmo é uma função que associa os termos de uma progressão geométrica:

$$\frac{1}{10}, \ldots, 1, \ldots, 10, \ldots, 100, \ldots$$

com os termos de uma progressão aritmética

$$-1, \ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 2, \ldots$$

e agora no caso dos logaritmos decimais uma propriedade particular permite que que fiquemos apenas com um pedação desta associação:

$$1, \ldots, 10$$

com os termos de uma progressão aritmética

$$0, \ldots, 1$$

porque o restante podemos deduzir, (e perder precisão...), acrescentando uma unidade à parte inteira do logaritmo.

A coluna da progressão geométrica é obtida multiplicativamente, o "primeiro termo" é 1. Mas também podemos "andar" para traz indefinidamente, dividindo.

$$\ldots 0.01, \ldots, 0.1 \ldots 1.$$

Dividindo podemos obter núagu meros cada vez menores, nos aproximar indefinidamente de zero, mas nunca obter números negativos.

Mas quando estivermos abaixo de 1, na progressão geométrica, isto vai corresponder a números negativos na coluna da progressão aritmética:

$$\ldots -2, \ldots, -1, \ldots, 1$$

Vemos assim que o domínio se constitue de qualquer número positivo: $\mathbf{R}^+$ enquanto que o conjunto de valores pode ser qualquer número real, positivo ou negativo: $\mathbf{R}$. Quer dizer que

$$log_{10} : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$$

é o formato da definição do log_{10}.

$\boxed{\textbf{Teorema:}}$ **1** *Domínio e contra-domínio do Logaritmo decimal*
O domínio da função logaritmo decimal é o conjunto dos números reais positivos e o contra-domínio é o conjunto dos números reais.

Vamos analisar se existe uma inversa de $\log_{10}$. Os argumentos que estamos usando nos indicam que **sim**. Veja que a seguinte relação é falsa:

$$a \neq b \ e \ \log(a) = \log(b)$$

porque elementos diferentes na progressões geometrica correspondem a elementos diferentes na progressão aritmética. Nõa importa a *granularidade* escolhida.

Isto nos permite afirmar que podemos *inverter a seta* na definição de função.

Vejamos que função vamos ter ao invertermos a seta: Agora no conjunto de valores temos as potências de 10, as potências inteiras e aquelas intermediárias que a granularidade de nossa tabela permitir. Consulte a tabela (tab. 1.2.6), página 35 , na segunda folha, onde está, no começo $9.9999872 \approx 10$ é o 10, sem preconceitos.

Então você tem:

$$1 \mapsto 10 \equiv 10^1 = 10$$

na próxima célula da tabela você tem:

$$1.00625 \mapsto 10.144939 \equiv 10^{1.00625} = 10.144939$$

quer dizer que a inversa da função logaritmo decimal é função exponencial de base 10.

□

$\boxed{\textbf{Teorema:}}$ **2** *Inversa de* $\log_{10}$
A inversa da função $\log_{10}$ *é a função exponencial de base 10.*

Você vê assim a razão da denominação de base para caracterizar os logaritmos.

A função $x \mapsto log_{10}(x)$ é a função inversa de $x \mapsto 10^x$.

A função $x \mapsto log_2(x)$ é a função inversa de $x \mapsto 2^x$.

Quer dizer, se você quiser calcular

$$10^{\sqrt{2}}$$

você deve procurar na tabela de logaritmos um número próximo de $\sqrt{2}$ na coluna do *log*, quer dizer, na coluna dos expoentes, e depois olhar para o outro lado. Na tabela que temos você pode encontrar $1.4125 \approx$ logo

$$10^{\sqrt{2}} \approx 25.852301.$$

Como, para qualquer número positivo,

$$a^0 = 1$$

então,

$$log_a(1) = 0.$$

Teorema: **3** *Ponto fixo da família dos logaritmos O gráfico de qualquer logaritmo passa no ponto* $(1, 0)$.

Foi por esta razão que começamos sincronizando as tabelas de progressões aritméticas e geométricas usando o zero, no lado da progressão aritmética (logaritmo) e 1 no lado da progressão geométrica.

$$log_{10}(2^x) = xlog_{10}(2)$$

1.2.6 Troca de base do logaritmo

Prometemos que iriamos mostrar como poderiamos explicar qualquer logaritmo a partir do log_{10}.

Vamos ver uma forma simples de trocar a "base" do logaritmo. Para isto vamos considerar a tabela do log_{10}. Nela escolha um número qualquer $\underline{a}$ na coluna do $\underline{x}$, da progressão geométrica. Experimente agora e escolha $\underline{a}$.

Do outro lado você tem $log_{10}(a)$. Existe um número K pelo qual podemos multiplicar a coluna da progressão aritmética (essas coisas a gente faz com um computador, não é a mão...) de modo que

$$Klog_{10}(a) = 1.$$

Tudo que temos que fazer é resolver a equação acima:

$$K = \frac{1}{log_{10}(a)}$$

e como os termos da progressão aritmética representam $log_{10}(x)$ o que temos agora é:

$$Klog_{10}(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(a)}.$$

Em particular, ao lado de a aparece do outro lado, na coluna da progressão aritmética multiplicada por $K = \frac{1}{log_{10}(a)}$, aparece

$$\frac{log_{10}(a)}{log_{10}(a)} = 1.$$

x	$Klog_{10}x$
a	1.0

logo, como já definimos isto antes, esta nova tabela é a tabela do $log_a(x)$.

Quer dizer que multiplicamos: $Klog_{10}(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(a)}$ para obtermos $log_a(x)$. Isto nos dá a fórmula:

Teorema: **4** *Troca de base*

$$log_a(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(a)}.$$

Exercícios: 2 *Propriedades dos logaritmos*

1. *variação dos logaritmos*
2. *Fa*
3.

1.3 Funções exponenciais

Ao estudar os logaritmos vimos que haviam duas progressões *sincronizadas*:

$$1 = r^0, r, r^2, \dots, r^n = a$$
$$0, d, 2d, \dots, nd = 1$$

Mas há uma pergunta que nós não respondemos claramente, "*quem é o logaritmo?* ".

Vamos começa por fixar alguns nomes que ficaram zanzando no texto enquanto nos ocupavamos do principal que era a construção. Agora vamos fixar tudo isto aqui:

- base;
- logaritmo;
- função logaritmo.

Se olharmos atentamente para a progressão geométrica vamos ver que lá está presente também a progressão aritmética: a sucessão dos expoentes.

A progressão aritmética é a sucessão dos expoentes da progressão geométrica. Eles é que se encontram na coluna marcada com o cabeçalho "log(x)" nas tabelas que já construimos.

Então o *logaritmo* é o expoente.

Um outro olhar para uma tabela, quando o logaritmo não for anônimo, lembre-se, chamamos de anônimos os logaritmos em cuja tabela não aparecia a linha:

x	log(x)
a	1

Observação: 4 *Lembrete: logaritmos anônimos*
Os logaritmos anônimos são construidos apenas sincronizando as duas progressões artiméticas e geométricas

- *0, inicialmente, para a aritmética e*
- *1, inicialmente, para a geométrica e*
- *escolhendo as duas razões mais ou menos em forma arbitrária...*

Mas se o logaritmo não for anônimo, então nos preocupamos de escolher um número $\underline{a > 0}$, na progressão geométrica, para sincronizar com $\underline{1}$ na progressão aritmética, e calculamos $r = \sqrt[n]{a}$ para construir uma progressão geométrica mais fina. Neste caso "tem que"aparecer a linha

x	log(x)
a	1

na tabela, (nem que seja aproximadamente, como foi o caso da primeira que construimos em que apareceu 1.99996208783624992043 em lugar de 2.

Este número $\underline{a}$ assim escolhido é a *base* do logaritmo e, na verdade, na tabela existem agora duas progressões geométricas:

$$1 = r^0, r, r^2, \ldots, r^n = a, r^{n+1}, ...$$
$$1 = a^0, a, a^2, \ldots$$

a segunda progressão se encontra sincronizada com os números inteiros positivos, é formada das potências da base.

A segunda equação acima nos permite escrever uma equação que é fundamental:

$$a^{log(x)} = x. \tag{1.11}$$

Entre os muitos preconceitos que envolvem o ensino de Matemática, um deles é o preconceito de que toda função tem uma equação.

Observação: 5 *Preconceito: toda função tem uma equação*
O logaritmo é um exemplo de função sem equação.
*N ao podemos escrever nenhuma expressão "algébrica"ou "formal", uma "*fórmula*", para calcular logaritmos.*
A função logaritmo se apresenta **exclusivamente** *sob a forma de uma tabela.*
Certos programas de computador aceitam que você escreva "log(a)"e lhe dão uma resposta. Isto quer dizer que o tal programa memorizou uma tabela de logaritmos.
Mais a frente foi você vai ver que isto é falso, que existem expressões formais para o logaritmo, entretanto, não são expressões simples, algum polinômio ou operações com polinômios.
Há outras funções, como seno, coseno *que não tem uma expressão simples, uma fórmula.*
A função logaritmo, existe, entretanto, e nós escrevemos

$$y = log(x)$$

*como se isto fosse uma fórmula, e faremos contas com esta expressão, tranquilamente, como se tudo fosse algébrico... um "faz-de-contas"que é muito importante em Matemática, uma convenção. A Matemática é uma "*ciência humana*"no sentido de que apenas o ser humano a entende. Computadores não conseguem entender Matemática.*

A equação
$$a^{log(x)} = x. \tag{1.12}$$
envolve duas funções . Uma outra forma de escrevê-la é:

$$f(g(x)) = f(log(x)) = a^{log(x)} = x; \ ; \tag{1.13}$$
$$f(y) = a^y \ ; \ g(x) = log(x) \ ; \tag{1.14}$$

A equação (eq. 1.14), página 27, faz aparecer uma nova função no pedaço: uma "*função exponencial*".

Usamos o *artigo indefinido* "uma", e não foi atôa. Há várias funções exponenciais. Cada vez que escolhermos um número $\underline{a}$ para construir uma função logaritmo “não anônima”temos tambem uma correspondente função exponencial $\underline{f(x) = a^x}$.

Na expressão

$$a^x$$

o número $\underline{a}$ se chama ”base”e o número $\underline{x}$ se chama ”expoente”. Em alguns casos nós sabemos calcular a^x :

$$\boxed{3^2 = 9\ ;\ 2^3 = 8\ ;\ 2^{1/3} \equiv \sqrt[3]{2}\ ;\ 5^\pi = ?}$$

Da mesma forma como $log(x)$ não tem uma equação, também a exponencial a^x não tem uma expressão formal com qual possamos calcular, senão em alguns casos raros.

Se o exponente for inteiro nós sabemos calcular.

Em alguns outros casos sabemos o que significa, como é o caso de $2^{1/3}$ que idenficamos com $\sqrt[3]{2}$ que não passa de uma outra forma de escrever...

De formas que a exponencial também é uma função que conhecemos apenas através de tabelas.

> A tabela da exponencial é a tabela do logaritmo virada ao contrário.

Quer dizer, se conhecemos o logaritmo

$$y = g(x) = log_a(x)$$

conhecemos também a exponencial

$$y = f(x) = a^x$$

que é a função inversa de $log_a(x)$.

É esta a mensagem principal da equação (eq. , 1.14), página 27:

$$f(g(x)) = f(log(x)) = a^{log(x)} = x;\ ;$$
$$f(y) = a^y\ ;\ g(x) = log(x)\ .$$

1.4 Propriedades do logaritmo e da exponencial

> De tudo que já discutimos sobre logaritmos e exponenciais ficou certamente zanzando uma idéa que precisa ser corrigida. Existe uma multidão de logaritmos (e consequentemente de exponenciais) e estas funções nada tem o que ver umas com as outras.
> Isto está errado!

A primeira coisa que vamos corrigir é história de *logaritmo anônimo.* Não existem logaritmos anônimos, todo logaritmo tem uma base, o que pode ocorrer é que a base não representa nada para nós como os números inteiros.

Dependendo da escolha da razão $\underline{d}$ para a progressão aritmética, o número 1 pode não pertencer a imagem, mas pode haver um número arbitrariamente próximo da imagem para uma tabela mais fina do mesmo logaritmo e é isto que conta.

As progressões aritméticas são sempre crescentes ou decrescentes, a não ser que a razão seja nula e estas não nos servem. As progressões geométricas são:

- <u>crescentes</u> se o primeiro termo for positivo e a razão maior do que 1;
- <u>descrescentes</u> se o primeiro termo for positivo e a razão menor do que 1.

Hipótese: 2 *Progressões crescentes*

Por enquanto, para simplificar a teoria, vamos trabalhar exclusivamente com progressões aritméticas e geométricas crescentes, depois veremos de maneira simples como se podem descrever todos os casos a partir destes.

Então, por hipótese, $a > 1$.

Uma consequência desta hipótese é que os logaritmos são funções crescentes, porque a imagem cresce junto com os elementos do domínio. E o domínio é crescente por que assumimos a hipótese de a razão da progressão geométrica é maior do que 1, logo a *base* é maior do que 1. Vamos resumir este resultado no teorema:

Teorema: 5 *Logaritmos crescentes*

Se a base $\underline{a}$ for maior do que 1 então $log_a(x)$ é uma função crescente.

Com a hipótese (hip. 2), podemos sintetizar o que temos no seguinte quadro:

> - Todos os logaritmos passam no ponto $(1, 0)$;
> - $y = log_a(x)$ passa no ponto $(a, 1)$;
> - $y = log_b(x)$ passa no ponto $(b, 1)$;

Como, por hipótese, (hip. 2), então, para todo $x \neq 1 \ \Rightarrow\ log(x) \neq 0$ para qualquer que seja a base. Isto nos permite escrever, considerando duas bases quaisquer:

$$log_b(x) = K log_a(x)$$

Se dermos um valor qualquer para x vemos que K é uma constante:

$$K = \frac{log_b(b)}{log_a(b)} = \frac{1}{log_a(b)}.$$

Quer dizer que, qualquer que seja o logaritmo, ele pode ser escrito como um múltiplo de outro. Por exemplo, todo logaritmo é múltiplo do logaritmo decimal:

Teorema: **6** *Unicidade do logaritmo*
Dado uma base $b > 1$ qualquer,

$$log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)} \tag{1.15}$$

em particular, $log_b(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(b)}$.

Esta fórmula já nos permite uma generalização das restrições pela hipótese (hip. 2). Podemos falar agora de base menor do que 1, (ainda sempre positiva).

Se $0 < b < 1$ então

$$log_b(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(b)}$$

e temos no segundo membro o logaritmo $log_{10}(b)$ em que $b < 1$.

Quanto vale $log_a(b)$ se $b < 1$?

Até agora sempre insistimos nas construções de logaritmos com progressões aritméticas se originando com o número 0. Mas nada nos impede em continuar a tabela de logaritmos para trás do zero continuando com a outra coluna para aquém de 1:

- na coluna do log vamos subtraindo indefinidamente razão `positiva` d, obtendo agora números negativos;
- na coluna do x vamos dividindo indefinidamente pela razão $r > 1$ obtendo números positivos cada vez menores.

Isto nos mostra que o domínio da função *log* é o conjunto de todos os números positivos e a imagem é o conjunto de todos os números reais. Se a base $\underline{a}$ for maior do que 1 como até agora estamos mantendo, ver hipótese (hip. 2), então

$$b < a \ \Rightarrow \ log_a(b) < 0.$$

Nós temos um simbolismo para caracterizar isto:

$$a > 1 - \infty < log_a(x) < \infty.$$

Dissemos um "simbolismo" porque ∞ não é um número, e o que está escrito acima apenas diz que $log_a(x)$ descresce indefinidamente, quando x decrescer

para 0 e cresce indefinidamente, quando x crescer indefinidamente. Esquematicamente temos a variação do logaritmo, quando a base $\underline{a}$ for maior do que 1:

Variação do logaritmo; base $\underline{a}$ maior do que 1

x	0	1	∞
$log_a(x)$	$-\infty$	0	∞

Retomando a fórmula (eq. 1.15), página 30, temos:

$$b < 1 \ \Rightarrow \ log_b(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(b)}$$

e como $b < 1 \ \Rightarrow \ log_{10}(b) < 0$ então $log_b(x), log_{10}(x)$ têm sinais diferentes, onde um for positivo, o outro será negativo. Isto produz a seguinte tabela de variação para os logaritmos quando a base for menor do que 1:

Variação do logaritmo; base $\underline{a}$ menor do que 1

x	0	1	∞
$log_a(x)$	∞	0	$-\infty$

Isto nos permitiria fazer um esboço gráfico da curva do logaritmo (vamos fazer diversos esboços gráficos cada vez melhores, a medida que as informações forem ficando mais precisas):

A figura (fig. 1.1), página 32 representa algumas idéias que já discutimos:

Justificativas para o desenho:

- A imagem do logaritmo é uma progressão aritmética, cresce portanto, mas no domínio está uma progressão geométrica, de base maior do que 1, que cresce muito mais rápido, logo a curva cresce cada vez menos do que uma reta.
- No intervalo $(0, 1)$ a progressão aritmética descresce indefinidamente e o domínio é o intervalo $(0, 1)$ logo o gráfico tem que se aproximar do eixo OY assintoticamente.

Podemos melhorar o gráfico indicando alguns pontos conhecidos. Vamos para isto fazer o gráfico de $y = log_2(x)$.

Sabemos $y = log_2(x)$ assume valores inteiros nas potência inteiras de 2:

$$(\frac{1}{2}, -1), (1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3), \ldots$$

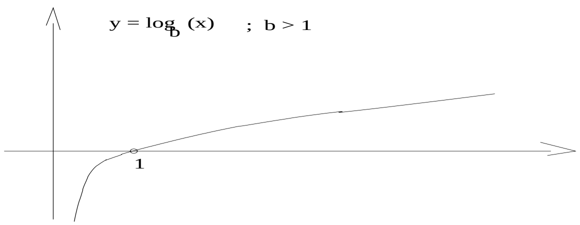

Figura 1.1: Primeira versão do gráfico do logaritmo - base maior do que 1

A figura (fig. 1.2), página 39 com os pontos acima marcados em destaque. Conhecemos os valores de $y = log_2(x)$ em todas as potências inteiras de dois. Nestes pontos o valor é um inteiro.

Como qualquer outro logaritmo é um múltiplo de $y = log_2(x)$, toda curva logarítmica vai ser semelhante a esta, do log_2.

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0	1.0004939	0.00041	1.0009880	0.00081	1.0014824	0.00121
1.0000123	1e-05	1.0005062	0.00042	1.0010004	0.00082	1.0014948	0.00122
1.0000246	2e-05	1.0005186	0.00043	1.0010127	0.00083	1.0015072	0.00123
1.0000370	3e-05	1.0005309	0.00044	1.0010251	0.00084	1.0015195	0.00124
1.0000493	4e-05	1.0005433	0.00045	1.0010375	0.00085	1.0015319	0.00125
1.0000617	5e-05	1.0005556	0.00046	1.0010498	0.00086	1.0015443	0.00126
1.0000740	6e-05	1.0005680	0.00047	1.0010622	0.00087	1.0015566	0.00127
1.0000864	7e-05	1.0005803	0.00048	1.0010745	0.00088	1.0015690	0.00128
1.0000987	8e-05	1.0005927	0.00049	1.0010869	0.00089	1.0015813	0.00129
1.0001111	9e-05	1.0006050	0.0005	1.0010993	0.0009	1.0015937	0.0013
1.0001234	0.0001	1.0006174	0.00051	1.0011116	0.00091	1.0016061	0.00131
1.0001358	0.00011	1.0006297	0.00052	1.0011240	0.00092	1.0016184	0.00132
1.0001481	0.00012	1.0006421	0.00053	1.0011363	0.00093	1.0016308	0.00133
1.0001604	0.00013	1.0006544	0.00054	1.0011487	0.00094	1.0016432	0.00134
1.0001728	0.00014	1.0006668	0.00055	1.0011610	0.00095	1.0016555	0.00135
1.0001851	0.00015	1.0006792	0.00056	1.0011734	0.00096	1.0016679	0.00136
1.0001975	0.00016	1.0006915	0.00057	1.0011858	0.00097	1.0016803	0.00137
1.0002098	0.00017	1.0007039	0.00058	1.0011981	0.00098	1.0016926	0.00138
1.0002222	0.00018	1.0007162	0.00059	1.0012105	0.00099	1.0017050	0.00139
1.0002345	0.00019	1.0007286	0.0006	1.0012228	0.001	1.0017174	0.0014
1.0002469	0.0002	1.0007409	0.00061	1.0012352	0.00101	1.0017297	0.00141
1.0002592	0.00021	1.0007533	0.00062	1.0012476	0.00102	1.0017421	0.00142
1.0002716	0.00022	1.0007656	0.00063	1.0012599	0.00103	1.0017545	0.00143
1.0002839	0.00023	1.0007780	0.00064	1.0012723	0.00104	1.0017668	0.00144
1.0002963	0.00024	1.0007903	0.00065	1.0012846	0.00105	1.0017792	0.00145
1.0003086	0.00025	1.0008027	0.00066	1.0012970	0.00106	1.0017916	0.00146
1.0003210	0.00026	1.0008150	0.00067	1.0013094	0.00107	1.0018039	0.00147
1.0003333	0.00027	1.0008274	0.00068	1.0013217	0.00108	1.0018163	0.00148
1.0003457	0.00028	1.0008398	0.00069	1.0013341	0.00109	1.0018287	0.00149
1.0003580	0.00029	1.0008521	0.0007	1.0013465	0.0011	1.0018410	0.0015
1.0003704	0.0003	1.0008645	0.00071	1.0013588	0.00111	1.0018534	0.00151
1.0003827	0.00031	1.0008768	0.00072	1.0013712	0.00112	1.0018658	0.00152
1.0003951	0.00032	1.0008892	0.00073	1.0013835	0.00113	1.0018781	0.00153
1.0004074	0.00033	1.0009015	0.00074	1.0013959	0.00114	1.0018905	0.00154
1.0004198	0.00034	1.0009139	0.00075	1.0014083	0.00115	1.0019029	0.00155
1.0004321	0.00035	1.0009262	0.00076	1.0014206	0.00116	1.0019152	0.00156
1.0004445	0.00036	1.0009386	0.00077	1.0014330	0.00117	1.0019276	0.00157
1.0004568	0.00037	1.0009510	0.00078	1.0014453	0.00118	1.0019400	0.00158
1.0004692	0.00038	1.0009633	0.00079	1.0014577	0.00119	1.0019524	0.00159
1.0004815	0.00039	1.0009757	0.0008	1.0014701	0.0012	1.0019647	0.0016

Tabela 1.1: Logaritmos anônimos

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1.0005062	0.00041	1.0010004	0.00082	1.0014948	0.00122	1.0019895	0.00162
1.0005186	0.00042	1.0010127	0.00083	1.0015072	0.00123	1.0020018	0.00163
1.0005309	0.00043	1.0010251	0.00084	1.0015195	0.00124	1.0020142	0.00164
1.0005433	0.00044	1.0010375	0.00085	1.0015319	0.00125	1.0020266	0.00165
1.0005556	0.00045	1.0010498	0.00086	1.0015443	0.00126	1.0020389	0.00166
1.0005680	0.00046	1.0010622	0.00087	1.0015566	0.00127	1.0020513	0.00167
1.0005803	0.00047	1.0010745	0.00088	1.0015690	0.00128	1.0020637	0.00168
1.0005927	0.00048	1.0010869	0.00089	1.0015813	0.00129	1.0020760	0.00169
1.0006050	0.00049	1.0010993	0.0009	1.0015937	0.0013	1.0020884	0.0017
1.0006174	0.0005	1.0011116	0.00091	1.0016061	0.00131	1.0021008	0.00171
1.0006297	0.00051	1.0011240	0.00092	1.0016184	0.00132	1.0021132	0.00172
1.0006421	0.00052	1.0011363	0.00093	1.0016308	0.00133	1.0021255	0.00173
1.0006544	0.00053	1.0011487	0.00094	1.0016432	0.00134	1.0021379	0.00174
1.0006668	0.00054	1.0011610	0.00095	1.0016555	0.00135	1.0021503	0.00175
1.0006792	0.00055	1.0011734	0.00096	1.0016679	0.00136	1.0021626	0.00176
1.0006915	0.00056	1.0011858	0.00097	1.0016803	0.00137	1.0021750	0.00177
1.0007039	0.00057	1.0011981	0.00098	1.0016926	0.00138	1.0021874	0.00178
1.0007162	0.00058	1.0012105	0.00099	1.0017050	0.00139	1.0021998	0.00179
1.0007286	0.00059	1.0012228	0.001	1.0017174	0.0014	1.0022121	0.0018
1.0007409	0.0006	1.0012352	0.00101	1.0017297	0.00141	1.0022245	0.00181
1.0007533	0.00061	1.0012476	0.00102	1.0017421	0.00142	1.0022369	0.00182
1.0007656	0.00062	1.0012599	0.00103	1.0017545	0.00143	1.0022493	0.00183
1.0007780	0.00063	1.0012723	0.00104	1.0017668	0.00144	1.0022616	0.00184
1.0007903	0.00064	1.0012846	0.00105	1.0017792	0.00145	1.0022740	0.00185
1.0008027	0.00065	1.0012970	0.00106	1.0017916	0.00146	1.0022864	0.00186
1.0008150	0.00066	1.0013094	0.00107	1.0018039	0.00147	1.0022987	0.00187
1.0008274	0.00067	1.0013217	0.00108	1.0018163	0.00148	1.0023111	0.00188
1.0008398	0.00068	1.0013341	0.00109	1.0018287	0.00149	1.0023235	0.00189
1.0008521	0.00069	1.0013465	0.0011	1.0018410	0.0015	1.0023359	0.0019
1.0008645	0.0007	1.0013588	0.00111	1.0018534	0.00151	1.0023482	0.00191
1.0008768	0.00071	1.0013712	0.00112	1.0018658	0.00152	1.0023606	0.00192
1.0008892	0.00072	1.0013835	0.00113	1.0018781	0.00153	1.0023730	0.00193
1.0009015	0.00073	1.0013959	0.00114	1.0018905	0.00154	1.0023854	0.00194
1.0009139	0.00074	1.0014083	0.00115	1.0019029	0.00155	1.0023977	0.00195
1.0009262	0.00075	1.0014206	0.00116	1.0019152	0.00156	1.0024101	0.00196
1.0009386	0.00076	1.0014330	0.00117	1.0019276	0.00157	1.0024225	0.00197
1.0009510	0.00077	1.0014453	0.00118	1.0019400	0.00158	1.0024349	0.00198
1.0009633	0.00078	1.0014577	0.00119	1.0019524	0.00159	1.0024472	0.00199
1.0009757	0.00079	1.0014701	0.0012	1.0019647	0.0016	1.0024596	0.002
1.0009880	0.0008	1.0014824	0.00121	1.0019771	0.00161	1.0024720	0.00201

Tabela 1.2: Logaritmos anônimos - continuação

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0	1.7782788	0.25	3.1622756	0.5	5.6234078	0.75
1.0144952	0.00625	1.8040553	0.25625	3.2081134	0.50625	5.7049203	0.75625
1.0292005	0.0125	1.8302054	0.2625	3.2546157	0.5125	5.7876142	0.7625
1.0441189	0.01875	1.8567346	0.26875	3.3017920	0.51875	5.8715068	0.76875
1.0592536	0.025	1.8836484	0.275	3.3496521	0.525	5.9566155	0.775
1.0746077	0.03125	1.9109522	0.28125	3.3982060	0.53125	6.0429578	0.78125
1.0901844	0.0375	1.9386519	0.2875	3.4474637	0.5375	6.1305517	0.7875
1.1059868	0.04375	1.9667530	0.29375	3.4974353	0.54375	6.2194153	0.79375
1.1220183	0.05	1.9952615	0.3	3.5481314	0.55	6.3095670	0.8
1.1382822	0.05625	2.0241832	0.30625	3.5995622	0.55625	6.4010254	0.80625
1.1547818	0.0625	2.0535242	0.3125	3.6517386	0.5625	6.4938096	0.8125
1.1715206	0.06875	2.0832904	0.31875	3.7046713	0.56875	6.5879386	0.81875
1.1885021	0.075	2.1134881	0.325	3.7583712	0.575	6.6834321	0.825
1.2057296	0.08125	2.1441235	0.33125	3.8128496	0.58125	6.7803098	0.83125
1.2232069	0.0875	2.1752030	0.3375	3.8681176	0.5875	6.8785917	0.8375
1.2409376	0.09375	2.2067331	0.34375	3.9241867	0.59375	6.9782983	0.84375
1.2589252	0.1	2.2387201	0.35	3.9810686	0.6	7.0794501	0.85
1.2771736	0.10625	2.2711708	0.35625	4.0387750	0.60625	7.1820682	0.85625
1.2956865	0.1125	2.3040919	0.3625	4.0973179	0.6125	7.2861737	0.8625
1.3144677	0.11875	2.3374901	0.36875	4.1567093	0.61875	7.3917882	0.86875
1.3335212	0.125	2.3713725	0.375	4.2169616	0.625	7.4989337	0.875
1.3528508	0.13125	2.4057460	0.38125	4.2780873	0.63125	7.6076322	0.88125
1.3724607	0.1375	2.4406178	0.3875	4.3400991	0.6375	7.7179064	0.8875
1.3923548	0.14375	2.4759951	0.39375	4.4030097	0.64375	7.8297790	0.89375
1.4125372	0.15	2.5118851	0.4	4.4668322	0.65	7.9432732	0.9
1.4330122	0.15625	2.5482954	0.40625	4.5315798	0.65625	8.0584125	0.90625
1.4537840	0.1625	2.5852334	0.4125	4.5972660	0.6625	8.1752208	0.9125
1.4748569	0.16875	2.6227069	0.41875	4.6639042	0.66875	8.2937223	0.91875
1.4962353	0.175	2.6607236	0.425	4.7315085	0.675	8.4139415	0.925
1.5179235	0.18125	2.6992913	0.43125	4.8000926	0.68125	8.5359032	0.93125
1.5399261	0.1875	2.7384181	0.4375	4.8696709	0.6875	8.6596329	0.9375
1.5622476	0.19375	2.7781120	0.44375	4.9402578	0.69375	8.7851560	0.94375
1.5848927	0.2	2.8183813	0.45	5.0118678	0.7	8.9124986	0.95
1.6078661	0.20625	2.8592343	0.45625	5.0845158	0.70625	9.0416870	0.95625
1.6311724	0.2125	2.9006794	0.4625	5.1582169	0.7125	9.1727481	0.9625
1.6548166	0.21875	2.9427254	0.46875	5.2329863	0.71875	9.3057089	0.96875
1.6788035	0.225	2.9853808	0.475	5.3088395	0.725	9.4405970	0.975
1.7031381	0.23125	3.0286545	0.48125	5.3857922	0.73125	9.5774403	0.98125
1.7278254	0.2375	3.0725554	0.4875	5.4638603	0.7375	9.7162673	0.9875
1.7528706	0.24375	3.1170927	0.49375	5.5430601	0.74375	9.8571065	0.99375

Tabela 1.3: Logaritmos decimais

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
9.9999872	1.0	17.782765	1.25	31.622716	1.5	56.234007	1.75
10.144939	1.00625	18.040530	1.25625	32.081093	1.50625	57.049130	1.75625
10.291992	1.0125	18.302031	1.2625	32.546115	1.5125	57.876069	1.7625
10.441176	1.01875	18.567323	1.26875	33.017878	1.51875	58.714994	1.76875
10.592523	1.025	18.836460	1.275	33.496478	1.525	59.566079	1.775
10.746064	1.03125	19.109498	1.28125	33.982017	1.53125	60.429502	1.78125
10.901830	1.0375	19.386494	1.2875	34.474593	1.5375	61.305439	1.7875
11.059854	1.04375	19.667505	1.29375	34.974309	1.54375	62.194074	1.79375
11.220169	1.05	19.952590	1.3	35.481268	1.55	63.095589	1.8
11.382808	1.05625	20.241806	1.30625	35.995577	1.55625	64.010173	1.80625
11.547804	1.0625	20.535215	1.3125	36.517340	1.5625	64.938013	1.8125
11.715191	1.06875	20.832878	1.31875	37.046666	1.56875	65.879302	1.81875
11.885006	1.075	21.134854	1.325	37.583665	1.575	66.834236	1.825
12.057281	1.08125	21.441208	1.33125	38.128447	1.58125	67.803012	1.83125
12.232054	1.0875	21.752003	1.3375	38.681127	1.5875	68.785830	1.8375
12.409360	1.09375	22.067302	1.34375	39.241817	1.59375	69.782894	1.84375
12.589236	1.1	22.387172	1.35	39.810635	1.6	70.794411	1.85
12.771719	1.10625	22.711679	1.35625	40.387699	1.60625	71.820590	1.85625
12.956848	1.1125	23.040889	1.3625	40.973126	1.6125	72.861644	1.8625
13.144660	1.11875	23.374872	1.36875	41.567040	1.61875	73.917788	1.86875
13.335195	1.125	23.713695	1.375	42.169563	1.625	74.989242	1.875
13.528491	1.13125	24.057430	1.38125	42.780819	1.63125	76.076226	1.88125
13.724589	1.1375	24.406147	1.3875	43.400935	1.6375	77.178966	1.8875
13.923530	1.14375	24.759919	1.39375	44.030041	1.64375	78.297690	1.89375
14.125354	1.15	25.118819	1.4	44.668265	1.65	79.432631	1.9
14.330104	1.15625	25.482921	1.40625	45.315740	1.65625	80.584023	1.90625
14.537822	1.1625	25.852301	1.4125	45.972601	1.6625	81.752104	1.9125
14.748550	1.16875	26.227036	1.41875	46.638983	1.66875	82.937117	1.91875
14.962334	1.175	26.607202	1.425	47.315025	1.675	84.139308	1.925
15.179216	1.18125	26.992879	1.43125	48.000865	1.68125	85.358924	1.93125
15.399241	1.1875	27.384146	1.4375	48.696647	1.6875	86.596218	1.9375
15.622457	1.19375	27.781084	1.44375	49.402515	1.69375	87.851448	1.94375
15.848907	1.2	28.183777	1.45	50.118614	1.7	89.124872	1.95
16.078640	1.20625	28.592306	1.45625	50.845094	1.70625	90.416755	1.95625
16.311703	1.2125	29.006758	1.4625	51.582104	1.7125	91.727364	1.9625
16.548145	1.21875	29.427216	1.46875	52.329797	1.71875	93.056970	1.96875
16.788014	1.225	29.853770	1.475	53.088327	1.725	94.405850	1.975
17.031359	1.23125	30.286506	1.48125	53.857853	1.73125	95.774282	1.98125
17.278232	1.2375	30.725515	1.4875	54.638534	1.7375	97.162549	1.9875
17.528684	1.24375	31.170887	1.49375	55.430530	1.74375	98.570940	1.99375

Tabela 1.4: Logaritmos decimais - continuação

Tabela 1.5: Tabela de logaritmos falsos

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0.1	1.2996305	0.225	1.6890395	0.35	2.1951273	0.475
1.0065735	0.103125	1.3081736	0.228125	1.7001424	0.353125	2.2095570	0.478125
1.0131902	0.10625	1.3167729	0.23125	1.7113183	0.35625	2.2240816	0.48125
1.0198504	0.109375	1.3254287	0.234375	1.7225677	0.359375	2.2387016	0.484375
1.0265544	0.1125	1.3341415	0.2375	1.7338910	0.3625	2.2534177	0.4875
1.0333025	0.115625	1.3429115	0.240625	1.7452888	0.365625	2.2682306	0.490625
1.0400949	0.11875	1.3517391	0.24375	1.7567615	0.36875	2.2831409	0.49375
1.0469320	0.121875	1.3606248	0.246875	1.7683095	0.371875	2.2981491	0.496875
1.0538140	0.125	1.3695689	0.25	1.7799336	0.375	2.3132560	0.5
1.0607413	0.128125	1.3785717	0.253125	1.7916340	0.378125	2.3284622	0.503125
1.0677140	0.13125	1.3876338	0.25625	1.8034113	0.38125	2.3437684	0.50625
1.0747327	0.134375	1.3967554	0.259375	1.8152660	0.384375	2.3591752	0.509375
1.0817974	0.1375	1.4059370	0.2625	1.8271987	0.3875	2.3746833	0.5125
1.0889087	0.140625	1.4151790	0.265625	1.8392098	0.390625	2.3902933	0.515625
1.0960666	0.14375	1.4244817	0.26875	1.8512999	0.39375	2.4060059	0.51875
1.1032716	0.146875	1.4338455	0.271875	1.8634694	0.396875	2.4218218	0.521875
1.1105240	0.15	1.4432709	0.275	1.8757190	0.4	2.4377417	0.525
1.1178240	0.153125	1.4527583	0.278125	1.8880490	0.403125	2.4537662	0.528125
1.1251721	0.15625	1.4623080	0.28125	1.9004602	0.40625	2.4698961	0.53125
1.1325684	0.159375	1.4719205	0.284375	1.9129528	0.409375	2.4861320	0.534375
1.1400133	0.1625	1.4815962	0.2875	1.9255277	0.4125	2.5024746	0.5375
1.1475072	0.165625	1.4913355	0.290625	1.9381851	0.415625	2.5189246	0.540625
1.1550504	0.16875	1.5011388	0.29375	1.9509258	0.41875	2.5354828	0.54375
1.1626431	0.171875	1.5110065	0.296875	1.9637503	0.421875	2.5521498	0.546875
1.1702858	0.175	1.5209392	0.3	1.9766590	0.425	2.5689264	0.55
1.1779787	0.178125	1.5309371	0.303125	1.9896526	0.428125	2.5858133	0.553125
1.1857221	0.18125	1.5410007	0.30625	2.0027316	0.43125	2.6028112	0.55625
1.1935165	0.184375	1.5511305	0.309375	2.0158966	0.434375	2.6199208	0.559375
1.2013621	0.1875	1.5613269	0.3125	2.0291481	0.4375	2.6371429	0.5625
1.2092592	0.190625	1.5715903	0.315625	2.0424867	0.440625	2.6544782	0.565625
1.2172083	0.19375	1.5819211	0.31875	2.0559130	0.44375	2.6719274	0.56875
1.2252097	0.196875	1.5923199	0.321875	2.0694276	0.446875	2.6894913	0.571875
1.2332636	0.2	1.6027870	0.325	2.0830310	0.45	2.7071708	0.575
1.2413705	0.203125	1.6133230	0.328125	2.0967238	0.453125	2.7249664	0.578125
1.2495306	0.20625	1.6239282	0.33125	2.1105067	0.45625	2.7428790	0.58125
1.2577444	0.209375	1.6346031	0.334375	2.1243801	0.459375	2.7609093	0.584375
1.2660122	0.2125	1.6453482	0.3375	2.1383448	0.4625	2.7790582	0.5875
1.2743344	0.215625	1.6561639	0.340625	2.1524012	0.465625	2.7973264	0.590625
1.2827112	0.21875	1.6670507	0.34375	2.1665500	0.46875	2.8157146	0.59375
1.2911431	0.221875	1.6780091	0.346875	2.1807919	0.471875	2.8342238	0.596875

Tabela 1.6: Tabela de logaritmos falsos - continuação

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
2.8528546	0.6	3.7076569	0.725	4.8185842	0.85	6.2623792	0.975
2.8716078	0.603125	3.7320293	0.728125	4.8502592	0.853125	6.3035451	0.978125
2.8904844	0.60625	3.7565618	0.73125	4.8821425	0.85625	6.3449815	0.98125
2.9094850	0.609375	3.7812556	0.734375	4.9142353	0.859375	6.3866903	0.984375
2.9286106	0.6125	3.8061117	0.7375	4.9465391	0.8625	6.4286733	0.9875
2.9478618	0.615625	3.8311313	0.740625	4.9790552	0.865625	6.4709323	0.990625
2.9672396	0.61875	3.8563152	0.74375	5.0117851	0.86875	6.5134690	0.99375
2.9867448	0.621875	3.8816648	0.746875	5.0447301	0.871875	6.5562854	0.996875
3.0063782	0.625	3.9071810	0.75	5.0778917	0.875	6.5993832	1.0
3.0261407	0.628125	3.9328649	0.753125	5.1112713	0.878125	6.6427643	1.003125
3.0460330	0.63125	3.9587176	0.75625	5.1448703	0.88125	6.6864306	1.00625
3.0660562	0.634375	3.9847403	0.759375	5.1786902	0.884375	6.7303840	1.009375
3.0862109	0.6375	4.0109340	0.7625	5.2127324	0.8875	6.7746262	1.0125
3.1064982	0.640625	4.0372999	0.765625	5.2469983	0.890625	6.8191593	1.015625
3.1269188	0.64375	4.0638392	0.76875	5.2814895	0.89375	6.8639851	1.01875
3.1474736	0.646875	4.0905529	0.771875	5.3162075	0.896875	6.9091056	1.021875
3.1681636	0.65	4.1174422	0.775	5.3511536	0.9	6.9545227	1.025
3.1889895	0.653125	4.1445082	0.778125	5.3863295	0.903125	7.0002383	1.028125
3.2099524	0.65625	4.1717522	0.78125	5.4217366	0.90625	7.0462545	1.03125
3.2310531	0.659375	4.1991753	0.784375	5.4573764	0.909375	7.0925731	1.034375
3.2522924	0.6625	4.2267786	0.7875	5.4932506	0.9125	7.1391962	1.0375
3.2736714	0.665625	4.2545634	0.790625	5.5293605	0.915625	7.1861258	1.040625
3.2951909	0.66875	4.2825308	0.79375	5.5657078	0.91875	7.2333639	1.04375
3.3168519	0.671875	4.3106821	0.796875	5.6022941	0.921875	7.2809125	1.046875
3.3386553	0.675	4.3390184	0.8	5.6391208	0.925	7.3287737	1.05
3.3606020	0.678125	4.3675410	0.803125	5.6761897	0.928125	7.3769495	1.053125
3.3826929	0.68125	4.3962511	0.80625	5.7135022	0.93125	7.4254419	1.05625
3.4049291	0.684375	4.4251499	0.809375	5.7510599	0.934375	7.4742532	1.059375
3.4273114	0.6875	4.4542386	0.8125	5.7888646	0.9375	7.5233853	1.0625
3.4498409	0.690625	4.4835186	0.815625	5.8269178	0.940625	7.5728403	1.065625
3.4725185	0.69375	4.5129911	0.81875	5.8652211	0.94375	7.6226205	1.06875
3.4953451	0.696875	4.5426573	0.821875	5.9037762	0.946875	7.6727279	1.071875
3.5183218	0.7	4.5725185	0.825	5.9425847	0.95	7.7231646	1.075
3.5414495	0.703125	4.6025760	0.828125	5.9816484	0.953125	7.7739330	1.078125
3.5647293	0.70625	4.6328311	0.83125	6.0209688	0.95625	7.8250350	1.08125
3.5881621	0.709375	4.6632851	0.834375	6.0605477	0.959375	7.8764730	1.084375
3.6117489	0.7125	4.6939392	0.8375	6.1003868	0.9625	7.9282491	1.0875
3.6354908	0.715625	4.7247949	0.840625	6.1404878	0.965625	7.9803655	1.090625
3.6593887	0.71875	4.7558534	0.84375	6.1808524	0.96875	8.0328245	1.09375
3.6834438	0.721875	4.7871161	0.846875	6.2214823	0.971875	8.0856284	1.096875

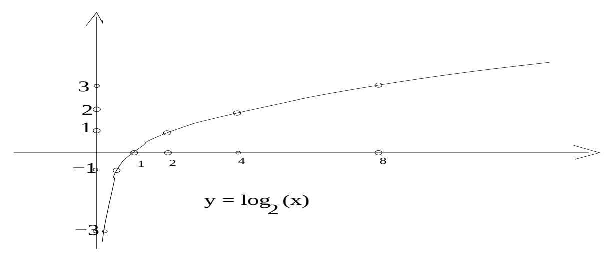

Figura 1.2: Gráfico do $y = log_2(x)$ com os pontos de coordenadas inteiras salientados.