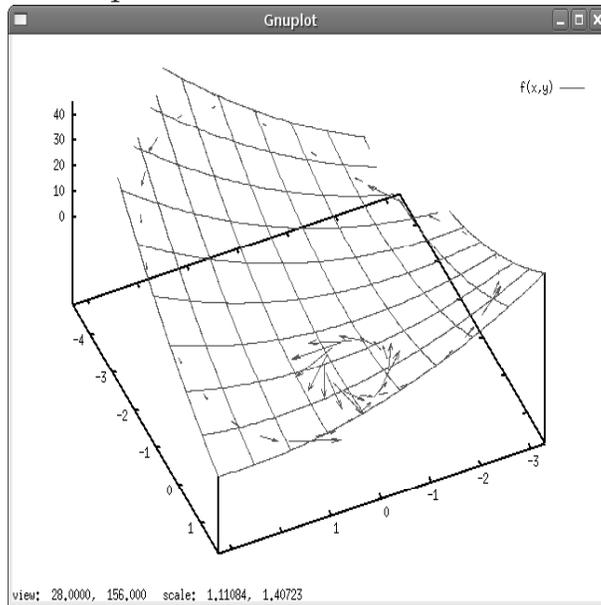


# Cálculo Avançado.

Tarcisio Praciano-Pereira

Departamento de Matemática

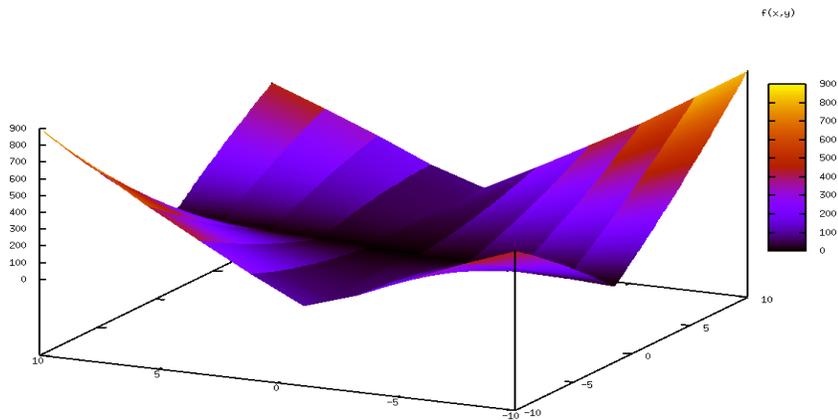


Universidade Estadual Vale do Acaraú

Sobral, 17 de junho de 2007

tarcisio@member.ams.org





## O plano de trabalho.

Queremos sugerir-lhe um modo de usar este livro que se poderia se assemelhar ao de um *hipertexto*<sup>1</sup>. A última parte do livro é um índice remissivo alfabético em que *todas* as palavras-chave do texto se encontram alí listadas com referência às páginas em que elas se encontram. Verifique agora, por exemplo, *Fourier*, ou *vetor*, e você verá a lista das páginas em que estas palavras se encontram pelo menos alguma vez com uma definição adequada. Esta é forma que encontramos para algumas vezes lhe sugerir uma leitura lá na frente, ilustrando algum conceito que ainda viria no futuro. Parece-nos uma forma menos brutal que a indicação numérica. Faça uso intensivo do índice remissivo como se você se encontrasse na frente de um hipertexto e nos desculpe pela demora de acesso...e não se esqueça de colocar um marcador de página para saber de onde saiu. . .

Uma sintaxe se impõe nas comunicações, tentamos usar o *itálico* com duas intenções: palavras-chave que você poderá encontrar no índice remissivo alfabético, ou, palavras das quais você deve desconfiar porque elas estão mal definidas ou apresentadas de modo intuitivo. O **negrito** se encontra reservado para as **palavras técnicas** que tem uma definição bem clara no texto. Esta regra, entretanto, ainda está em construção e poderá falhar aqui ou alí, pelo menos nesta edição experimental.

Um outro elemento sintático é a *letra pequena*, ela indica que o texto escrito com ela pode ser ignorado numa primeira leitura, mas que não precisa ser ignorado definitivamente, representam exemplos ou observações mais aprofundadas e que podem ser lidas como uma curiosidade teórica sem consequências maiores para o resto do texto.

Este uso da *ênfase* no texto, tem segundas intenções, uma delas (das intenções), de salientar uma bolha lógica, nos vai permitir de falar de concei-

---

<sup>1</sup>que pretensão.. mas é mesmo assim!

tos que não podemos definir no momento sem criar um texto ilegível. É uma atitude própria de um livro didático, nele se tem, como primeiro objetivo, a comunicação com o estudante, a exposição de Matemática para quem a quer aprender, e obviamente, não se dirige a quem já a domina. Assim, avançaremos alguns conceitos cuja definição formal seria crítica, mas sua apresentação num estágio inicial completa uma visão global que o estudante já deveria até mesmo ter, não fosse a fragilidade do nosso sistema educacional.

O uso de asterisco n'algum exercício, tem o sentido de que o mesmo pode ser mais difícil ou que o mesmo se encontra fora do contexto. O objetivo não deve ser o de desencorajar quem os tentem resolver. Afinal, *difícil*, não é um qualificativo absoluto, nem sequer relativamente a uma mesma pessoa ao longo do tempo.

Este livro tem duas partes dentro das quais distribuiremos os assuntos:

1. Cálculo Diferencial;
2. Cálculo Integral.

Mas observe que as *departamentalizações* são autoritárias e artificiais. Elas são feitas para atender uma necessidade prática de disposição de assuntos, com objetivo sistêmico, mas não se podem tornar camisas de força nem sugerir que o conhecimento pode ser adquirido linearmente. Assim, você irá encontrar muito uso da integral dentro da primeira parte... e muito uso da derivada na segunda parte apesar de que estas partes tem objetivos reversos, (na primeira parte estaremos derivada e na segunda a integral).

Vamos a uma rápida justificativa de nossa escolha de desenvolvimento do assunto que também servirá de uma introdução.

A primeira razão das “coisas” é que pretendemos escrever uma coleção de pequenos livros cobrindo toda a matemática do que se chama *Cálculo Avançado* e que em nossa opinião deve ser estudado num segundo ano de graduação por todos os estudantes de ciências, sejam eles futuros engenheiros ou futuros professores da Escola Secundária, ou futuros professores de Matemática da Universidade. Observe nossa posição, intencional, de associar profissionais, queremos dizer, sim, que o professor da Escola Secundária deve ter uma base matemática tão excelente quanto um professor da Universidade da mesma forma como os salários deveriam ser iguais.

O conteúdo de um tal curso deve estender as idéias do Cálculo a uma variável para um ambiente em que as funções são multivariadas, deve usar com grande liberdade os conceitos de geometria e, portanto, de Álgebra linear, que é a linguagem adequada para expressar este novo tipo de variável, os vetores. Os elementos da Álgebra Linear, são variáveis multi-numéricas. Uma consequência deste fazer consiste numa formalização intensa da linguagem matemática e deve mostrar explicitamente que a Matemática é uma linguagem abstrata mas não pode deixar de traduzir a realidade de outras ciências, ou do “mundo real”.

Como a *realidade das outras ciências*, com frequência, se traduz sob forma de uma *taxa de variação*, então as equações diferenciais tem de ser pelo menos iniciadas com um máximo de seriedade o que implica mostrar ao estudante

que sabemos pouco sobre elas, mas que sabemos alguma coisa e que uma certa variedade importante de equações diferenciais pode ser resolvida. Neste texto não incluiremos *equações diferenciais* diretamente, mas pretendemos que o leitor se encontre preparado para um curso “moderno” de equações diferenciais ordinárias ao terminá-lo, em que *moderno* significa *centrado nas equações lineares, vistas como sistemas dinâmicos*<sup>2</sup>, e nas não lineares como *aproximação das lineares*. Consequentemente o conceito de *aproximação* tem que estar presente de forma dominante.

É preciso declarar que temos uma clareza completa da falta de organização a que se chegou no ensino brasileiro, produto de anos sucessivos de descaso governamental com a educação, descaso este que apenas continua, sem mostras de que um dia venha a se acabar. A consequência disto é uma desorganização intelectual total. Apresentar Matemática seriamente numa situação deste tipo apresenta dificuldades suplementares. Deve-se esperar que os estudantes do segundo ano venham com bolhas de conhecimento significativas porque os professores do ano anterior tiveram que se ocupar de discutir inclusive a matéria da escola secundária.

Parte do nosso objetivo, portanto, é fazer a ponte necessária entre os conhecimentos rudimentares da matemática univariada à multivariada o que pode ser feito se, pelo menos admitirmos como verdadeiro, que o estudante ganhou alguma experiência nos cursos do primeiro ano.

Queremos usar computação como apoio para o aprendizado, neste sentido sugerimos que o estudante faça uso dos programas que escrevemos. Estes programas podem ser obtidos ou no disco que acompanha este livro, ou em comunicação com o autor,

tarcisio at member.ams.org

Entre as muitas dificuldades que você poderá encontrar com a presença de “computação” neste livro é a simples dificuldade de usá-la por falta absoluta de meios. Primeiro que tudo não se sinta intimidado ou humilhado, procure encontrar uma solução para este problema. Seria desonesto de nossa parte omitir esta possibilidade, apenas *porque* vivemos num país em que o governo se encontra de costas para a nação e com isto deixa as Escolas e Universidades sem os meios adequados para que elas cumpram a sua função.

Tarcisio,

e-mail tarcisio at member.ams.org

Sobral, 17 de junho de 2007

---

<sup>2</sup>moderno ? começou com Poincaré há mais de um século...



# Sumário

<b>I</b>	<b>Cálculo Diferencial no espaço vetorial <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Números e geometria no <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>13</b>
1.1	Operações com vetores . . . . .	14
1.2	Exemplos de espaços vetoriais . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Derivadas de funções bivariadas</b>	<b>29</b>
2.1	A derivada . . . . .	29
2.2	Diferenciabilidade . . . . .	51
2.3	Operações e derivadas . . . . .	57
2.4	A fórmula de Taylor . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Séries e aproximação de funções.</b>	<b>67</b>
3.1	A série de Taylor . . . . .	67
3.1.1	O erro médio. . . . .	72
3.1.2	O erro integral. . . . .	74
3.2	Polinômios Trigonométricos. . . . .	77
3.3	Aproximação polinomial clássica. . . . .	89
3.3.1	Quadrados mínimos. . . . .	89
3.3.2	O método de Gram-Schmidt. . . . .	92
3.4	Séries numéricas. . . . .	98
3.4.1	Definições e exemplos. . . . .	98
3.4.2	Critérios de convergência. . . . .	100
3.5	Séries de funções. . . . .	107
3.5.1	Séries de potências. . . . .	108
3.6	Generalizações. . . . .	111
3.6.1	Espaços de funções. . . . .	111
3.6.2	Convergência condicional. . . . .	112
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>119</b>
4.1	As séries de Fourier. . . . .	119
4.2	Fenômenos vibratórios, a música. . . . .	120
4.3	As comunicações. . . . .	121
4.4	Compactação de dados. . . . .	122
4.5	Equações diferenciais. . . . .	123

4.6	Tabelas diversas . . . . .	126
<b>II</b>	<b>A integral no espaço vetorial <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>129</b>
<b>5</b>	<b>Introdução</b>	<b>131</b>
5.1	Equações paramétricas de uma curva . . . . .	131
5.1.1	exemplos de curvas . . . . .	131
5.1.2	Notação . . . . .	133
5.2	Família de curvas . . . . .	139
5.3	Dimensão e variedade . . . . .	139
5.3.1	Hiperplano e hipersuperfície no $\mathbb{R}^4$ . . . . .	142
5.3.2	Um pouco sobre classificação de variedades . . . . .	142
5.3.3	Conjunto aberto e fronteira de um conjunto . . . . .	145
5.4	Complementos sobre Integração . . . . .	149
5.5	Complementos sobre Geometria e Derivada . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Somas múltiplas de Riemann</b>	<b>165</b>
6.1	Integral múltipla - Solução . . . . .	165
6.2	O caso da fronteira curva . . . . .	174
<b>7</b>	<b>A integral de linha</b>	<b>189</b>
7.1	Integral de linha . . . . .	189
7.2	Derivadas Parciais . . . . .	194
7.3	Aplicações das derivadas . . . . .	202
7.3.1	Vetor normal e gradiente . . . . .	208
7.4	Derivadas de funções vetoriais . . . . .	216
7.5	Miscelânea de Exercícios . . . . .	217
<b>8</b>	<b>O teorema de Green</b>	<b>227</b>
8.1	Teorema de Green . . . . .	227
8.1.1	Campos vetoriais conservativos ou não . . . . .	227
8.1.2	Forma trivial do Teorema de Green . . . . .	230
8.2	Rotação e fluxo . . . . .	244
<b>9</b>	<b>Superfície</b>	<b>249</b>
9.1	Superfície e área . . . . .	249
9.2	Aplicações . . . . .	261
<b>10</b>	<b>Fórmulas Integrais</b>	<b>267</b>
10.1	Generalizações da integral . . . . .	267
	Bibliografia . . . . .	i

# Lista de Figuras

1.1	Dois vetores somados geometricamente pela regra do paralelograma. . . . .	14
1.2	No domínio de $W \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ em volta de um ponto $P \in W$ , há muitas direções para escolher e estudar a variação. . . . .	15
1.3	Campo vetorial - aproximação de curva . . . . .	27
2.1	A reta tangente ao gráfico de $f$ . . . . .	32
2.2	$z = g(x, y) = x^2 + y^2$ e plano tangente $z = q(x, y)$ . . . . .	36
2.3	Disco de convergência da série de potências . . . . .	42
3.1	Gráficos simultâneos do polinômio de Taylor de grau 3 e da função $f$ . . . . .	70
3.2	Gráficos simultâneos do seno e de seu polinômio de Taylor de grau 11 . . . . .	71
3.3	Reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x = -2$ . . . . .	74
3.4	Polinômios de grau 11 e 13 do seno desenvolvidos em $x = 0$ . . . . .	75
3.5	polinômio trigonométrico com 5 termos: aproximação da função dente de serrote em $\mathbb{R}$ . . . . .	86
3.6	polinômio trigonométrico com 10 termos no intervalo $[-15, 15]$ : aproximação da função dente de serrote em $\mathbb{R}$ . . . . .	87
3.7	Área associada a uma soma parcial-projeção para traz - projeção para frente. 102	
4.1	gráfico da parábola $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$ aproximada por um polinômio trigonométrico, no intervalo $[-\pi, \pi]$ . . . . .	123
5.1	Cicloide desenhada à mão . . . . .	132
5.2	Arco de curva . . . . .	134
5.3	Curva parametrizada . . . . .	137
5.4	Um conjunto aberto $\Omega \ni P$ e um ponto. . . . .	147
6.1	Círculo de centro na origem coberto por uma malha uniforme . . . . .	166
6.2	O círculo como domínio de integração. . . . .	175
7.1	Uma curva e sua aproximação poligonal . . . . .	191
7.2	Uma variedade linear e seu vetor normal . . . . .	196
7.3	Gráfico aproximado da curva plana . . . . .	199
7.4	Uma malha retangular em $\Omega$ induz uma partição no conjunto de saída $W$ . . . . .	204
7.5	Uma superfície com ponto singular . . . . .	211

7.6	Parametrização do quadrado $Q$ de lado 1, com vértices $(0, 0), (1, 1)$ . . . . .	219
8.1	Os distintos caminhos entre $P, Q$ no domínio $\Omega$ , ; $\alpha, \beta, \gamma$ . . . . .	233
8.2	A fronteira de um domínio inclui as fronteiras dos seus buracos... a orientação da fronteira pode ser determinada por tangência. . . . .	237
8.3	A orientação de uma curva pode ser incompatível com a orientação da fronteira.	238
8.4	A independência de caminhos; as curvas são percorridas de acordo com a indicação das setas. . . . .	239
8.5	A independência de caminhos . . . . .	242
8.6	Isotérmicas e linhas de fluxo . . . . .	245
9.1	O princípio do cosseno . . . . .	250

## Parte I

# Cálculo Diferencial no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$



### As tres técnicas básicas do Cálculo

Neste capítulo vamos estudar as tres técnicas básicas do Cálculo, derivada, integral e limite, tendo o espaço tridimensional como o cenário de trabalho.

Límite é o estudo do *comportamento assintótico*, usamos *limite* para definir a *integral* e a *derivada*. Que é a integral? você verá depois que há outras formas de se conceber a integral e que o próprio limite é um tipo de integral, mas esta visão ainda faz parte do futuro e nós queremos usar o que você recentemente aprendeu. Para compreender o que era a integral, você, considerou uma família de  $n$  retângulos sob o gráfico de uma função e lhes calculou a área

$$A_{x_i} = f(x_i)\Delta x_i,$$

e depois lhe disseram que *quando os  $\Delta x_i$  se aproximarem de zero a soma  $\sum_{i=1}^n A_{x_i}$  se aproximará de um número*, este número é a integral de  $f$ . Mas pode não ser assim, neste caso a função não é integrável, é isto que caracteriza um *comportamento assintótico*. O comportamento assintótico é a idéia central deste capítulo.



# Capítulo 1

## Números e geometria no $\mathbb{R}^3$

### Resumo.

Vamos estudar os elementos e as estruturas básicas para generalizar o Cálculo Diferencial e Integral univariado.

Enquanto que no caso univariado tínhamos  $\mathbb{R} \supset [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  e queríamos estudar a taxa de variação instantânea de  $f$  num determinado ponto  $x \in [a, b]$ , não havia muita escolha quanto à variação de  $x$ , para frente ou para trás. Aqui as funções serão multivariadas quer dizer que num ponto  $P \in W$  de uma função  $W \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ , há muitas direções em que se pode escolher para estudar a taxa de variação, veja a (fig. 1.2), página 15.

Introdução: álgebra e Vetores.

*O conceito de vetor surgiu na Física como muitas das noções da Matemática. O conceito físico estava ligado a uma entidade geométrica, uma “seta”, porque tinha que ter direção e intensidade. Esta visão geométrica é primitiva e tem que ser generalizada para ser melhor aplicada em distintas situações. Como sempre, é um processo algébrico, ou formal que produz a generalização adequada.*

*Os passos desta generalização seguem uma análise do conceito que se deseja generalizar. Com vetores, queriam os físicos, estender o conceito de número. Os números eram pobres, representam apenas a intensidade, era preciso associar-lhe direção e sentido. Os tres conceitos se encontram sintetizados, geometricamente, num “segmento de reta orientado”, que tem módulo, direção e sentido. Entretanto os dois últimos conceitos se confundem uma vez que não é possível falar de sentido sem direção. De uma certa forma se pode dizer que existem apenas dois novos conceitos num “vetor”: intensidade (ou módulo) e ângulo, desde que se tenha estabelecido um padrão adequado para medição de ângulos. Mas padrão para medir também é necessário quando se fala em intensidade. A representação geométrica dos vetores conduziu naturalmente ao conceito geométrico de soma destes objetos: a regra do paralelograma, (fig. 1.1). As outras “coordenadas” contidas no conceito de vetor: intensidade, ângulo, direção, sentido, que de alguma forma se sobrepõem, todas surgiram da concepção geométrica.*

*Os conceitos de ângulo, comprimento ou módulo, ficam todos generalizados pelo conceito de produto escalar. Em Geometria Analítica se define o produto escalar de dois vetores, mas é na Álgebra Linear que se estende convenientemente o conceito de número incluindo os vetores.*

*Hoje encontramos a palavra vetor utilizada em computação ou mesmo em economia ou planejamento e a ideia subjacente é a mesma. No “vetor” que aparece em computação não tem sentido falar em módulo na verdade a palavra certa seria matriz que generaliza a ideia de vetor: um objeto multi-numérico, ou número generalizado como algumas vezes as estaremos chamando aqui para enfatizar.*

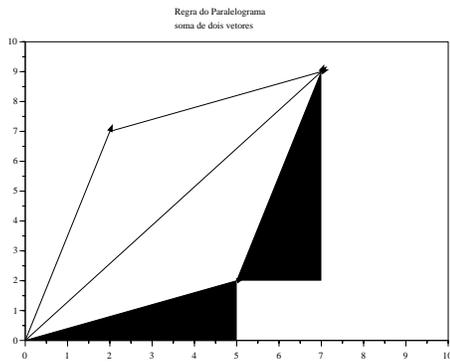


Figura 1.1: Dois vetores somados geometricamente pela regra do paralelograma.

Uma outra invenção da Humanidade foi o número complexo, que é um tipo de vetor e surgiu de forma independente para resolver questões algébricas, como é o caso da raiz quadrado de  $-1$ . Por sua origem algébrica, os números complexos tinham uma capacidade operatória completa: soma, multiplicação, divisão e subtração. Nossos antepassados quase que reconheciam neles autênticos números, mas deixaram registrada a desconfiança de que havia alguma coisa errada no nome: **números complexos**. Em seguida se descobriu que os números complexos eram uma espécie de números geométricos com uma representação vetorial de modo que o conjunto,  $\mathbf{C}$ , dos números complexos, era plano, generalizando a reta  $\mathbb{R}$  que representava os números reais. Nos séculos 19 e 20 se multiplicaram as tentativas de construções de números geométricos de dimensão maior do que 2, sobre  $\mathbb{R}$ . Algumas dessas construções tiveram sucesso, os **quaternions** são um desses exemplos que têm uma álgebra parecida com a dos **números complexos**. Na atual estrutura da Matemática, os vetores são objeto de estudo de uma disciplina chamada Álgebra Linear, que é um “departamento” da Álgebra.

Neste primeiro capítulo faremos uma introdução sistemática, mas resumida, da álgebra linear que será necessária para estudar Cálculo Multivariado ao mesmo tempo em que iremos desenvolvendo os conceitos do Cálculo. Vamos descrever o cenário em que se vai desenvolver a ação. A figura (fig. 1.2) pretende ilustrar isto, num ponto  $P$  do domínio há várias direções sobre as quais podemos estudar a taxa de variação de uma função

$$W \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

sugerindo, então, que a derivada, que guarda o coeficiente angular instantâneo de uma função, tem que ser considerado em várias possíveis direções.

## 1.1 Operações com vetores

A *regra do paralelograma*, (fig. 1.1), contém os elementos de semelhança de triângulos necessários para que se transporte *sentido* e *intensidade*, contidos no objeto geométrico vetor, de modo que possamos *superpô-los geometricamente*. Ao mesmo tempo ela contém, dentro da própria semelhança de triângulo, os elementos algébricos da definição:

$$u = (a, b) ; v = (x, y) \Rightarrow u + v = (a + x, b + y). \quad (1.1)$$

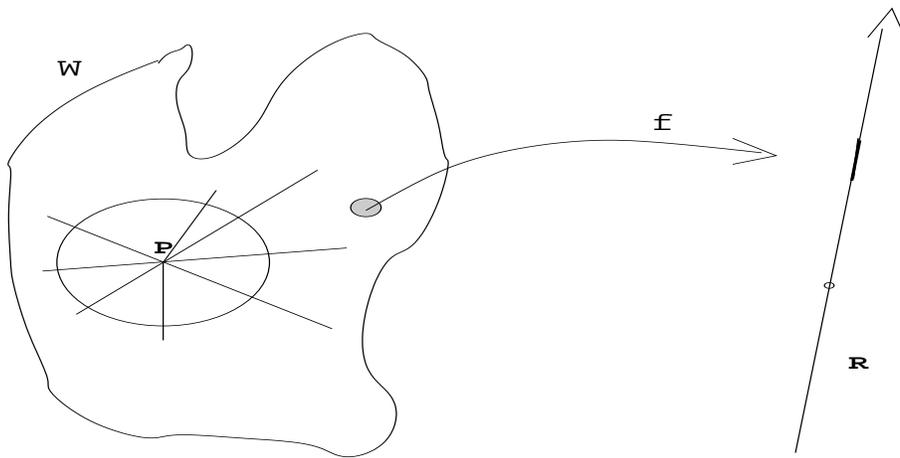


Figura 1.2: No domínio de  $W \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  em volta de um ponto  $P \in W$ , há muitas direções para escolher e estudar a variação.

Estude a (fig. 1.1) e procure encontrar nela os elementos da equação (equação,1.1).

**Observação 1** *Dimensão finita*

Na prática da Álgebra Linear de dimensão finita um jogo de palavras guarda esta regra operatória: se somam as coordenadas de mesma ordem, a primeira com a primeira, e a segunda com a segunda para se obter o vetor resultante.

Os espaços de dimensão finita se caracterizam pelo fato de que todos os seus elementos têm uma mesma quantidade de coordenadas. Assim o  $\mathbb{R}^3$  se caracteriza por objetos que tem tres coordenadas, tres números reais, é um espaço vetorial de dimensão tres.

A soma de vetores e o produto de vetores por escalares, têm as propriedades usuais dos números.

**Definição 1** *Espaço vetorial.*

Se designarmos por  $V$  um conjunto no qual se encontra definida uma operação de adição comutativa,

$$V \times V \rightarrow V ; (x, y) \mapsto x + y$$

e tal que o corpo dos números reais aja sobre  $V$

$$\mathbb{R} \rightarrow (V \mapsto V) ; \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto (x \mapsto \lambda x \in V)$$

distributivamente e associativamente, isto é tal que

1. a comutatividade:  $u + v = v + u$  vale
2. a associatividade:  $(u + v) + w = u + (v + w)$  vale

3. exista um elemento neutro relativamente à soma:  $0 + u = u$
4. a distributividade do produto relativamente à soma, vale:
  - (a) à esquerda  $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall u, v \in V) ; \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
  - (b) e à direita  $(\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R})(\forall u \in V)(\lambda + \alpha)u = \lambda u + \alpha u$
5. O elemento neutro da adição de  $\mathbb{R}$  leve, pela multiplicação, todo vetor no zero:  $0\vec{x} = \vec{0}$ .
6. O elemento neutro da multiplicação de  $\mathbb{R}$  leve todo vetor nele mesmo:  $1u = u$ .

Então diremos que  $V$  é um espaço vetorial real.

**Observação 2** Escalares e vetores.

A propriedade distributiva salienta a existência de dois tipos de dados envolvidos nas operações com vetores: **escalares** e **vetores**. O corpo dos números reais,  $\mathbb{R}$ , age sobre o espaço vetorial  $V$  :

$$\mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

de modo que o resultado desta ação volta a ser um vetor. Chamamos os números reais de escalares. Em particular a ação do zero:  $0 \cdot u = 0$ .

Consulte um livro de Álgebra Linear para uma descrição mais completa da estrutura dos espaços vetoriais. Mas, intuitivamente, vetores são objetos que contém informação numérica múltipla, que podem ser somados e multiplicados escalarmente por números. De alguma forma os vetores podem ser vistos como uma generalização dos números, eles carregam informações multi-numéricas.

## 1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Vamos ver que há objetos bem diferentes formando espaços vetoriais, conjuntos de funções, conjuntos de polinômios, matrizes de números. O nosso objetivo consiste em salientar que *espaço vetorial* é uma estrutura e quando uma coleção de objetos semelhantes entre si tem as propriedades que listamos acima, temos um espaço o vetorial. O que pudermos fazer com um espaço vetorial, também poderemos fazer com outro: *generalização*. Este livro é um livro de Cálculo em que vamos generalizar as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral *univariado* para os vetores, em particular para os elementos do  $\mathbb{R}^3$ , mas daremos aqui e alí algumas fugidelas mostrando que os mesmos *métodos* também se aplicam a vetores de natureza mais geral.

**Exemplo 1** Polinômios de mesmo grau.

O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$  é um espaço vetorial de dimensão  $n + 1$  porque precisamos de  $n + 1$  informações, coordenadas, para escrever os elementos deste espaço.

A soma se faz coordenada a coordenada, sem alterar o grau, se pode multiplicar um polinômio do grau  $n$  por um escalar resultando num novo polinômio do mesmo grau. Apenas o zero tem que ser considerado um polinômio de grau qualquer para que as coisas fiquem organizadas. Ver Taylor, polinômio

**Exemplo 2** Espaço vetorial de funções contínuas.

Os polinômios as vezes podem ser vistos como funções, então as funções formam um caso mais amplo de espaço de vetores.

As funções, pelo menos numa primeira aproximação, são objetos definidos em pontos de um determinado conjunto chamado domínio, aos quais se associam valores que se encontram no conjunto dos valores.

O domínio funciona como um conjunto de índices e podemos ver assim que  $\mathbb{R}^3$  nada mais é do que o conjunto de todas as funções reais definidas no domínio  $\{1, 2, 3\}$  se podendo entender a notação  $x_i$  como  $x(i)$ , o valor de  $x$  no ponto  $i$ .

Esta ideia se pode generalizar para o conjunto de índices  $[a, b]$ , um intervalo da reta. No Cálculo univariado se definem as funções contínuas e se mostra que soma de funções contínuas é uma função contínua, leia-se: soma de vetores é um vetor.

Se chamarmos  $V = C([a, b], \mathbb{R})$  ao espaço vetorial de todas as funções contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  e tomando valores em  $\mathbb{R}$ , podemos verificar que  $C([a, b], \mathbb{R})$  tem todas as propriedades (prop. 4), página 16, sendo um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

A dimensão deste espaço pode ser rapidamente discutida. Veja que, no caso do  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto dos índices, é o domínio em que se encontram definidas as funções que formam este espaço, que justificamos ser um espaço de dimensão 3. Agora estamos discutindo funções cujo domínio, leia conjunto dos índices, é o intervalo  $[a, b]$ , que tem uma “quantidade” de elementos não finita<sup>1</sup>. Assim, apenas comparando os conjuntos de índices, concluímos que as funções contínuas, definidas no intervalo  $[a, b]$  tem uma “quantidade” não finita de informações fazendo do espaço  $C([a, b], \mathbb{R})$  um espaço vetorial de dimensão não finita.

Os espaços de polinômios também podem nos conduzir rapidamente à compreensão de que existem espaços de dimensão não finita. Como um polinômio de grau  $n$  é, intuitivamente, um vetor de dimensão  $n + 1$ , porque precisamos de  $n + 1$  informações para escrevê-los, então vemos que existem espaços de dimensão finita,  $n$ , arbitrários contidos no espaço de todos os polinômios,  $\mathbb{R}[x]$ , que assim não pode ser um espaço de dimensão finita.

Mas a natureza dos dois espaços,  $C([a, b], \mathbb{R})$  ou  $\mathbb{R}[x]$  é distinta, como também é distinta a natureza da “não finitude” de suas dimensões. Estes fatos vão nos levar a discutir no capítulo 2 os problemas de aproximação.

### Observação 3 Aproximação, finitude, cardinalidade.

Problemas: Como aproximar, com um número finito de informações, um objeto que contenha uma quantidade não finita de informações? Existe alguma coisa não finita à nossa volta?

Estes problemas se encontram no centro da investigação tecnológica dos nossos dias uma vez que as informações que temos guardar ou transmitir são funções, como a quantidade de energia contida num fenômeno, voz, figura, etc...

Por outro lado, os instrumentos que temos para medir devem transformar estes fenômenos em uma quantidade finita de informações, digitalizá-las, para que possamos guardá-las ou transmiti-las.

Outra questão que fica para ser aprofundada é esta sobre a “quantidade” de elementos não finita. Esta questão se constitui de uma teoria chamada cardinalidade.

Além de somar vetores, resultando n'outro vetor, e multiplicar vetores por escalares, resultando ainda n'outro vetor, precisamos do produto escalar de dois vetores:

### Definição 2 Produto Escalar.

$$u = (x_1, \dots, x_n) \quad v = (y_1, \dots, y_n) \quad (1.2)$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = |u| \cdot |v| \cos(\theta) \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Não se pode usar esta linguagem, “quantidade”, neste conceito, sem incorrer em contradições de natureza lógica.

Vamos sintetizar o núcleo da idéia, o *método formal da álgebra entra em cena*: na expressão acima temos um símbolo que representa o produto escalar, cuja definição se encontra à direita e tem propriedades que podemos facilmente<sup>2</sup> deduzir:

**Teorema 1** *Propriedades do produto escalar em  $\mathbb{R}^3$ .*

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (1.4)$$

$$(2) \quad \langle u, \lambda v_1 + \beta v_2 \rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle + \beta \langle u, v_2 \rangle \quad (1.5)$$

Estas duas propriedades caracterizam  $\langle, \rangle$  como uma forma (transformação) bilinear que chamaremos de *produto escalar*.

**Exercícios 1** 1. *Faças contas e mostre que se*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

então,  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .

2. *Mostre no  $\mathbb{R}^2$  que se  $u, v$  forem dois vetores unitários, então (veja que suas coordenadas podem ser escritas usando  $\text{sen}, \text{cos}$ ),*

$$\langle u, v \rangle = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

e deduza daí que

$$\langle u, v \rangle = \cos \theta ; \theta = \alpha - \beta \text{ é o ângulo entre os dois vetores.}$$

3. *Generalize, se  $u, v$  não forem unitários, então eles são múltiplos de vetores unitários pelos escalares  $|u|, |v|$  e conclua que*

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta$$

4. definição "abstrata" de ângulo *Mostre que a partir da definição de um produto escalar num espaço vetorial, podemos definir o ângulo entre dois vetores dados, (solução mais adiante no texto).*

Quando um espaço vetorial tiver um *produto escalar* diremos que é um *espaço euclidiano*.

**Observação 4** *A estrutura euclidiana.*

Se identificarmos alguma *função* em outro espaço vetorial tendo as mesmas propriedades do *produto escalar*, então descobrimos um novo espaço euclidiano e suas propriedades são muito parecidas, ou possivelmente as mesmas, do  $\mathbb{R}^3$ .

É desta generalização que falávamos: o estudo acurado de um determinado exemplo nos permite uma extensão de suas propriedades a uma família de objetos semelhantes a ele. Ao

---

<sup>2</sup>Não permita que o autor o intimide, pergunte se não estiver claro... ou se cale para sempre.

mesmo tempo isto se constitui de um método expositivo que adotaremos que vai do particular para o geral: a análise dos exemplos permite sua generalização e uma classificação adequada cria uma categoria de objetos aos quais a mesma análise se aplica.

Vamos aplicar tudo que estudarmos sobre o  $\mathbb{R}^3$  às séries de Fourier, mais adiante, mas o espaço onde estaremos trabalhando terá como vetores, funções. Veja o exemplo logo a seguir em que estamos nos exercitando no que será necessário mais a frente.

Chamamos sua atenção para a ambigüidade da definição de produto escalar, (def. 2), na página 17, usando soma e também o produto de módulos. Apenas uma deveria ter sido apresentada como definição, a outra sendo um teorema. Os exercícios tentam sanar esta ambigüidade, resolva o exercício e escolha quem é a definição e quem é o teorema. Veja assim outro fato que passa despercebido na construção da Matemática, que nem tudo é absoluto, muitas vezes você pode escolher o que é definição ou teorema. Escolha qual é o seu teorema.

O produto escalar é típico dos espaços vetoriais euclidianos, e há espaços em que não se pode definir um produto escalar coerente com a estrutura vetorial, nestes espaços se perde o conceito de ângulo. Neste livro trataremos apenas de espaços euclidianos.

A parte final da definição (def. 2) é de “natureza” geométrica”, pode ser utilizada para definir ângulo quando a geometria usual não der mais pé:

**Definição 3** *Ângulo.* Dados dois vetores  $u, v$  o ângulo entre eles é o número:

$$\text{ângulo}(u, v) = \ar \cos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}\right)$$

O exemplo seguinte ilustra o método de generalização.

**Exemplo 3** *Produto escalar no espaço  $C([0, 2\pi])$ .*

O conjunto de funções contínuas  $C([0, 2\pi])$  é um espaço vetorial. Podemos somar funções, de forma semelhante como somamos os números, ou os vetores. Podemos multiplicar funções por escalares, como fazemos com os vetores. Falta-nos, entretanto a sensação geométrica de “seta” quando observamos uma função, e é normal, porque as funções são vetores de uma “dimensão” muito superior a segunda ou terceira dimensões. Na verdade uma função de dimensão “baixa” é simplesmente um vetor...

No espaço  $C([0, 2\pi])$  podemos<sup>3</sup> definir o produto escalar,  $\langle, \rangle$ , da seguinte forma:

$$f, g \in C([0, 2\pi]) \tag{1.6}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \tag{1.7}$$

$$\text{ângulo}(f, g) = \ar \cos\left(\frac{\langle f, g \rangle}{|f| \cdot |g|}\right). \tag{1.8}$$

É fácil mostrar que  $\langle, \rangle$  tem as mesmas propriedades que o outro definido anteriormente, sendo assim uma forma bilinear, um produto escalar. Depois veremos que este produto escalar no espaço de funções usualmente vem multiplicado por uma constante adequada a um certo objetivo. Veja a definição dos coeficientes de Fourier.

Observe ainda que o ângulo de uma função com ela mesma é zero, como seria de esperar. É um pouquinho mais difícil ver a conexão entre duas funções ortogonais entre si, o que acontece quando o produto escalar entre elas se anula. Mas existe um significado que generaliza de forma natural a definição geométrica de vetores ortogonais: os vetores  $(0, -3), (1, 0)$  porque onde um se anula o outro não se anula, mas isto é uma situação bem particular. Nos exercícios você será convidado a demonstrar um caso que diretamente generaliza este.

---

<sup>3</sup>O uso do número  $\pi$  tem como única função assustar o leitor... para não ficar assustado, troque-o e veja que tudo funciona igual.

**Exercício 1** Vetores.

1. equação vetorial. Se  $A, B \in \mathbb{R}^3$  forem dois vetores dados, resolva, explicitando todas as propriedades usadas, a equação

$$A + 3X = B$$

2. equação vetorial. Se duas funções forem dadas:

$$f, g \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$$

e se for dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , resolva a equação:

$$f + \alpha X = g.$$

Em particular, considere  $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ ,  $g(x, y) = 1$ ,  $\alpha = 1$ , e encontre  $X$ .

3. ortogonalidade.

(a) Encontre o conjunto de todos os vetores ortogonais ao vetor  $(3, 4) \in \mathbb{R}^2$

(b) Encontre o conjunto de todos os vetores ortogonais ao vetor  $(3, 4) \in \mathbb{R}^3$

(c) Verifique que as funções:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftarrow x \in [0, \pi] ; f(x) = 0 &\Leftarrow x \notin [0, \pi] \\ g(x) = 0 &\Leftarrow x \in [0, \pi] ; f(x) = x - \pi &\Leftarrow x \notin [0, \pi] \end{aligned}$$

são ortogonais em  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  com o produto escalar da integral.

Verifique também que as funções seno e cosseno são ortogonais no mesmo espaço. Calcule o módulo de todas as funções usando a definição:

$$|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

(d) Encontre todos os vetores ortogonais ao vetor

$$p(x) = 3 + 4x + x^2$$

no espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, (qual é o produto escalar que você pretende utilizar ?)

(e) O polinômio  $p(x) = 3 + 4x + x^2$  é um elemento do espaço  $\mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ . Neste espaço o produto escalar canônico, é o integral. Encontre alguma função que seja ortogonal a  $p$  relativamente ao produto escalar integral.

- (f) Veja num livro de Física a definição de trabalho e construa um exemplo de duas funções cujo trabalho de uma, relativamente ao da outra, seja nulo: ortogonais. Observe que você estará usando o produto escalar integral.
- (g) Veja num livro de Estatística o conceito de probabilidade condicional e construa um exemplo de eventos independentes, como ortogonais..
- (h) Use o produto escalar integral, (eq. 1.8), para encontrar os vetores perpendiculares ao vetor  $f(x) = \text{sen}(x)$  em  $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ . Verifique em particular se algum dos vetores

$$g(x) = x^2 ; h(x) = x ; p(x) = \cos(x) ; r(x) = x^3$$

é perpendicular a  $f$ . Interprete o resultado considerando que a área sob a função, sua integral, representa a quantidade de energia que ela encerra.

- (i) A integral de uma função pode ser interpretada como a quantidade de informação que ela contém. Como poderíamos interpretar duas funções ortogonais neste sentido. Traduza este exemplo para o caso de vetores do  $\mathbb{R}^3$ .
- (j) funções multivariadas. Verifique as propriedades do espaço vetorial  $\mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ .
4. Os físicos gostam de ver o mundo como um espaço de dimensão 4, o espaço-tempo, com tres coordenadas para posição no espaço e uma coordenada para o tempo,  $(x, y, z, t)$ . Uma partícula em movimento “traç a” uma curva neste espaço. Poderia uma tal curva ser um círculo? uma curva fechada? Trace a curva, no plano mesmo, de duas particulas que colidam e se “destruam” mutuamente.
5. Resolva as seguinte equações indicando cuidadosamente quais foram as regras utilizadas de passagem para cada nova linha da solução:

(a)  $(2, 0, 3) + X = (0, 2, 3)$

(b)  $2 + i + X = 3 - i + 2X$

(c)  $(1, -1, 3) + 4X = (2, -1, 0)$

(d)

$$2X + 3Y = (1, 1, 0) \tag{1.9}$$

$$X - 2Y = (1, 1, 1) \tag{1.10}$$

$$\tag{1.11}$$

6. O centro de gravidade, baricentro, de um triângulo é a média aritmética dos seus vértices, considerados como vetores. Desenhe um triângulo e calcule o seu baricentro.

7. baricentro Um triângulo pode ser feito de material não homogêneo, então seus vértices podem ter pesos diferentes. Considere o triângulo  $PQO$  cujos vértices pesam respectivamente 4,5,7. Calcule o baricentro deste triângulo, depois de ter escolhido as coordenadas de cada um dos seus pontos. Calcule também o baricentro considerando os vértices todos de mesmo peso e verifique qual a diferença nos dois casos.
8. Verifique se os pontos  $(1, 2, -4, 1)$ ,  $(2, 0, 5, 2)$ ,  $(0, 4, 2, -3)$  formam um triângulo. Calcule o baricentro destes pontos considerados todos de mesmo peso.
9. Calcule a distância entre a reta determinada pelos pontos  $(1, 2, -3)$ ,  $(3, 2, 1)$  e o ponto  $(4, 3, 2)$ .
10. Encontre um vetor perpendicular a reta determinada pelos pontos  $(1, 2, -3)$ ,  $(3, 2, 1)$ . Calcule a distância desta reta à origem.
11. Tome como definição: um plano é o lugar geométrico dos pontos do espaço que determinam vetores perpendiculares a um vetor dado  $(A, B, C)$ . Calcule uma equação para este plano e justifique porque há mais de um plano satisfazendo esta definição. Corrija então a definição inicial.
12. Apresente exemplos que justifiquem a afirmação: a solução de um sistema linear é uma translação da solução do sistema homogêneo associado passando por uma solução particular. Faça-o inicialmente no plano, mas generalize depois.
13. Mostre que  $|\sum_{k=1}^n s_k| \leq \sum_{k=1}^n |s_k|$  sejam  $s_k$  números ou vetores.
14. Descreva, usando vetores, as duas desigualdades triangulares:

(a) A soma de dois lados de um triângulo é maior que o terceiro.

(b) Num triângulo, qualquer lado é maior do que a diferença dos outros dois.

Demonstre estas desigualdade e depois as escreva como uma única sequência de duas desigualdades.

15. desigualdade de Cauchy-Buniakowski-Schwarz Considere dois vetores  $u, v$  que então determinam um plano, mostre que  $\langle u, v \rangle = |u||v|\cos(\alpha) \leq |u||v|$  em que  $\alpha$  é ângulo entre os dois vetores.
16. Generalize a desigualdade acima provando que

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k \leq |u||v| ; u, v \in \mathbb{R}^n$$

17. Mostre que o conjunto  $s\vec{u} + t\vec{v} ; s, t \geq 0 ; s + t = 1$  é o segmento de reta suporte do vetor diferença  $\vec{u} - \vec{v}$ .



5. intuição gráfico de curva Sendo  $\gamma$  uma curva<sup>4</sup> do plano,  $\mathbb{R}^2$ , e

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

dê exemplos (gráficos e algébricos) ilustrando

- $f \circ \gamma$  pode ser um ponto (um ponto é uma curva diferenciável);
- $f \circ \gamma$  pode ser uma curva diferenciável (que hipótese é necessária ?);
- como seria o graf( $f \circ \gamma$ ), o gráfico de  $f \circ \gamma$ , se  $\gamma$  for uma curva fechada.

6. Considere num cubo o vértice  $P_0$  e os três vértices que lhe são adjacentes  $P_1, P_2, P_3$  .

Considere a aplicação  $F$  que roda o cubo levando

$$P_1 \mapsto P_2 ; P_2 \mapsto P_3 ; P_3 \mapsto P_1$$

- Dê uma definição geométrica para  $F$  (descrição geométrica);
- Encontre a matriz de  $F$  num sistema de coordenadas adequado (em que ela fique mais simples)
- Mostre que  $F^3 = F \circ F \circ F$  é a identidade e portanto que  $F^{-1} = F \circ F$ .

**Métodos numéricos e equações diferenciais ordinárias**

**Lista 01**

**Derivada, plano tangente, aprox. linear**

tarcisio@member.ams.org

T. Praciano-Pereira

**Dep. de Matemática**

**alun@:**

---

---

**Univ. Estadual Vale do Acaraú**

17 de junho de 2007

---

---

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

---

<sup>4</sup>curva é uma função de classe  $C^1$  com derivada diferente de zero definida em um intervalo e tomando valores em  $\mathbb{R}^n$

**Exercícios 3** *Derivada, plano tangente, aprox. linear* objetivo: *Conduzir @ alun@ a dominar gradientes, jacobianas, planos tangentes e mudanças de variáveis, campo vetorial, gráficos com apoio computacional.*

palavras chave: *jacobiana, gradiente, derivadas parciais, variedades lineares tangentes, produto escalar, campo vetorial.*

1. Verifique que a equação de uma reta que passa na origem, no plano, se expressa como o produto escalar de um vetor  $(A, B)$  por um vetor posição  $(x, y)$  arbitrário da reta. Faça um gráfico e interprete geometricamente o significado do vetor  $(A, B)$ .
2. Ganhe agilidade, escolha  $100^5$  vetores no plano e escreva as equações de retas perpendiculares a estes vetores expressando-as sempre no formato indicado a seguir. Em cada caso escolha um ponto no plano por onde a reta passa (observe a segunda equação abaixo)

- $y = f(x) + c = mx + c$
- $y = b + m(x - a)$

Teste sua solução usando **gnuplot** com a equação no formato da primeira equação acima.

3. Se uma reta não passar pela origem, ainda assim ela é paralela a uma outra reta que passa pela origem (supondo válido o 5º postulado...). Deduza que a equação geral da reta no plano é da forma

$$\langle (A, B), (x, y) \rangle = -C \equiv Ax + By + C = 0$$

4. Qual é o lugar geométrico dos pontos  $(x, y, z)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle = 0$ ? Deduza disto qual é o lugar geométrico dos pontos do  $(x, y, z)$  do  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

5. Sabemos que uma equação  $S(x, y, z) = 0$  não se altera se for multiplicada por um número diferente de zero. Multiplique

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

por um número conveniente de modo que o vetor perpendicular ao plano na equação seja unitário. Comparando com a equação do plano paralelo que passa na origem, deduza qual a distância do plano

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

para a origem. Escreva suas conclusões no formato “Teorema e demonstração”.

---

<sup>5</sup>ao sentir que já domina o assunto pode parar antes da centésima

6. As questões anteriores mostram que não podemos ter uma forma simples para a equação da reta em dimensão maior que 2. A saída para simplificar as equações de variedades de dimensão 1 no espaço de dimensão maior ou igual a 3 consiste em usar equações paramétricas. Encontre as equações paramétricas da reta paralela ao vetor  $(1, -1, 3)$  que passe pelo ponto  $(2, 2, 2)$ .
7. Escolha  $100^6$  vetores no espaço junto com 100 outras condições e escreva, em cada caso, as equações paramétricas das retas determinadas por estes 100 pares de condições.
8. Escreva a equação geral (as equações paramétricas gerais) de uma reta, especifique os dados iniciais corretamente. Redija no formato “Teorema e demonstração”.

9. As equações

$$x_k = f_k(t) ; k \in \{1, \dots, n\} ; t \in [a, b] \quad (1.12)$$

em que  $f_k$  é uma função diferenciável para cada valor do índice  $k$ , são as equações paramétricas de uma curva no  $\mathbb{R}^n$ , parametrizadas no intervalo  $[a, b]$ . Calcule a expressão do vetor tangente à esta curva no ponto

$$a_k = f_k(t_0) ; k \in \{1, \dots, n\} \quad (1.13)$$

dado  $t_0 \in [a, b]$ .

10. sentido positivo é o anti-horário Encontre equações paramétricas do círculo trigonométrico, e derivando mostre que o sentido natural de percurso é o anti-horário.

11. Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função

$$z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^3 \quad (1.14)$$

no ponto  $(2, 3, 49)$

12. Escolha 100 funções, para cada uma delas calcule um ponto no gráfico e determine a equação do plano tangente em cada caso, mas pode parar antes da centésima se tiver certeza de que entendeu todo o processo.

13. Considere a curva plana

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (3t, 4 - 2t) ; t \in [-3, 3] \quad (1.15)$$

e a superfície

$$\text{graf}(f) ; f(x, y) = x^2 + y^2$$

Encontre o vetor tangente à imagem de  $\gamma$  sobre a superfície correspondente ao valor  $t_0 = 2 \in [-3, 3]$  do parâmetro.

---

<sup>6</sup>depois que tiver certeza que entendeu pode para antes da centésima, mas não se engane.

14. Para cada uma das funções definidas abaixo, calcule as equações paramétricas da imagem da curva

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (3t, 4 - 2t) ; t \in [-3, 3] \quad (1.16)$$

sobre a superfície  $\text{graf}(f)$

$$a) f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3; b) f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (1.17)$$

15. campo vetorial tangente a uma curva Considere a curva plana

$$\gamma = (x(t), y(t)) = (t \cos(t), t \sin(t)) ; t \in [0, 2\pi] \quad (1.18)$$

e a superfície

$$\text{graf}(f) ; f(x, y) = x^2 + y^2$$

Encontre os vetores tangentes à imagem desta curva na superfície  $\text{graf}(f)$  com  $f(x, y) = x^2 + y^2$  para os valores do parâmetro iniciando em  $t_0 = 0$  até  $t_n = 2\pi$  com passo 0.2 e obtenha o gráfico com `gnuplot` deste campo vetorial. Objetivo: ver a sugestão da imagem da curva na superfície que se encontra na figura (1.3) página 27, mas, feito com `gnuplot`, você terá

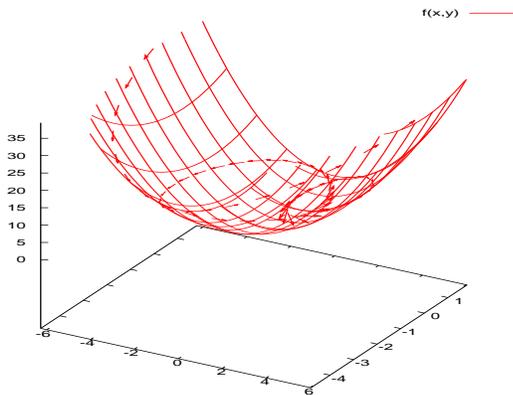


Figura 1.3: Campo vetorial - aproximação de curva

a chance de rodar o gráfico usando o ratinho.



## Capítulo 2

# Derivadas de funções bivariadas

### 2.1 A derivada

Mais geral que os vetores é um objeto chamado *matriz*, porque os vetores são também matrizes. Vetores são matrizes de um tipo particular, tem uma única linha, ou uma única coluna.

**Exemplo 4** *Uma matriz 3 x 4.*

*Considere o esquema formado por 12 números dispostos da maneira regular que abaixo se vê.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

*Podemos aí ver quatro vetores-coluna cada um com três coordenadas ou podemos ver três vetores-linha cada um com quatro coordenadas. As duas maneiras de ver são válidas. As matrizes generalizam os números, enquanto que estes contém uma única informação de uma medida feita, agora as matrizes contém várias informações oriundas de distintas medições feitas que podem até ser de naturezas diferentes entre si. Por exemplo, uma matriz pode conter taxas de variação de preços, numa linha e na seguinte as taxas de variação de demanda por unidade dos produtos de uma empresa.*

*As matrizes se aplicam hoje em uma incontável quantidade de situações e algumas vezes não representam números, mas informações estratificadas. É com frequência o caso, quando se encontra o termo no contexto de processamento de dados. Neste livro as matrizes serão sempre uma generalização de números, quase sempre serão taxas múltiplas de variação como nos próximos exemplos.*

**Exemplo 5** *Equação da reta e equação plano.*

Vamos evidenciar as semelhanças entre as equações da reta e do plano.

Uma expressão como

$$y = ax + b = f(x), \quad (2.2)$$

no plano, representa uma reta, porque a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  é constante. Quer dizer, se

$$x \mapsto x + \Delta x \quad (2.3)$$

então

$$y(x) \mapsto y(x + \Delta x) \quad (2.4)$$

de tal modo que

$$y(x + \Delta x) - y(x) = \Delta y = a\Delta x. \quad (2.5)$$

Uma outra forma de repetir o que foi dito acima é: “se construirmos uma progressão aritmética de razão  $\Delta x$  com a variável  $x$ , produziremos a progressão aritmética de razão  $a\Delta x$  com a variável  $y$ ”.

A consequência disto é que o gráfico de  $f$  contém qualquer progressão aritmética do tipo mencionado acima, é uma reta. E, reciprocamente, como numa reta podemos considerar qualquer progressão aritmética, todas com a mesma razão (o coeficiente angular da reta), então a equação de qualquer reta é da forma (2)

Podemos sempre escrever a equação (2) na forma

$$f(x) = a(x - x_0) + y_0 \quad (2.6)$$

como se seguintes cálculos mostram

$$f(x) = y = ax + b \quad (2.7)$$

$$f(x) = y = a(x - x_0) + ax_0 + b = \quad (2.8)$$

$$f(x) = y = a(x - x_0) + y_0 ; y_0 = ax_0 + b \quad (2.9)$$

$$f(x) = a(x - x_0) + y_0 \quad (2.10)$$

$$f(x_0) = y_0 \quad (2.11)$$

evidenciando que é a reta que passa no ponto  $(x_0, y_0)$  e que tem coeficiente angular  $\underline{a}$ .

O número  $\underline{a}$  é a derivada constante de  $f$  :

$$a = f'(x). \quad (2.12)$$

Se considerarmos, agora, a expressão

$$z = g(x, y) = ax + by + c, \quad (2.13)$$

ela irá representar também uma figura de tipo linear, porque, se  $g$  for associada a progressões aritméticas das variáveis  $x$  ou  $y$ , separadamente ou em conjunto, correspondem progressões aritméticas da variável  $z$  com razões obtidas por multiplicação pelos coeficientes  $a, b$  :

$$\Delta g = g(x + \Delta x, y + \Delta y) - g(x, y) = \quad (2.14)$$

$$= a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c - (ax + by + c) = \quad (2.15)$$

$$= a(x + \Delta x) - ax + b(y + \Delta y) - by = \quad (2.16)$$

$$= a\Delta x + b\Delta y \quad (2.17)$$

$$\Delta g = a\Delta x + b\Delta y \quad (2.18)$$

Podemos escrever de uma forma bem simples este cálculos generalizando imediatamente os cálculos que fizemos no caso da equação da reta:

$$g(x, y) = z = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c, \quad (2.19)$$

$$\Delta g = a\Delta x + b\Delta y = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

com um produto de matrizes, que é uma nova forma de multiplicar. Se abstrairmos a forma particular do coeficiente multiplicativo e da variável, podemos dizer que, designando o vetor

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$z = g(x, y) = ax + by + c \quad (2.22)$$

$$g(X) = \mathcal{A}X + c; \quad (2.23)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$\Delta g = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \Delta X \quad (2.25)$$

$$z = g(X) = \mathcal{A}(X - X_0) + \mathcal{A}X_0 + c \quad (2.26)$$

$$z = g(X) = \mathcal{A}(X - X_0) + z_0; \quad z_0 = \mathcal{A}X_0 + c \quad (2.27)$$

$$z = g(x, y) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + z_0 \quad (2.28)$$

é a forma comum que têm as duas expressões, nos dois exemplos, (caso univariado e caso bivariado).

A equação (28) é a equação do plano que passa pelo ponto

$$(x_0, y_0, z_0) = (X_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.29)$$

sendo

$$\mathcal{A}X_0 + c = z_0 = g(x_0, y_0) \quad (2.30)$$

o valor de  $g$  no ponto  $X_0 = (x_0, y_0)$ .

No caso bivariado os coeficientes são multinúmeros, as matrizes.

Buscamos com as generalizações operar com conceitos mais complexos com a mesma formalidade com que operamos com os conceitos mais simples. Esta

forma como conseguimos quebrar a barreira dimensional e falar de fenômenos multidimensionais com a mesma linguagem com que falamos dos fenômenos unidimensionais.

Comparando com o exemplo univariado, vemos sintetizada na matriz os dois coeficientes “parciais” relativamente a  $x$  ou a  $y$  separadamente. Estes coeficientes são caracterizados como  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  chamadas derivadas parciais.

A denominação “derivadas parciais” é oriunda dos tempos em que os descobridores destes conceitos não conseguiam ver que tinham a derivada de funções multivariadas em suas mãos e criaram uma denominação muito feliz, ainda que escondesse o próprio conceito de derivada que levou um século para ser claramente compreendido: as derivadas parciais são os componentes da derivada, que é uma matriz que ficou sendo chamada de jacobiana.

### Exemplo 6 Generalização da reta tangente

Neste exemplo vou começar relembando a equação da reta tangente ao gráfico de uma função diferenciável  $y = f(x)$ , no ponto  $(a, f(a))$  que você pode ver na figura (2.1) página 32,

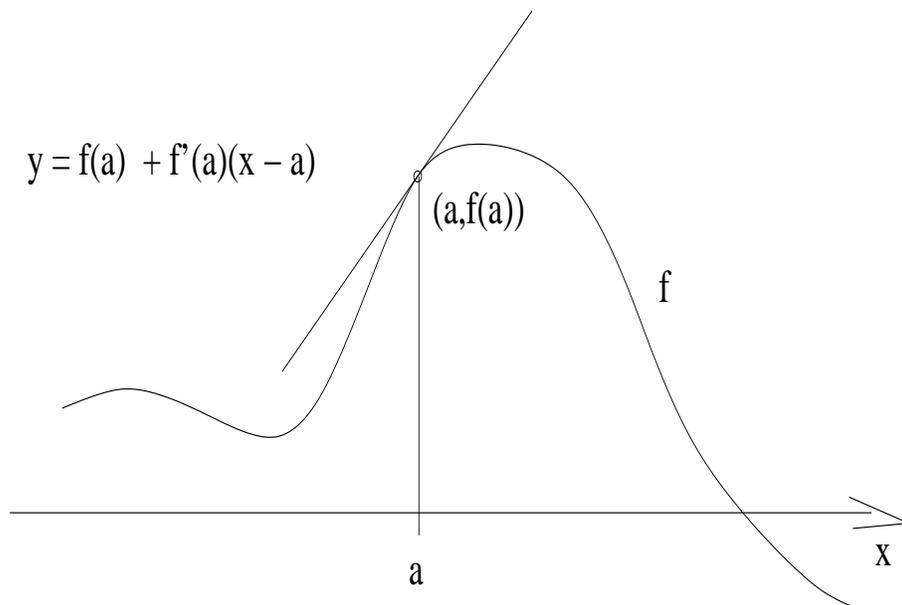


Figura 2.1: A reta tangente ao gráfico de  $f$

Em seguida, por comparação, vou apresentar a equação do plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável  $z = f(x, y)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

Vou partir da equação da reta que passa pelo ponto

$$(a, f(a)) \tag{2.31}$$

sendo tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  neste ponto. Os cálculos são

$$y = b + m(x - a) \quad (2.32)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2.33)$$

em (32) temos a equação da reta que passa no ponto  $(a, b)$  e tem coeficiente angular  $m$  e substituímos estas duas informações para obter a equação (33) que é de uma reta que passa no ponto  $(a, f(a))$  e tem coeficiente angular  $m = f'(a)$ .

Esta é a interpretação geométrica da derivada no caso univariado.

Vou fazer esta mesma interpretação geométrica para o caso bivariado, sem apresentar gráfico, mas vou escrever um `script` com `gnuplot` que lhe permitirá dar rotações no gráfico, usando o ratinho e ter uma visão, no caso bivariado, semelhante ao da figura (2.1).

A equação de um plano que passa no ponto  $(a, b, c)$ , é

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \quad (2.34)$$

$$z = c + A(x - a) + B(y - b) \quad (2.35)$$

$$P(x, y) = c + A(x - a) + B(y - b) ; P(a, b) = c \quad (2.36)$$

Na equação (36) escrevi a expressão do polinômio do primeiro grau em duas variáveis e você pode ver que  $P(a, b) = c$  o que significa que o gráfico deste polinômio passa no ponto  $(a, b, c)$ . O gráfico de um polinômio do primeiro grau em duas variáveis é um plano.

Se quisermos que este plano seja tangente ao gráfico de uma função diferenciável  $z = f(x, y)$  então vamos impor as condições

- $c = f(a, b)$  para que o plano passe no ponto

$$(a, b, f(a, b))$$

- $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}$  para que o coeficiente angular na direção do eixo  $OX$  coincida com derivada parcial de  $f$  nesta direção e,
- $B = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}$  para que o coeficiente angular na direção do eixo  $OY$  coincida com derivada parcial de  $f$  nesta direção.

As derivadas parciais de uma função bivariada também são funções bivariadas e foram calculada no ponto  $(a, b)$  é isto que indica a notação

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}$$

Uma outra forma de chegar nesta expressão consiste na derivação implícita de  $z = f(x, y)$

$$z = f(x, y) \quad (2.37)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2.38)$$

$$dz := z - c; \quad dx := x - a; \quad dy := y - b \quad (2.39)$$

na equação (39) fizemos a substituição das variáveis  $dx, dy, dz$  pelas expressões  $(x - a), (y - b), (z - c)$ .

Observe que usamos o símbolo “:=” para indicar foi uma substituição em que estamos usando a expressão diferencial como um modelo da expressão linear (equação do plano tangente) que aproxima localmente a função, se ela for diferenciável.

Esta é a interpretação geométrica da derivada: a derivada produz uma expressão linear que é tangente ao gráfico.

Posso aqui repetir a comparação com o caso univariado usando a notação de diferencial para obter a expressão da reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$

$$y = f(x) \quad (2.40)$$

$$dy = f'(x)dx \quad (2.41)$$

$$dx : x - a; \quad dy := y - b \quad (2.42)$$

$$y - b = f'(a)(x - a) \quad (2.43)$$

*O diferencial é um modelo para o objeto linear tangente.*

## Um script com gnuplot

No **script** a seguir você tem duas equações de funções bivariadas com as correspondentes equações de planos tangentes

- $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  e o plano tangente no ponto  $(a, b, f(a, b))$

$$z = q(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b)$$

- $z = g(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$  e o plano tangente no ponto  $(a, b, g(a, b))$

$$z = p(x, y) = g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b)$$

Copie este **script** para um terminal do **gnuplot**.

O comando **pause -2** serve para manter o gráfico que será trocado quando você der **enter**.

Com ratinho você pode produzir rotações no gráfico e assim ver a figura de distintos ângulos. Você tem assim um pequeno filme para ajudá-lo a entender o significado do plano tangente a uma superfície.

```
## a funcao f
f(x,y) = x**2 + y**2
## derivadas parciais
dfx(x,y) = 2*x
dfy(x,y) = 2*y
a = -2
b = 2
## equacao do plano tangente
q(x,y) = f(a,b) + dfx(a,b)*(x - a) + dfy(a,b)*(y - b)
## comando do gnuplot para fazer graficos bivariados
splot f(x,y), q(x,y)
pause -2
a = -5
b = 5
splot f(x,y), q(x,y)
pause -2
b = -5
splot f(x,y), p(x,y)
pause -2
## a funcao g
g(x,y) = x**2 - 3*x*y + y**2
## derivadas parciais
dgx(x,y) = 2*x - 3*y
dgy(x,y) = - 3*x + 2*y
a = -1
b = 1
## equacao do plano tangente
p(x,y) = g(a,b) + dgx(a,b)*(x - a) + dgy(a,b)*(y - b)
## comando do gnuplot para fazer graficos bivariados
splot g(x,y), p(x,y)
pause -2
a = -2
splot g(x,y), p(x,y)
```

A sequência de figuras (2.2) página 36, pretende dar-lhe uma visão do plano tangente ao gráfico de

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (2.44)$$

no ponto  $(-2, 2, f(-2, 2))$  mas certamente o script acima deve lhe dar uma visão mais dinâmica lhe permitindo rodar o gráfico até que consiga captar a tangência do plano. As figuras foram obtidas com **gnuplot** e fotografadas no terminal.

No script você também pode alterar a equação para obter outros gráficos.

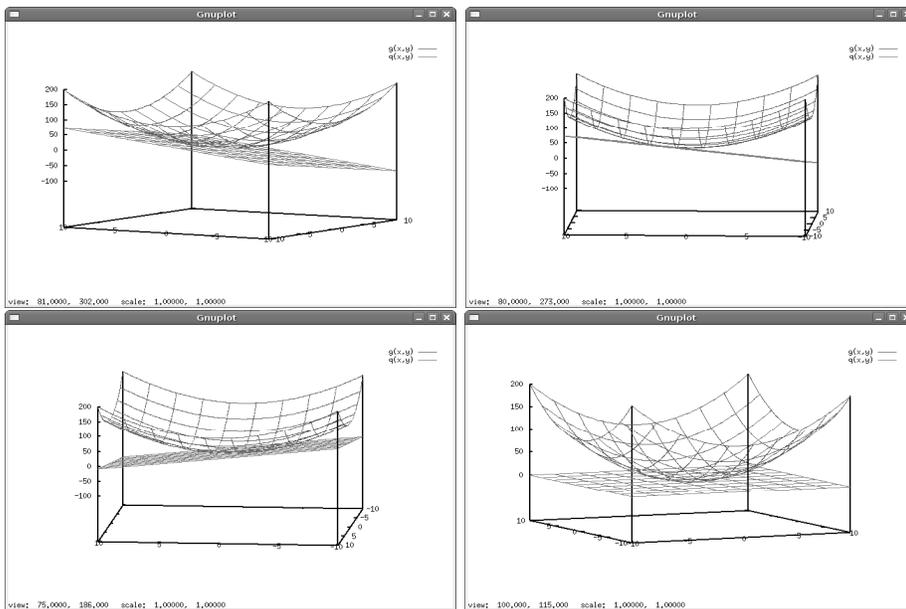


Figura 2.2:  $z = g(x, y) = x^2 + y^2$  e plano tangente  $z = q(x, y)$

### Observação 5 Interpretação geométrica

No próximo exemplo não tem sentido pensar-se em interpretação geométrica, observe que as dimensões do espaço de chegada e saída superam as nossas experiências geométricas. É importante se desligar da necessidade da interpretação geométrica porque ela tem alcance limitado. A matemática se aplica com grande sucesso em análises econômicas<sup>1</sup> e neste domínio facilmente caímos em espaços cuja dimensão passa de centenas pois se contam aos milhares os itens da Economia. Neste momento as matrizes e os programas de computador se tornam cruciais.

### Exemplo 7 Matriz dos coeficientes angulares: taxas de variação.

Seja  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ .

Uma tal função se chama vetorial porque sua imagem em cada ponto  $\underline{a}$  é um vetor

$$x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4 \quad (2.45)$$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_4) = (f_1(x), \dots, f_3(x)); \quad (2.46)$$

$$f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.47)$$

A variável vetorial, (45), a função vetorial, (46), com três funções-coordenadas que chamamos de componentes, algumas vezes, (47).

<sup>1</sup>não significa isto que as análises econômicas sejam feitas para beneficiar a população, como até deveriam.

Então no ponto  $a = (a_1, \dots, a_4)$ , a matriz

$$J(f)|_{(a_1, \dots, a_4)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

representa o coeficiente angular múltiplo de  $f$ .

Cada um dos números

$$\partial^{(i,j)}(f)|_{(a_1, \dots, a_4)} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_{(a_1, \dots, a_4)} \quad (2.49)$$

representa um coeficiente angular parcial, também chamado de derivada parcial de  $f_j$  com respeito à variável  $x_i$ . Quando calculado no ponto  $(a_1, \dots, a_4)$  produz um número, cada um deles é uma taxa de variação instantânea de uma componente em uma certa direção do espaço.

A notação  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  não é a melhor possível pois usa o símbolo  $x$  quando tudo que interessaria usar é o índice  $i$ . Uma notação mais precisa do que esta, existe, está indicada na equação (49), e você pode analisar a equivalência das duas. Aos poucos passarei a usá-la em lugar da notação tradicional.

A matriz dos coeficientes angulares parciais recebe o nome<sup>2</sup> de matriz jacobiana de  $f = J(f)$ .

Estamos aqui sob a suposição de que  $f$  é uma função diferenciável, nem todas as funções o são, como é bem conhecido no caso univariado.

Da mesma forma como uma função univariada

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

tem um único coeficiente angular num determinado ponto, se for diferenciável, também  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$  tem único “coeficiente angular múltiplo” representado pela matriz  $J(f)$ , jacobiana de  $f$ , no ponto  $(a_1, \dots, a_4)$  em que estas derivadas parciais foram calculadas, se  $f$  for diferenciável. O diferencial de  $f$  no ponto  $(a_1, \dots, a_4)$  é

$$\begin{aligned} df &= J(f)dx = & (2.50) \\ &= J(f) \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} & (2.51) \end{aligned}$$

que é uma expressão semelhante a do diferencial de funções univariadas:

$$df = f'(a)dx; \quad (2.52)$$

mas agora sob a forma de um produto de matrizes, porque a derivada é a matriz jacobiana.

---

<sup>2</sup>este é um resíduo de pre-conceito entre os muitos que existem em Matemática, a jacobina deveria ser chamada simplesmente de *derivada*

Este produto matricial pode ser expandido para se obter o que se chama de diferencial total:

$$df = J(f) \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} dx_4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} dx_4 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} dx_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

aqui uma matriz cujas linhas são diferenciais totais, e observe que agora nesta última equação tem-se uma igualdade entre dois vetores-coluna ou matrizes  $3 \times 1$ .

**Observação 6** Diferencial total e interpretação geométrica.

A denominação diferencial total vem de um tempo em que não se compreendia bem que matrizes podiam ser coeficientes angulares múltiplos então se tentava criar um número comum para obter alguma coisa semelhante ao coeficiente angular das funções univariadas.

O diferencial total é um número! Como é um número ele é uma ferramenta importante nas aplicações da derivada, por exemplo nas mudanças de parâmetros (mudanças de variáveis) que somos frequentemente obrigados a fazer.

Hoje a compreensão é clara que as matrizes são um bom coeficiente angular múltiplo.

A jacobiana é a derivada de uma função no ponto em que for calculada e representa neste ponto o seu coeficiente angular.

Coeficiente angular múltiplo, insistindo!

No caso univariado a reta tangente a  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  tem como coeficiente angular o número  $f'(a)$  e a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (2.54)$$

A equação da reta guarda estreita semelhança com o diferencial o que criou toda uma mitologia:

$$dy = f'(a)dx. \quad (2.55)$$

Um dos pontos mitológicos é que o diferencial é um infinitésimo, um conceito indefinido que atravessou mais de dois séculos. O modo moderno de sair deste mito é dizer que a equação (55) é a equação de uma reta paralela à reta tangente (eq. 3.3) passando na origem.

Outra forma de dizer é que o diferencial é um modelo para obter a equação da variedade linear tangente o que pode ser feito substituindo-se

$$dx := x - a \quad (2.56)$$

$$dy := f(x) - f(a) \quad (2.57)$$

se passa da equação à diferenças para a equação da reta tangente no ponto  $(a, f(a))$ .

As equações (56), (57), mostram como usar o modelo.

Finalmente o que há melhor para fazer com os infinitésimos é arquivá-los, junto com outras múmias sagradas, que devem descançar em paz nas salas respeitáveis dos museus, com o devido registro que muito fizeram para a nossa compreensão atual dos conceitos.

No caso bivariado ou multi-variado, troque-se reta por plano ou hiperplano.

O plano tangente ao gráfico de uma função bivariada é um plano que tem o mesmo coeficiente angular múltiplo que a função tiver no ponto de tangência.

A linguagem geométrica se esgota com a dimensão três. Variedade é a palavra que nomeia os entes geométricos que precisamos em dimensão maior do que três.

As retas são variedades de dimensão 1, os planos são variedades de dimensão 2, etc. . .

Uma função diferenciável

$$\mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m \quad (2.58)$$

terá uma variedade de dimensão  $n \times m - 1$  que é tangente ao seu gráfico em cada um dos pontos em que ela for diferenciável, em que  $n, m$  são as dimensões dos espaços de saída e chegada.

Observe a dimensão da variedade tangente:  $n \times m - 1$ , ela é maior variedade linear própria contida no espaço  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e se chama por isto um hiperplano.

Os hiperplanos são, assim, os sub-espacos máximos próprios de um espaco de dimensão  $n$ . Neste contexto os hiperplanos são os espacos de dimensão  $n - 1$ .

A lista que segue não deve ser decorada, deve ser usada e relida quando necessário. Não está aqui para servir de exemplo da linguagem esquisita que nós Matemáticos inventamos para falar, mas como exemplos de noções que nos liberam para uma concepção mais abstrata do Universo.

O conceito variedade está para a Geometria como polinômio está para Álgebra, usamos a palavra polinômio para evitar de contar quantos termos tem numa expressão algébrica.

- os pontos são os hiperplanos das retas;
- as retas são os hiperplanos dos planos;
- os planos são os hiperplanos dos espacos tridimensionais;
- um subespaco tridimensional é um hiperplano de um espaco de dimensão quatro;
- um subespaco de dimensão  $n - 1$  é um hiperplano de um espaco de dimensão  $n$ .

Variedade é um sinônimo de objeto geométrico do espaco,

- um ponto é uma variedade de dimensão zero;
- uma reta é uma variedade linear de dimensão 1;
- uma curva é uma variedade de dimensão 1, e pode ser uma reta. Se quisermos salientar que não é uma reta, diremos que é uma variedade não linear de dimensão 1;
- o círculo unitário é uma variedade não linear de dimensão 1;
- um plano é uma variedade linear de dimensão 2;
- uma superfície é uma variedade de dimensão 2 que pode ser linear ou não linear;
- a fronteira de uma esfera é uma variedade de dimensão 2 não linear;
- a esfera com o seu interior é uma variedade de dimensão 3 não linear;
- o espaco tridimensional é uma variedade linear de dimensão 3, uma sub variedade linear do espaco de dimensão quatro;

O conteúdo do exemplo anterior consiste em mostrar que as matrizes se multiplicam de forma semelhante como se multiplicam os números e a consequente comparação entre o diferencial nos casos univariado e multivariado:

$$\text{um "produto de números comuns"} \quad (2.59)$$

$$df = f'(a)dx \quad (2.60)$$

$$\text{caso de função univariada ;} \quad (2.61)$$

$$\text{ou o "produto matricial"} \quad (2.62)$$

$$df = J(f)dx \quad (2.63)$$

$$\text{caso de função multivariada} \quad (2.64)$$

Podemos unificar a notação, em ambos os casos podemos escrever:

$$df = f'(a)dx \quad (2.65)$$

que passará a representar o diferencial de uma função em qualquer caso e apenas lançaremos mão de  $J(f)$  se o contexto for ambíguo<sup>3</sup>.

Usamos este exemplo do Cálculo para mostrar que tem sentido a multiplicação de matrizes. O próximo exemplo pode também ser descrito com as palavras do Cálculo e nós o faremos em seguida.

<sup>3</sup>A notação  $J(f)$  tem o defeito de não indicar que as derivadas se calculam num ponto como na notação  $f'(a)$ .

Métodos numéricos e equações diferenciais ordinárias  
Tutorial sobre Pol de Taylor  
T. Praciano-Pereira

Lista numero  
tarcisio@member.ams.org  
Dep. de Matemática

**alun@:**

---

---

Univ. Estadual Vale do Acaraú

17 de junho de 2007

---

---

Documento escrito com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X - sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

**Exercícios 4** Assunto: Tutorial sobre Polinômio de Taylor objetivo: Fazer um uso intenso de Polinômios de Taylor associados com equações diferenciais ordinárias. O objetivo nesta disciplina é solução de equações diferenciais aproximadamente associando-as sempre com suas aplicações. Os polinômios de Taylor são uma representação aproximada de funções e aqui uma representação aproximada de soluções de equações diferenciais. Inicialmente vamos aprender a ferramenta, depois vamos usá-la.

palavras chave: Polinômio de Taylor, equações diferenciais ordinárias, série de potências.

As série de Taylor é um caso particular de série de potência.

**Definição 4** Série de potência

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2.66)$$

expandida na origem, ou, de forma mais geral,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k \quad (2.67)$$

a série expandida no ponto  $x = a$ .

1. Raio de Convergência Suponha que a partir de um índice  $k_0$  o coeficiente da série seja dominada por uma progressão geométrica de razão  $r$

- (a) Mostre que se  $|x| < \frac{1}{r}$  então a série de potências (66) converge uniformemente.
- (b) Mostre que se  $|x| > \frac{1}{r}$  a série de potências (66) pode não convergir.
- (c) Mostre com um exemplo que não se pode dizer nada quando  $|x| = \frac{1}{r}$

**Solução 1** Vou começar discutindo o que acontece com  $s \in B(0, \frac{1}{r})$ .

A figura (2.3) página 42, mostra o significado do raio de convergência quando consideramos números complexos<sup>4</sup>

Vou continuar escrevendo no caso real, mas pensando no caso mais amplo, dos números complexos, em particular quando fizer interpretações geométricas.

O disco de raio  $\frac{1}{r}$  é o disco de validade de uma série de potências.

Observe que o raio do disco é  $\frac{1}{r}$  e veja as contas mais abaixo para entender porque que tem que ser assim.

Fora deste disco não podemos garantir a convergência, um novo estudo tem que ser feito (nem garantir que não converge, a priori). Inclusive,

---

<sup>4</sup>no plano complexo  $z = x + iy$  (generalizando o caso real). Para o caso real considere apenas o intervalo  $[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}]$  que é o disco na reta.

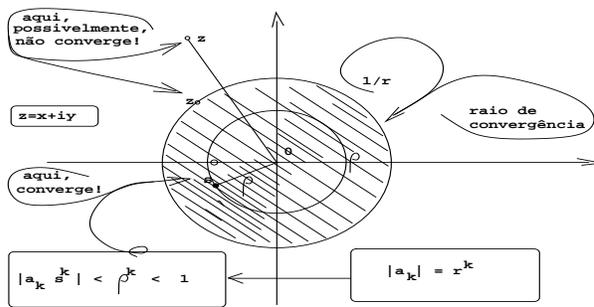


Figura 2.3: Disco de convergência da série de potências

na fronteira do disco, nada se pode dizer. São os pontos marcados com a letra  $\underline{z}$  na figura (2.3).

Dentro do disco se tem convergência uniforme (que é a convergência mais poderosa que existe, que neste caso se compara com a convergência de séries geométricas). Um exemplo é o ponto marcado com a letra  $\underline{s}$ , na figura (2.3).

As contas que provam o que acabei de dizer são

$$\sum_{k=k_0}^n a_k s^k = \sum_{k=k_0}^n r^k s^k = \quad (2.68)$$

$$\sum_{k=k_0}^n (rs)^k \leq \sum_{k=k_0}^n (\rho)^k < \infty \quad (2.69)$$

Na equação (68) estou usando a hipótese de que a partir de um índice,  $\underline{k_0}$  a sucessão dos coeficientes é a progressão geométrica de razão  $\underline{r}$ , e na equação (69) estou usando a condição

$$|s| < \frac{1}{r} \equiv rs = \rho < 1 ; s \in B(0, \frac{1}{r}) \quad (2.70)$$

e portanto o produto  $rs = \rho < 1$  quando vemos que se trata duma progressão geométrica de razão menor do que 1, (convergente).

Se os coeficientes da série forem uma progressão geométrica (exatamente) está tudo dito acima, e a convergência fica restrita ao disco de raio  $\underline{\frac{1}{r}}$ , o disco de convergência.

Sobre a fronteira do disco nada se pode dizer, para cada valor de  $x$  sobre a fronteira se pode ter ou não convergência, em geral se tem a convergência chamada condicional.

No primeiro item a hipótese diz que os coeficientes da série são dominados por uma progressão geométrica. Isto significa que eles são menores ou iguais aos termos de uma progressão geométrica.

**Exemplo 8** *Uma função com raio de convergência infinito*

Um bom exemplo para este caso é o que acontece com a série cujos coeficientes são  $\frac{1}{n!}$ . Os coeficientes não formam uma progressão geométrica mas são menores do que qualquer progressão geométrica, a partir de um certo ponto:

O quadro abaixo, obtido com calc (veja o programa abaixo), mostra alguns exemplos de progressões geométricas cujos inversos dominam o inverso do fatorial, (no quadro os valores estão invertidos, porque os coeficientes seriam muito pequenos e a visualização ficaria muito mais difícil).

índice	$\frac{1}{a_m}$	$r^m$
$r$	$m$	$m! > r^m$
2	4	$4! > 2^4 = 16$
3	7	$7! > 3^7 = 2187$
4	9	$9! = 362880 > 4^9 = 262144$
5	12	$12! = 479001600 > 5^{12} = 244140625$
6	14	$14! = 87178291200 > 5^{14} = 78364164096$
	:	
10	25	$25! = 15511210043330985984000000 > 10^{25}$

$10^{25}$  é a unidade seguida de 25 zeros...

O quadro sugere que

$$(k + 3)! > k^{k+3} \tag{2.71}$$

que é verdade para  $k = 0, 1, 2$ . O programa em calc para conseguir esta simulação é o seguinte:

```
define f(r,n) {return power(r,n);}
define g(n) {return fact(n);}

define lista(a, fim)
{
    local n=1;
    while(n < fim)
    {
        if ( g(n) > f(a,n) )
            {printf('' %d %d %f \n'',n, g(n), f(a,n));}
        n++;
    }
}
```

}

*Uma experiência como esta não é uma demonstração mas cria condições para que descobrir teoremas e suas demonstrações.*

*Do quadro podemos inferir que os valores de  $m$  tal que*

$$m! > n^m \quad (2.72)$$

*parecem satisfazer a uma progressão aritmética de razão 2 ou 3.*

$$4, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25 \quad (2.73)$$

*então é melhor usar a versão mais segura da hipótese, a progressão aritmética de razão 3:*

### **Hipótese 1 de indução**

*Vamos supor que para um valor arbitrário de  $k$  seja verdadeiro*

$$(k + 3)! > k^{k+3} \quad (2.74)$$

*e vamos verificar o que acontece com o valor seguinte de  $k$ . Quero estudar a relação entre os números*

$$(k + 1 + 3)! > (k + 1)^{k+1+3} \quad (2.75)$$

$$\frac{(k+1+3)!}{(k+1)^{k+1+3}} = \frac{k+1+3}{k+1} \frac{(k+3)!}{(k+1)^{(k+3)}} > \quad (2.76)$$

$$> \frac{k+1+3}{k+1} \frac{k^{k+3}}{(k+1)^{(k+3)}} > \quad (2.77)$$

$$> \frac{k+1+3}{k+1} > 1 \quad (2.78)$$

*Na equação (77) estou usando a hipótese de indução, (74). Para obter a equação usei  $\frac{k^{k+3}}{(k+1)^{(k+3)}} > 1$  para finalmente concluir que*

$$\frac{(k + 1 + 3)!}{(k + 1)^{k+1+3}} > 1 \quad (2.79)$$

*ou equivalentemente que*

$$(k + 1 + 3)! > (k + 1)^{k+1+3} \quad (2.80)$$

*completando o último passo da demonstração por indução.*

*Demonstramos assim o teorema*

**Teorema** 2  $(m + 3)! > m^{m+3}$

Cujo corolário é

**Teorema** 3 O raio de convergência da série de potências

$$f(x) = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (2.81)$$

é infinito.

A expressão  $f(x)$  escrita na equação (81) é legal porque à direita se encontra uma expressão que tem limite quando  $n$  cresce indefinidamente. Para cada valor de  $x$  podemos encontrar um valor aproximado para  $f(x)$  substituindo o parâmetro por um inteiro maior e substituindo a expressão por uma série geométrica. No livro Cálculo Diferencial e Integral de R Courant você pode encontrar o cálculo de

$$f(1) = e \quad (2.82)$$

e vou fazer aqui o cálculo de

$$f(2) = e^2 \quad (2.83)$$

Observe que nenhuma das duas expressões, (82), (83) tem uma justificativa até agora. Eu as estou o método consumista, de lançar um “produto” na tela para ir acostumando o consumidor com a coisa. Mas você deve reagir.

$$f(2) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} = \quad (2.84)$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{2^k}{k!} < \quad (2.85)$$

$$< \frac{19}{3} + \sum_{k=4}^n \frac{2^k}{4^{k+3}} = \frac{19}{3} + \sum_{k=4}^n \frac{2^k}{2^{2k+6}} = \quad (2.86)$$

$$= \frac{19}{3} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^{k+6}} = \frac{19}{3} + \frac{1}{2^{10}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \quad (2.87)$$

$$= \frac{19}{3} + \frac{1}{2^{11}} \approx 6.33382161458333333333 \quad (2.88)$$

a menos de algum erro que fica por conta do leitor verificar, e deve haver, porque calc encontra o valor

$$e^2 \approx 7.389056098930650 \quad (2.89)$$

com uma diferença de quase 1, portanto devo ter cometido um erro na aproximação da série geométrica e o leitor benévolo pode corrigí-lo e enviar-me a correção e os malévolos que espalhem que não sei calcular que é uma verdade bem conhecida e não irá produzir nenhum efeito sensível sobre a minha reputação.

## 2. Séries

(a) Encontre a série de Taylor na origem de

$$f(x) = x + 1; g(x) = x + 3$$

e analise o resultado tirando suas conclusões.

(b) Se  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  qual seria a série de Taylor de  $f$  na origem ?

(c) Calcule a divisão (use o algoritmo da divisão euclidiana com as potências crescentes) veja o exemplo abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 1+x & 3+x \\ -1 - \frac{x}{3} & \frac{1}{3} + \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} \dots \\ \hline \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^2} & \end{array}$$

(d) Verifique que a divisão com as potências crescentes produz a série de Taylor de

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}$$

(e) A função  $f$  tem uma discontinuidade no ponto  $x = -3$ , determine um disco máximo em que a série poderia convergir, considerando esta discontinuidade.

(f) Calcule o raio de convergência da série usando a série de Taylor.

3. Calcule a série de Taylor expandida em zero de

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

4. Série de Taylor Multivariada. Desenvolva a série de Taylor de

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

no ponto  $(a, b) = (1, 1)$ .

5. Série de Taylor. Considerando que  $y = f(x)$  é uma solução particular do problema

$$\begin{aligned} y' + 3y &= \cos(x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \end{aligned}$$

encontre o polinômio de Taylor de  $y = f(x)$  de ordem 10 no ponto  $a = \frac{\pi}{2}$ .

6. Considere uma função  $f$  definida por dois arcos de parábola num intervalo contendo a origem

$$x - ax^2, ax^2 + x$$

de modo a ser periódica na reta e simular uma senoide.

(a) Defina  $f$  para  $x \in \mathbb{R}$  e calcule o seu período, (comprimento de onda).

(b) **definições:**

- sobre-tom: de uma função periódica a soma dos termos de sua Série de Fourier posteriores ao primeiro termo não constante, e
- distorção harmônica: à percentagem da norma  $\| \cdot \|_2$  de  $f$  representada pela norma  $\| \cdot \|_2$  do sobre-tom.

Escolha “a” para que a distorção seja mínima.

**Exemplo 9** Dependência linear.

Uma indústria depende de quatro itens básicos na composição de seu produto final e descreve com 3 funções o seu custo de produção :

$$C = \begin{cases} C_1(x_1, \dots, x_4) = \text{custo de insumos} \\ C_2(x_1, \dots, x_4) = \text{custo de produção} \\ C_3(x_1, \dots, x_4) = \text{custo de distribuição} \end{cases} \quad (2.90)$$

Estas funções não existem na prática, pelo menos não sob forma de uma equação algébrica, mas sob forma de um processo estatístico, ou planilha de cálculo, que cuidadosamente levado em dia, permite que a empresa determine as flutuações <sup>5</sup> de mercado dos preços dos produtos assim como as flutuações dos custos de produção e de distribuição :

$$\text{taxas, parciais, de variação de custo dos insumos/produto :} \quad (2.91)$$

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}), \quad (2.92)$$

$$\text{taxas, parciais, de variação de custo de produção /produto :} \quad (2.93)$$

$$(a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24}), \quad (2.94)$$

$$\text{taxas, parciais, de variação de custo de distribuição /produto :} \quad (2.95)$$

$$(a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34}), \quad (2.96)$$

Estas taxas de variação são colhidas na unidade mínima de tempo que seja natural para o planejamento da empresa, digamos, diariamente, numa economia de inflação alta, ou mensalmente numa economia de inflação reduzida. Assim, a matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_3} & \frac{\partial C_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_3} & \frac{\partial C_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial C_3}{\partial x_1} & \frac{\partial C_3}{\partial x_2} & \frac{\partial C_3}{\partial x_3} & \frac{\partial C_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

---

<sup>5</sup>leia: “taxas de variação ”

descrita acima linha por linha, representa o coeficiente angular múltiplo no instante em que foi colhida: dia ou mes.

Mas especificamente,

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1}$$

é a taxa de variação da função  $C_1$ , custo dos insumos relativamente ao produto  $x_1$ . Identicamente

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2}$$

é a taxa de variação da função  $C_1$ , custo dos insumos relativamente ao produto  $x_2$ , e assim sucessivamente.

Suponha agora que  $a_{33} = 0$  significando que o item 3 na composição dos produtos da empresa está com sua taxa de variação de custos estabilizada: não cresce nem decresce. Não necessariamente isto implica que  $a_{23} = 0$  porque o custo de produção não reflete e nem precisa ser refletido diretamente pelo custo de distribuição. Uma melhoria nos transportes e outros aspectos de infra-estrutura podem tornar mais barata a distribuição e ao mesmo tempo um aumento de preço do item 3 vai acarretar que  $a_{23} \neq 0$

Mostramos assim com um exemplo que as linhas da matriz  $3 \times 4$   $\mathcal{A}$  acima são independentes. Por definição, duas linhas de uma matriz, ou dois vetores quaisquer, são **linearmente dependentes** se um for múltiplo do outro. Então, se forem dependentes uma mesma coordenada não pode ser num deles zero enquanto que no outro é diferente de zero. A definição de dependência linear não fica tão simples para um conjunto com mais de dois vetores.

**Exemplo 10** Diferencial e aproximação .

Consideremos, de acordo com o exemplo anterior, a matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

representando as variações dos custos da indústria. Se a função

$$C = (C_1, C_2, C_3)^t \quad (2.99)$$

for a função de custos desta empresa, então  $\mathcal{A}$  representa a matriz de variação de custos então o produto das matrizes  $3 \times 4$ , de variação dos custos com o a matriz  $4 \times 1$ , de variação do tempo resulta na matriz  $d \ 3 \times 1$  que é o vetor da variação de custos da produção da indústria,  $dC$ :

$$\mathcal{A} \cdot dx = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = d \quad (2.100)$$

$$= C'(a) \cdot dx = dC \quad (2.101)$$

Uma outra forma de ver o produto de matrizes é como função linear, neste caso  $d$  é a imagem de  $dx$  por uma função cuja equação é um produto pela matriz  $A = C'(a)$ .

Vimos assim surgir o mesmo exemplo de dois modos diferentes os dois exemplos representam a mesma situação,  $a_{ij} = \frac{\partial C_i}{\partial x_j}$  em que  $C : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é função que modela o custo da economia em que se encontra inserida a empresa em questão cujo universo econômico se reduz a quatro variáveis neste exemplo. Em geral um problema econômico tem muito mais variáveis do que essas que acabamos de expor. O exemplo serve em sua simplicidade para ilustrar o produto de matrizes, mostrando que elas são um novo tipo de número, um número que contém múltiplas informações a um só tempo: um multi-número.

A (eq. 2.101) é uma expressão Matemática que na prática raramente pode ser usada porque  $C'(a)$  representa uma derivação exata obtida com um cálculo de limites. A expressão que se vai usar na prática será:

$$A \cdot dx = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = d \quad (2.102)$$

$$= C'(a) \cdot \Delta x = \Delta C \quad (2.103)$$

Nesta última se deixa claro, com as expressões  $\Delta x_i, \Delta x, \Delta C$  que se tem cálculos aproximadas e não formais.

**Observação 7** Aproximação diferencial e modelagem.

Uma das lições que podemos tirar do presente exemplo é que a existência de uma função, como a função de custos  $C$ , não se dá diretamente através de uma equação mas sim tudo o que temos é sua aproximação diferencial:

$$C(x) \approx C(a) + C'(a)\Delta x \quad (2.104)$$

a partir do valor contabilizado de custos no ponto  $a$  e com as informações estatísticas que chegam indicando as distintas taxas de variação  $J(C) = C'(a)$  é possível determinar-se o custo previsível na variação de tempo correspondente às taxas de variação dos insumos “ $dx$ ”. O cronômetro de uma empresa é, com frequência, o controle de estoques... É ainda interessante observar que a palavra “aproximação” está sendo usada num sentido histórico e folclórico: não existe nenhuma função  $C$  para ser aproximada. A aproximação diferencial é tudo que se sabe sobre a função  $C$ , na prática é a função.

A aproximação diferencial representa, desta forma uma modelagem da realidade a partir de dados obtidos estatisticamente.

Este exemplo também mostra que a regra básica para fazer produto de matrizes é que a dimensão intermediária entre elas coincida, no presente caso o 4. Podemos multiplicar uma matriz de ordem  $m \times n$  por outra de ordem  $n \times q$  não interessando o valor de  $m$  e de  $q$ .

**Exemplo 11** *O esquema da ordem das matrizes na multiplicação .*

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times q} \rightarrow C_{n \times q}$$

*em que os índices se encontram indicados em cada matriz.*

Há mais alguma coisa que podemos explorar no exemplo acima: que significaria se os coeficientes que formam a linha 3 fossem *dependentes dos coeficientes que formam a linha 2*, proporcionais queremos dizer, neste caso. Seria inútil e consequentemente representaria ter um custo superior ao necessário, mantê-los no processo pois a terceira coordenada do vetor de *variação de custos* seria proporcional à segunda coordenada e portanto poderia ser obtido a partir da segunda por simples multiplicação . A matriz *ótima* para esta análise econômica, neste caso seria  $2 \times 4$  eliminando-se uma linha de todas as matrizes.

Se uma matriz tiver linhas que dependam linearmente de outras, o problema pode ser simplificado eliminando-se as linhas *linearmente dependentes*, não todas, obviamente, de modo que as restantes formem um *conjunto de linhas linearmente independentes*.

**Observação 8** *Dependência linear e otimização .*

*A palavra chave aqui é otimização , se otimizou o controle eliminando linhas linearmente dependentes da matriz que contém os dados do processo industrial.*

*Se uma matriz tiver linhas que dependam linearmente uma das outras, o problema pode ser simplificado eliminando-se as linhas linearmente dependentes menos uma, que passa a representar as outras.*

*Voltaremos mais a frente a discutir este conceito de dependência linear.*

**Observação 9** *O que se conhece de uma função ?*

*Uma pergunta poderia ser feita: porque colocamos ênfase em  $f'(a)$  e não em  $f(a)$ ? O exemplo industrial anterior em certa forma responde a esta questão. Em geral não conhecemos  $f$  mas sim alguns de seus valores, digamos, numa coleção de nós  $(a_\alpha)_\alpha$ . É realístico acrescentar a hipótese de que também podemos medir os valores de  $f$  numa família  $(a_{\alpha,\beta})_\beta$  na vizinhança de cada mega-nó  $a_\alpha$  de modo que podemos calcular  $f'(a_\alpha)$  aproximadamente usando, o “levantamento” de dados,  $f(a_{\alpha,\beta})_\beta$ . Aqui  $\alpha, \beta$  são multi-índices, sendo  $\alpha$  o multi-índice que caracteriza os nós principais da rede e  $\beta$  caracterizam os nós finos na vizinhança de cada nó  $a_\alpha$ . Para diferenciá-los chamamos estes diferentes nós de mega-nós ou micro-nós.*

*Observe que a linguagem está apenas aparentemente mais complexa que a usada no Cálculo univariado, porque agora estamos tratando de problemas multi-dimensionais, agora também os índices tem que ter mais coordenadas, em princípio o número de coordenadas das variáveis do problema.*

## 2.2 Diferenciabilidade

### Derivada.

A definição univariada de derivada diz que  $f$  tem derivada no ponto  $c \in (A, B)$  se e somente se o limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

existir e neste caso o valor do limite é derivada:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c).$$

Uma forma equivalente de chegar a este resultado é descrever o limite como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c) - f'(c)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

que é a expressão da Fórmula de Taylor no caso univariado com  $n = 1$

$$f(c + \Delta x) \approx f(c) + f'(c)\Delta x$$

colocada dentro do limite do quociente significando com isto que a *maneira* como  $f(c + \Delta x)$  se aproxima de  $f(c) + f'(c)\Delta x$  é mais “forte” do que a *maneira* como  $\Delta x$  se aproxima de zero. Usaremos esta expressão para definir diferenciabilidade de funções multivariadas.

Vamos inverter o método da discussão feita na seção anterior.

Considere agora uma função

$$\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

definida numa região  $\mathcal{W}$  do plano, ver a figura (fig. 1.2), página 15. Considerando um ponto  $P \in \mathcal{W}$ , há múltiplas formas de se considerar a variação em volta de  $P$ , na (fig. 1.2) isto se encontra ilustrado com várias retas passando por  $P$  dentro de  $\mathcal{W}$ . Conseqüentemente há várias formas de se calcular a “taxa de variação” no ponto  $P$ .

#### Exemplo 12 Taxas de variação na encosta de um morro

*Uma situação semelhante a esta você pode encontrar na encosta de um morro que você estiver escalando. Há sempre uma direção na qual a subida é mais íngreme que também corresponde à descida mais violenta. Quando você quiser subir ou descer o morro, deverá evitar esta direção e tomar outra ao longo da qual a declividade é menor.*

*Também existe uma direção de declividade zero que você poderá tomar durante alguns instantes para descansar... mas não adiantará ficar nesta direção muito tempo, se você quiser subir ou descer.*

Vamos ver que existe um modo padrão de enfrentar esta indefinição .

Se usarmos a idéia discutida na seção anterior, vamos definir uma função diferenciável como sendo aquela que tem plano tangente em todos os pontos do gráfico como se pode fazer no caso univariado usando reta em vez de plano:

#### Definição 5 Função bivariada diferenciável

Uma função

$$\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathbb{R} ; \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$$

se diz diferenciável se em cada ponto  $(x, y, f(x, y))$  de seu gráfico houver um plano tangente.

Como a equação de um plano contido em  $\mathbb{R}^3$  é da forma

$$z - c = A(x - a) + B(x - b)$$

e neste caso o plano passa no ponto  $(a, b, c)$ , vemos que uma condição necessária para diferenciabilidade é que a equação do plano tangente seja

$$z - f(a, b) = A(x - a) + B(x - b) ; (a, b) \in \mathcal{W}.$$

Os números  $A, B$  são as taxas de variação da função linear

$$L(x, y) = A(x - a) + B(x - b) + c$$

quer dizer, que se considerarmos fixa uma das variáveis teremos uma função univariada e podemos calcular a derivada ordinária desta função relativamente a variável livre:

$$\frac{dL(x, y)}{dx} = A ; \text{ deixando } y \text{ fixo;} \quad (2.105)$$

$$\frac{dL(x, y)}{dy} = B ; \text{ deixando } x \text{ fixo;} \quad (2.106)$$

Uma notação resume isto:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = A \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = B \quad (2.108)$$

o símbolo “ $\partial$ ” significa que apenas uma das variáveis está sendo considerada no cálculo da taxa de variação, indicada no “denominador”.

Vemos assim que uma outra condição é necessária, para que  $f$  tenha um plano tangente no ponto  $(a, b, f(a, b))$  será preciso que suas taxas de variação parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

coincidam com os números  $A, B$  da equação do plano tangente e portanto a equação do plano tangente, se existir, será:

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - b) ; (a, b) \in \mathcal{W}.$$

O modo de calcular as derivadas  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  é exatamente o já sugerido anteriormente, considerando-se uma nova função apenas de uma variável, considerando a outra fixa, e calculando-se a derivada ordinária desta nova função.

## Exercícios 5 Derivação parcial

1. Escreva na forma vetorial<sup>6</sup> a equação da reta que passa nos pontos

$$P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (4, 3, 2).$$

2. Encontre a equação do plano que passa no ponto  $(1, 1, 1)$  e é paralelo ao plano  $XOY$ .

3. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, -2, 3)$ .

4. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  para:

(a)  $(a, b) = (1, 1)$ .

(b)  $(a, b) = (0, b)$  ;  $b \neq 0$ .

(c)  $(a, b) = (a, 0)$  ;  $a \neq 0$ .

5. Calcule as derivadas parciais das funções abaixo:

a)  $h(x, y) = \frac{xy}{y \cos(x+3)}$

c)  $h(x, y) = \frac{y \operatorname{sen}(x)}{y(x+3)}$

e)  $h(x, y) = e^{x^2}(y+3)(x+1)$

g)  $h(\rho, \theta) = \frac{\cos(\theta)}{\rho}$

i)  $h(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2 + y^2}$

k)  $h(x, y) = \frac{|x|}{|y|}$

m)  $h(x, y) = \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(y)}$

o)  $h(s, t) = \frac{s^2}{|t|}$

b)  $h(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{(x+3)\cos(x+1)}$

d)  $h(x, y) = \frac{1}{(y-2)(x+3)}$

f)  $h(x, y) = y \operatorname{sen}(x) \ln(x+3)$

h)  $h(x, y) = \frac{x \ln(y)}{(x+3)(x+1)}$

j)  $h(x, y) = \frac{y^2(x-2)}{(x+5)(y+3)(y+1)}$

l)  $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

n)  $h(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^3}$

$h(a, b) = \sum_{k=0}^n b e^{ka}$

6. Descreva o domínio das funções definidas na questão anterior.

Todos os teoremas do Cálculo univariado se aplicam aqui no que diz respeito a existência das derivadas parciais, assim como as regras operatórias e derivação.

Uma única diferença vai fazer com a teoria fique um pouco mais complexa. Enquanto que no Cálculo univariado a existência da reta tangente já dizia tudo, agora a existência das derivadas parciais é apenas uma condição necessária para a diferenciabilidade.

Vamos tirar da própria definição a condição necessária e suficiente. Ela diz que uma função é diferenciável se tiver um plano tangente em cada um dos pontos  $(a, b, f(a, b))$  de seu gráfico. Tudo que precisamos é “algebrisar” a expressão geométrica “tangente”.

---

<sup>6</sup>o ponto  $(x, y, z)$  da reta é múltiplo de um vetor dado.

Se compararmos com o caso univariado, isto significava que o limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existisse. Como agora temos dois acréscimos,  $\Delta x, \Delta y$ , ficamos impossibilitados de diretamente escrever a generalização usando a divisão, mas podemos dividir pelo módulo do vetor  $(\Delta x, \Delta y)$  e escrever uma condição suficiente semelhante ao caso univariado:

$$\lim_{|(\Delta x, \Delta y)| \rightarrow 0} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)|}{|(\Delta x, \Delta y)|} = 0$$

Se este limite existir, for zero, então  $f$  é diferenciável no ponto  $(a, b) \in \mathcal{W}$  e sua derivada neste ponto é o plano tangente, sendo os números

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

suas derivadas parciais neste ponto.

Isto é um teorema:

**Teorema 4** *Diferenciabilidade de funções bivariadas*

Se  $\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  estiver definida em todos os pontos de  $\mathcal{W}$  e em cada ponto  $(a, b) \in \mathcal{W}$  existir o limite

$$\lim_{|(\Delta x, \Delta y)| \rightarrow 0} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)|}{|(\Delta x, \Delta y)|} = 0 \quad (2.109)$$

então o plano

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (2.110)$$

é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

Vice versa, se em todos os pontos do aberto  $\mathcal{W}$  a função tiver um plano tangente

$$z - f(a, b) = -A_{a,b}(x - a) - B_{a,b}(y - b) \quad (2.111)$$

tal que o limite (109) exista com  $A_{a,b}, B_{a,b}$  em lugar das derivadas parciais, então  $f$  é derivável e as funções  $A_{x,y}, B_{x,y}$  são as suas derivadas parciais. **Dem**:

Antes de diretamente prosseguir fazendo a demonstração, vamos fazer alguns comentários.

Uma das condições que não fica diretamente visível a partir do teorema é que para que  $f$  seja diferenciável é preciso poder calcular o quociente acima considerando um vetor  $(\Delta x, \Delta y)$  a volta do ponto  $(a, b) \in \mathcal{W}$ . Consequentemente se  $\mathcal{W}$  tiver uma fronteira, não poderemos calcular derivadas na fronteira usando aquela expressão a não ser que anexemos a condição

$$(a + \Delta x, b + \Delta y) \in \mathcal{W}, \quad (2.112)$$

que equivale, no caso univariado, as derivadas laterais.

Para evitar esta complicação o teorema em geral é enunciado com a hipótese “ $\mathcal{W}$  é aberto”. Vamos prosseguir com a demonstração usando esta hipótese para evitar os detalhes do que se possa passar sobre a fronteira.

Perdõe nos o leitor ainda mais um comentário, o que interessa, na maioria das situações em que se usam funções diferenciáveis, é que ela o seja em uma vizinhança de qualquer ponto em que ela seja estudada. Os casos *fronteiriços* pertencem ao domínio dos problemas finos (que também existem e nem sempre raramente), portanto a hipótese de que  $\mathcal{W}$  seja um aberto, é mais do que uma comodidade, reflete a necessidade mais comum: *não se espera que o comportamento<sup>7</sup> dos fenômenos seja abrupto, nem mesmo na análise de suas taxas de variação.*

(  $\Rightarrow$  ) Então, por hipótese, em cada ponto  $(a, b) \in \mathcal{W}$  vale

$$\lim_{|(\Delta x, \Delta y)|=0} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)|}{|(\Delta x, \Delta y)|} = 0 \quad (2.113)$$

Como numerador e denominador tem limite 0 então esta condição indica que o zero do numerador é de **ordem** menor do que o zero do denominador que é uma expressão quadrática isto quer dizer que o plano

$$f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (2.114)$$

e o gráfico de  $z = f(x, y)$  tem um grau de aproximação superior ao de uma função quadrática, isto é o que caracteriza uma tangência, portanto o plano

$$f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) \quad (2.115)$$

é tangente ao gráfico de  $f$  e pela definição de derivada  $f$  é diferenciável em todos os pontos do *interior* de  $\mathcal{W}$ .

(  $\Leftarrow$  ) Reciprocamente, se o plano

$$z = f(a, b) - A_{a,b}(x - a) - B_{a,b}(y - b) \quad (2.116)$$

for tangente ao gráfico, por definição de tangência se tem o limite

$$\lim_{|(\Delta x, \Delta y)|=0} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - A_{a,b}(x - a) - B_{a,b}(y - b)|}{|(\Delta x, \Delta y)|} = 0 \quad (2.117)$$

Sendo o plano, tangente ao gráfico, as suas derivadas parciais,  $A_{a,b}, B_{a,b}$  têm que coincidir com as derivadas parciais de  $f$ , quer dizer

$$A_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.118)$$

$$B_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.119)$$

**q.e.d .**

O teorema se generaliza imediatamente para um número qualquer de variáveis com alguma dificuldade notacional.

A expressão de *diferenciabilidade* em duas ou mais variáveis é *qualitativa-mente* superior a definição univariada. Para começar observe que usamos diretamente a expressão da fórmula de Taylor do primeiro grau. No caso univariado, compare, isto é desnecessário, mas pode ser feito, a diferença se encontra em que agora as expressões são vetoriais o que nos forçou a correr para uma expressão mais profunda que se encontra escondida no caso univariado onde tudo é número.

Se analisarmos com mais profundidade o teorema 4, vemos que ele afirma que o gráfico da função  $f$  se assemelha fortemente ao plano tangente no ponto

---

<sup>7</sup>este sentimento nos governa no dia a dia, por exemplo dirigindo um carro se espera que o motorista que vem em sentido contrário respeite, sempre, cuidadosamente, o limite entre as duas pistas...

de tangência  $(a, b, f(a, b))$  que é, afinal de contas o motivo central da *fórmula de Taylor*. Isto nos indica que o estudo dos gráficos das funções multivariadas se encontra intimamente ligado ao estudo das transformações lineares que foi o nosso objetivo inicial neste capítulo. Justifica-se assim bem o esforço que fizemos em entender as transformações lineares como instrumento para compreender as superfícies.

**Observação 10** *A verdadeira natureza da derivada*

No cálculo univariado a derivada é “falsamente” um número, somente no cálculo multivariado é que vamos encontrar a verdadeira natureza da derivada, uma matriz. Esta matriz se chama Jacobiana, quer dizer, quando escrevemos  $J(f)_P$  queremos dizer  $f'(P)$  em que  $P$  é um ponto do domínio da função  $f$ .

Na expressão da diferenciabilidade, teorema 4, página 54, aparece a matriz

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right] \tag{2.120}$$

aplicado ao vetor  $(\Delta x, \Delta y)$ . Esta é a derivada de  $f$ .

**Definição 6** *Jacobiana*

A matriz formada pelas derivadas parciais, calculadas em um ponto  $P \in \mathcal{W}$  é a derivada de  $f$  e se chama “Jacobiana de  $f$ ”.

No caso particular em que  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função numérica, a  $J(f)$  se chama “gradiente”:

$$J(f) = \text{grad}(f). \tag{2.121}$$

**Exercícios 6** *Derivada, diferencial, gradiente*

1. Escreva  $\text{grad}(h)$  em cada um dos casos abaixo:

- |  |   |
|--|---|
| a) $h(x, y) = \frac{xy}{y \cos(x+3)}$            | b) $h(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2)}{(x+3)\cos(x+1)}$ |
| c) $h(x, y) = \frac{y \text{sen}(x)}{y(x+3)}$    | d) $h(x, y) = \frac{1}{(y-2)(x+3)}$                   |
| e) $h(x, y) = e^{x^2}(y+3)(x+1)$                 | f) $h(x, y) = y \text{sen}(x) \ln(x+3)$               |
| g) $h(\rho, \theta) = \frac{\cos(\theta)}{\rho}$ | h) $h(x, y) = \frac{x \ln(y)}{(x+3)(x+1)}$            |
| i) $h(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2+y^2}$   | j) $h(x, y) = \frac{y^2(x-2)}{(x+5)(y+3)(y+1)}$       |
| k) $h(x, y) = \frac{ x }{ y }$                   | l) $h(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$                      |
| m) $h(x, y) = \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(y)}$ | n) $h(x, y) = \frac{x^2+1}{y^3}$                      |
| o) $h(s, t) = \frac{s^2}{ t }$                   | $h(a, b) = \sum_{k=0}^n b e^{ka}$                     |

2. Em cada um dos casos abaixo escreva a matriz  $J(h)$ , indique o domínio e contra domínio de  $h$  e de  $J(h)$ .

$$\begin{array}{ll}
a) h(x, y) = \frac{(x, y)}{y \cos(x+3)} & b) h(x, y) = \left( \frac{\text{sen}(x^2)}{(x+3)\cos(x+1)}, \frac{\cos(x)}{(x+3)\cos(x+1)} \right) \\
c) h(x, y) = \left( \frac{\text{sen}(x)}{y(x+3)}, \frac{\cos(y)}{y(x+3)} \right) & d) h(x, y) = \left( \frac{1}{(y-2)(x+3)}, \frac{x}{(y-2)(x+3)} \right) \\
e) h(x, y) = (e^{x^2}, e^{y^2}) & f) h(x, y, z) = (y \text{sen}(x) \ln(x+3), xyz) \\
g) h(\rho, \theta) = \left( \frac{\cos(\theta)}{\rho}, \frac{\text{sen}(\theta)}{\rho} \right) & h) h(x, y) = \left( \frac{x \ln(y)}{(x+3)(x+1)}, \frac{y \ln(x)}{(x+3)(x+1)} \right) \\
i) h(x, y, z) = \left( \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2+y^2}, x, z \right) & j) h(x, y, z) = \left( \frac{y^2(x-2)}{(x+5)(y+3)}, xy, yz \right) \\
k) h(x, y) = \left( \frac{|x|}{|y|}, \frac{|y|}{|x|} \right) & l) h(x, y) = \left( \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \\
m) h(x, y) = \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(y)} & n) h(x, y, z) = \frac{x^2+z}{y^3} \\
o) h(s, t) = \left( \frac{s^2}{|t|}, \frac{t^2}{|t|} \right) & h(a, b) = \left( \sum_{k=0}^n b e^{ka}, \sum_{k=0}^n a e^{kb} \right)
\end{array}$$

## 2.3 Operações e derivadas

Começamos por multiplicar matrizes, acima o fizemos com matrizes 3 x 4 e 4 x 1. Falemos agora da soma de matrizes. A soma de matrizes traduz um conceito da física: a *superposição*. Se  $\mathcal{A} = J(f) = f'(a)$  e  $\mathcal{B} = J(g) = g'(a)$  e se pudermos somar as duas funções  $f, g$  então também poderemos somar  $f'(a), g'(a)$ . É um princípio do Cálculo: *se pudermos somar duas funções, poderemos também somar suas derivadas*. Os físicos chamam esta soma de superposição significando com isto que uma função *f* ressona sobre o comportamento de outra *g* se as duas representam fenômenos que atuem simultaneamente: duas forças atuando sobre um mesmo corpo o aceleram *se tiverem mesma direção e sentidos contrários podem lhe dar aceleração zero se tiverem mesmo módulo*. As forças *se superpuseram*, dizem os físicos, *se somaram* dizemos os matemáticos. Duas forças só se podem somar se as suas variáveis forem em mesmo número:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

e obviamente se

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q ; m \neq q$$

nã se podem somar nem

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m ; n \neq q.$$

Como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se podem somar, também se podem somar as suas derivadas calculadas no mesmo ponto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  que serão matrizes  $m \times n$  porque ambas as funções tem  $nm$  coeficientes parciais. Daí tiramos a regra, só podemos somar matrizes de mesmas dimensões.

Outra forma de chegar a mesma conclusão é a consideração de que as matrizes são como os vetores, tem coordenadas, e portanto temos que somar as coordenadas de mesmos índices, então elas tem que ter o mesmo formato.

Só podemos somar matrizes que sejam exatamente da mesma ordem.

O arquivo “*pas.zip*” contém os arquivo *Matrizes.pas* onde você pode encontrar todas as as rotinas necessárias à solução dos exercícios abaixo.

**Exercício 2** Matrizes, coeficientes angulares.

1. Encontre a equação da reta<sup>8</sup> que passa nos pontos

$$P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (4, 3, 2).$$

2. Escreva na forma vetorial<sup>9</sup> a equação da reta que passa nos pontos

$$P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (4, 3, 2).$$

3. Encontre a equação do plano que passa no ponto  $(1, 1, 1)$  e é paralelo ao plano XOY.
4. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, -2, 3)$ .
5. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  para:
- (a)  $(a, b) = (1, 1)$ .
- (b)  $(a, b) = (0, b)$  ;  $b \neq 0$ .
- (c)  $(a, b) = (a, 0)$  ;  $a \neq 0$ .
6. Discuta qual pode ser a implicação entre derivadas parciais nulas e máximo ou mínimo de uma função. Analise o exemplo:  $f(x, y) = xy$  no ponto  $(x, y) = (0, 0)$ .
7. Determine onde as derivadas parciais das funções abaixo são nulas. Em particular, se ambas o forem, analise se a função tem máximo ou mínimo nestes pontos.

(a)  $z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ;

(b)  $z = h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

(c)  $z = g(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ;

(d)  $z = j(x, y) = \frac{3xy}{x^3 + y^2}$ .

8. Calcule as derivadas parciais das funções abaixo:

---

<sup>8</sup>Use a equação da reta que passa por um ponto dado  $(a, b)$  e tem coeficiente angular  $m$  conhecido,  $y - b = m(x - a)$ .

<sup>9</sup>o ponto  $(x, y, z)$  da reta é múltiplo de um vetor dado.

$$\begin{array}{ll}
a) h(x, y) = \frac{xy}{y \cos(x+3)} & b) h(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2)}{(x+3)\cos(x+1)} \\
c) h(x, y) = \frac{y \text{sen}(x)}{y(x+3)} & d) h(x, y) = \frac{1}{(y-2)(x+3)} \\
e) h(x, y) = e^{x^2}(y+3)(x+1) & f) h(x, y) = y \text{sen}(x) \ln(x+3) \\
g) h(\rho, \theta) = \frac{\cos(\theta)}{\rho} & h) h(x, y) = \frac{x \ln(y)}{(x+3)(x+1)} \\
i) h(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2+y^2} & j) h(x, y) = \frac{y^2(x-2)}{(x+5)(y+3)(y+1)} \\
k) h(x, y) = \frac{|x|}{|y|} & l) h(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \\
m) h(x, y) = \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(y)} & n) h(x, y) = \frac{x^2+1}{y^3} \\
o) h(s, t) = \frac{s^2}{|t|} & h(a, b) = \sum_{k=0}^n b e^{ka}
\end{array}$$

9. Descreva o domínio das funções definidas na questão anterior.
10. Escreva, ou use, um programa que receba pelo teclado matrizes e as multiplique na ordem em que foram dadas.
11. Modifique o programa anterior para, perguntando ao usuário a ordem dos fatores, multiplique as matrizes na ordem indicada.
12. Construa um exemplo de matrizes  $A, B$  tal que  $A \cdot B \neq B \cdot A$
13. Inclua no seu programa a possibilidade de somar duas matrizes com um alarme no caso de as matrizes serem incompatíveis para soma. No caso de incompatibilidade o programa deve perguntar ao usuário se as deve somar assim mesmo e então completar linhas ou colunas com zeros de modo a poder efetuar a soma.
14. Faça seu programa calcular a  $J(f)$  usando derivadas aproximadas.
15. Pesquise e descreva caso real de aplicação de matrizes em sua área de formação à semelhança do exemplo industrial apresentado no texto. Faça um pequeno projeto de simulação industrial usando matrizes como  $J(f)$  em que  $f$  é uma amostragem de dados do processo industrial.
16. Construa um exemplo em que a matriz  $J(f)$  representa a taxa de lucro dos distintos produtos. O vetor  $a$  representa a taxa de venda dos produtos. Defina um teto de lucro aceitável e a partir deste teto verifique que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  depende do valor de  $a_i$ , mostre como.
17. cálculo de derivadas: Calcule a derivada  $J(f)$  das funções abaixo indicando onde a derivada existe.

$$(a) f(x, y, z) = x \text{sen}(xy) + y \text{sen}(yz) + z \text{sen}(xy)$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$(c) f(x, y, z) = (\text{sen}(x)\cos(y), z \text{sen}(y), x \cos(z))$$

$$(d) f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(e) f(x, y, z) = (x \ln(x), y \ln(y), z \ln(z))$$

$$(f) f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$(g) f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$(h) f(x, y) = \left( \frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right)$$

18. extremos, condição: Mostre que num ponto de máximo, (ou de mínimo) de uma função multi-variada as suas derivadas parciais todas tem que se anular e consequentemente a sua derivada  $J(f) = 0$ . De um exemplo mostrando que recí proca é falsa.

19. curva de nível: Se  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se definem os subconjuntos de  $\Omega$

$$\text{curva de nível}_k = \{(x, y) \in \Omega ; F(x, y) = k; k \in \mathbb{R}\}$$

<sup>10</sup> Encontre as curvas de nível indicado:

$$(a) F(x, y) = x^2 + y^2 ; k \in \{0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(b) F(x, y) = x^2 - y^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(c) F(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(d) F(x, y) = (x - 3)^2 - (y + 4)^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(e) F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(f) * F(x, y) = 5(x - 2)^2 + 3(y - 1)^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(g) F(x, y) = 5(x - 2)^2 + 2xy - 3(y - 1)^2 ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(h) F(x, y) = xy ; k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

$$(i) * F(x, y) = 3(x - 1)^2 + 2xy - 2(y + 1)^2 ; k \in \{0, 0.5\}$$

20. reta tangente à curva de nível. Para cada função do item anterior, encontre um ponto  $(a, b)$  sobre a curva de nível, calcule a equação da reta tangente à curva no ponto  $(a, b)$  e faça os gráficos correspondentes.

21. gradiente: Se chama  $\text{graf}(f)$  a jacobiana  $J(f)$  quando  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{11}$ . Verifique que  $\text{grad}(f)_{(a,b)}$ , o gradiente de  $f$  calculado no ponto  $(a, b)$ , é um vetor. Mostre que  $\text{grad}(f)_{(a,b)}$  é um vetor perpendicular à curva de nível que passa no ponto  $(a, b)$ . Conclua que o  $\text{grad}(f)$  aponta na direção de crescimento, (ou decréscimo) máximo de  $f$  a partir do ponto  $(a, b)$ .

22. \*Desigualdade de Cauchy-Buniakowski-Schwarz: Prove que dados dois vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vale

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|$$

---

<sup>10</sup>este nome vem dos mapas dos topógrafos que indicam assim os diferentes níveis dos terrenos.

<sup>11</sup>em suma,  $\text{grad}(f)$  é um nome para a jacobiana que tem uma única linha.

23. *passo da montanha.* Considere um ponto  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$  no domínio de uma função  $f$ . Mostre que se  $\text{grad}(f)(a) = 0$  e  $f$  for a “equação de uma montanha”, então, você se encontra:

- num pico da montanha
- no fundo de um vale da região montanhosa.
- num passo da montanha.

## 2.4 A fórmula de Taylor

Convém lembrar aqui a fórmula de Taylor em seu caso mais simples que é

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) = f(a) + f'(a)\Delta x \quad (2.122)$$

em que  $f$  é uma função vetorial e portanto  $f'(a)$  é uma matriz jacobiana não trivial<sup>12</sup>, (não é um número comum). A fórmula 2.122 pode ser escrita com outro aspecto.

Vamos supor que  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  então se calcularmos  $f'(a)$  no ponto  $(a_1, \dots, a_4)$  teremos uma matriz linha com 4 entradas formadas pelas 4 derivadas parciais<sup>13</sup> de  $f$ :

$$f'(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4} \right)$$

Usando esta notação podemos re-escrever a fórmula:

$$2.122 f(x) \approx f(a) + f'(a)dx = \quad (2.123)$$

$$f(x) \approx f(a) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4} \right) \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \\ x_4 - a_4 \end{bmatrix} = \quad (2.124)$$

$$= f(a) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4} \right) \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = \quad (2.125)$$

$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}dx_4 \quad (2.126)$$

em que vemos a matriz atuando como *um dispositivo operatório* na definição de uma função, (*uma nova função que é uma aproximação de  $f$* ). Observe que esta esta expressã é semelhante à expressã de uma função do primeiro grau:

$$f(x) = b + ax \quad ; \quad x, a, b \in \mathbb{R}$$

<sup>12</sup>a expressão é exatamente a mesma do caso univariado, é uma vantagem da notação matricial.

<sup>13</sup>A notação de derivadas parciais não deixa ver que as derivadas estão sendo calculadas no ponto  $a$ , isto causa dificuldade para o entendimento.

na nova fórmula 2.126 a matriz está fazendo o papel de número multiplicando a matriz coluna  $dx$  e como são matrizes de ordens  $1 \times 4$  e  $4 \times 1$  o resultado desta multiplicação é um número real. Vemos desta forma que as matrizes servem para definir nos espaços vetoriais, funções semelhantes as funções do primeiro grau:

$$f(x) = b + Ax ;$$

$b$  um número ;

$x$  uma matriz  $n \times 1$  ;  $A$  matriz  $1 \times n$  ;

Há várias combinações possíveis de dimensão na construção de tais funções. Acima chamamos  $x$  de matriz quando o habitual é chamar de vetor. Veja mais o seguinte exemplo:

$$f(x) = B + Ax \quad ; \quad B, A, x \text{ matrizes: } 1 \times p, 1 \times n, n \times p.$$

Se costuma chamar funções do primeiro grau de *lineares*, na verdade deveriam ser chamadas de *lineares afins*. São *lineares* aquelas com o termo constante  $b$  ou  $B$  nulo:

$$f(x) = Ax \quad ; \quad A, x \text{ matrizes: } 1 \times n, n \times p.$$

definidas por uma simples multiplicação. Nestas valem as propriedades de linearidade:

**Definição 7** *Transformações lineares.* Se  $f$  for uma transformação linear então

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  ;
2.  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  .

Os termos “*transformações lineares*” e “*funções lineares*” são sinônimos, mas há quem dê um significado geométrico ao primeiro.

**Observação 11** *Diferencial, derivação implícita.* Uma série mitos e mal entendidos persistem em torno dos símbolos  $\Delta x, dx$ . Não é fácil corrigir esta situação sem um investimento grande em abstração e estruturas matemáticas, mas vamos discutir um pouco o assunto. O mito central gira em torno do conceito de infinitesimal que atravessou a história do Cálculo sem uma definição adequada, se é que uma tal definição poderia ser apresentada. Uma forma de entender o seu significado é a ordem de grandeza de que voltaremos a falar mais adiante. O símbolo  $\Delta$  significa apenas diferença, por exemplo:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Claro, a derivada significa o limite de quocientes de diferenças:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

e Leibniz inventou uma notação fenomenal e ao mesmo tempo pronta para criar confusões:

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

mas  $dx, df$  não existem... “Limites” se calculam sempre indiretamente sem que possamos usar regras operatórias aritméticas nos componentes da expressão algébrica envolvida, a não

ser a partir de resultados obtidos indiretamente, como os resultados que temos sobre somas, produtos e quocientes de limites. Quando escrevemos uma expressão como  $f(x) \approx f(a) + f'(a)dx$  estamos apenas querendo dizer que  $f$  pode ser aproximada linearmente, por uma função linear, e que o coeficiente angular (simples ou múltiplo) desta função linear é  $f'(a)$ .

**Variabilidade linear tangente.** Podemos usar a derivação implícita como uma técnica para encontrar um objeto linear tangente a outro: a reta tangente ao gráfico de uma função univariada, o plano tangente ao gráfico de uma função bivariada, o hiper-plano tangente ao gráfico de uma função multivariada. O caso da reta é o que acabamos de comentar acima,

$$dy = f'(a)dx$$

nos fornece

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

a equação da reta que tem coeficiente angular  $f'(a)$  e que passa no ponto  $(a, f(a))$ . Com frequência usamos  $d$  para indicar relativamente a que variável estamos calculando um limite de quocientes de diferenças. É o que fazemos quando derivamos implicitamente uma expressão:

$$w = f(x_1, x_2, x_3, x_4); \tag{2.127}$$

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} dx_4 \tag{2.128}$$

em que os objetos  $dw, dx_1, \dots, dx_4$  são apenas variáveis que por um acidente feliz trazem nomes parecidos com os das variáveis que usamos para indicar como calcular os valores de  $f$ . Dissemos acidente, é preciso levar a sério esta palavra. Grande parte da construção científica é um produto de acidentes felizes, e, naturalmente, muito esforço intelectual desenvolvido no escuro. Faz parte deste acidente que podemos escrever, diretamente a partir da equação (eq. 2.128) a equação do plano tangente a superfície  $\text{graf}(f)$  :

$$w = f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3 - a_3) + \frac{\partial f}{\partial x_4}(x_4 - a_4)$$

por simples substituição de  $dx_i$  por  $x_i - a_i$  e  $dw$  por  $f(x) - f(a)$ . Observe que  $x = (x_1, \dots, x_4)$ . Nesta história toda temos ideias geométricas, topológicas, algébricas envolvidas e uma linguagem deficiente para tratar de tudo isto. São fatos difíceis e dizer que os fatos são “difíceis” não deve representar uma carga nem emocional e nem sequer produzir mais mitos. Apenas deve-se dizer que há muito coisa envolvida, difícil é o complexo que não podemos trivializar em um determinado momento.

Não há nada místico aqui, apenas existe um aparato formal denso para justificar operações intuitivas simples o que revela um fosso profundo entre a intuição e a linguagem, apenas isto.

### Exercício 3 Funções lineares, Jacobiana.

1. Verifique que as propriedades de linearidade valem tanto para  $f(x) = ax$  em que  $a, x$  são números, como para  $f(x) = Ax$  em que  $A, x$  são matrizes, convenientemente definidas para que se possa fazer a multiplicação.
2. Escreva algumas funções lineares usando distintas matrizes no que diz respeito a dimensão.
3. Calcule a Jacobiana de  $f$  nos pontos indicados:

(a)  $f(x, y, z) = 3x \cos(y) + 2y \sin(z) - 4z \sin(xy)$  ;  $(1, -\pi, \pi)$  ;

(b)  $f(x, y) = \sin(xy) \exp(-x^2 - y^2)$  ;  $(0, 0, 0)$  ;

(c)  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  ;  $(0, 1)$  ;

4. *Escreva a aproximação linear para cada uma das funções anteriores no ponto indicado. Calcule o valor de  $f$  usando sua aproximação linear com um erro de 0.1 em cada coordenada e compare com valor exato em cada caso.*

5. *Calcule a soma das derivadas das funções  $f, g$ :*

$$f(x, y) = \text{sen}(xy)\exp(-x^2 - y^2) ; (0, 0, 0) ;$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) ; (0, 1);$$

6. *aproximação linear:* *Escreva a aproximação linear para cada uma das funções anteriores no ponto indicado. Calcule o valor de  $f$  usando sua aproximação linear com um erro de 0.1 em cada coordenada e compare com o valor exato, em cada caso. item\* Observe que o erro indicado na questão anterior não corresponde ao erro no valor da função que pode ser maior do que 0.1, faça algumas experiências para descobrir como poderia se usar um erro na variação das variáveis que produzisse um erro máximo de 0.1 no valor de  $\Delta f$ .*

7. *Regra da Cadeia:* *Considere  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e uma mudança de variáveis  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , todas as funções diferenciáveis.*

(a) *Calcule as Jacobianas de  $f, g$ .*

(b) *Calcule o produto de matrizes  $J(f) \circ J(g)$ .*

(c) *Verifique que  $J(f) \circ J(g) = J(f \circ g)$ .*

Os exercícios anteriores reforçam ideia de que as matrizes são um novo tipo de número e que a *multiplicação de matrizes* tem uma denominação adequada. As funções lineares transformam vetores em outros vetores ou números. Quando transformam em números, recebem um nome especial:

**Definição 8** *Funcional linear.* *Se  $f$  for uma transformação linear cuja imagem é um número se chama funcional linear.*

*Como os espaços vetoriais de que tratamos aqui são os espaços  $\mathbb{R}^n$ , um funcional linear será da forma*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = (a_1, \dots, a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle ;$$

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 13** *Funções lineares definidas por meio de produto escalar.*

1. Em  $\mathbb{R}^3$  considere o vetor  $(a_1, a_2, a_3)$ . A função

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \langle a, x \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

é função linear.  $f(x) = 0$  se o vetor  $x$  for perpendicular ao vetor  $a$ . Como enunciado na definição, não há outros tipos de funcionais lineares definidos em  $\mathbb{R}^3$ , todos são desta forma, o produto escalar por um vetor fixo.

2. No espaço vetorial  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  temos o produto escalar  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . Se considerarmos  $f$  fixa, a função

$$\phi : g \mapsto \langle f, g \rangle = \phi(g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define um produto escalar em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Não é fácil encontrar-se

$$\{g; \phi(g) = 0\}.$$

Podemos construir algumas funções que satisfazem esta condição, por exemplo

$$g(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)$$

se a função fixa  $f$  for constante. Sabemos resolver alguns casos particulares deste problema...



## Capítulo 3

# Séries e aproximação de funções.

### Resumo.

Neste capítulo vamos deixar de lado o espaço  $\mathbb{R}^n$  e voltar a discutir as funções definidas em  $\mathbb{R}$  e tomando valores em  $\mathbb{R}$ . Aparentemente estaremos voltando ao caso unidimensional, mas não é bem assim. Aos poucos você irá perceber que na verdade estaremos mergulhando no caso “dimensão infinita”.

Vamos estudar tres métodos de aproximação

- polinômios de Taylor
- polinômios trigonométricos
- aproximação polinomial clássica

de funções, que, como tal, “aproximação” eles seriam altamente inadequados e apenas refletem o curso histórico. A crítica que faremos em cada situação refletirá tanto o *estado atual das coisas* como colocará estas três técnicas dentro do contexto em que elas surgiram.

Não deduza, entretanto, do que acabamos de dizer, que você está sendo convidado a percorrer *apenas* uma galéria de museu, nós estaremos lhe mostrando as conexões do *que foi feito* com o *que está sendo feito*. Mais importante que o *desenvolvimento de Taylor* são os métodos que usaremos para estudá-lo e sobre tudo, ao final, quando discutirmos o *erro* vamos ter ocasião para introduzir ferramentas importantes no estudo do comportamento de funções. Usaremos o método histórico com sua justa dimensão, será um proveitoso passeio por uma sala de museu.

Ao final do capítulo falaremos brevemente sobre *splines* para nos redimir de ter apresentado como aproximação, o que de fato não é mais.

Vamos começar com as séries de Taylor.

### 3.1 A série de Taylor

É da *fórmula de Taylor* que vamos voltar a discutir aqui, entretanto agora com outro objetivo mais amplo. Daí o novo nome, *série de Taylor*.

Ao discutirmos o *fórmula de Taylor* colocamos no centro da questão a aproximação linear que se podia obter para uma função. Agora a questão vai se colocar em termos diferentes: *podemos encontrar um polinômio, de grau arbitrário, cujo gráfico seja tangente ao gráfico de uma função  $f$ ?*

Quando o grau for 1, sabemos que uma reta tangente pode ser encontrada, portanto um polinômio de grau 1, se a função for diferenciável. Alguns experimentos podem nos orientar sobre o que vai acontecer, nada melhor do que começar com um polinômio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + a_4(x - a)^4$$

e observe que escrevemos este polinômio no formato apropriado para garantir que ele passe no ponto  $(a, a_0) = (a, b)$ , como fizemos quando discutimos a reta tangente ao gráfico de uma função.

Um exercício elementar consiste em provar que todo polinômio do grau  $n$  tem um desenvolvimento em potências de  $(x - a)$  em que  $a$  é um número dado, ver (exercício, 1). Aqui vamos usar o método da derivação e chegar a uma outra conclusão a respeito de tais polinômios.

Vamos considerar uma função  $f$ , *suficientemente diferenciável* e vamos buscar condições para que o gráfico de um polinômio de grau 4 seja “tangente” ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$

Para ser tangente o polinômio tem que ter o mesmo valor que  $f$  no ponto  $x = a$  o que nos conduz a concluir que

$$P(a) = a_0 = f(a). \quad (3.1)$$

Como queremos que seja tangente, somo levados a derivar o polinômio e impor a condição:

$$P'(a) = a_1 = f'(a). \quad (3.2)$$

Veja que as condições impostas estabelecem que

- $P, f$  coincidem no ponto  $(a, f(a))$
- $P, f$  tem mesmo coeficiente angular instantâneo no ponto  $(a, f(a))$ ,  $P'(a) = f'(a)$ .

Vamos agora impor a condição de que os dois tenha a mesma curvatura neste ponto o que é determinado pela segunda derivada:

$$P''(a) = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2} \quad (3.3)$$

De agora em diante nos faltam expressões geométricas, diremos simplesmente, queremos que o polinômio  $P$  e  $f$  tenham mesma derivada de terceira ordem no ponto  $(a, f(a))$  :

$$P'''(a) = 6a_3 = f'''(a) \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(a)}{6} \quad (3.4)$$

e que tenham mesma derivada de ordem 4 neste ponto:

$$P''''(a) = 24a_4 = f''''(a) \Rightarrow a_4 = \frac{f''''(a)}{24} \quad (3.5)$$

Se agora observarmos que os números  $24 = 4!, 6 = 3!, 2 = 2!, 1 = 1!, 1 = 0!$  podemos dar uma unificação às fórmulas acima escrevendo:

$$a_0 = \frac{f(a)}{0!} \quad (3.6)$$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!} \quad (3.7)$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad (3.8)$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \quad (3.9)$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!} \quad (3.10)$$

$$\dots \quad (3.11)$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

que pode ser demonstrado por indução (se a função  $f$  for diferenciável até esta ordem). Revertendo os cálculos diremos que

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (3.14)$$

respondendo à pergunta com que nos iniciamos: de fato existe um polinômio  $P$ , do grau  $n$ , que coincide com  $f$  até a derivada de ordem  $n$  e sobre o qual podemos afirmar as seguintes condições geométricas

- $P$  passa no ponto  $(a, f(a))$ .
- O gráfico de  $P$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ .
- O gráfico de  $P$  tem a mesma curvatura que o gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ .

**Teorema 5** *do desenvolvimento de Taylor*

*Se uma função tiver derivadas contínuas até a ordem  $n$  no intervalo  $[a, b]$  então existe um polinômio  $P$  de grau  $n$  cujas derivadas coincidem com as derivadas de  $f$  até a ordem  $n$  e além disto  $f$  e  $P$  coincidem no ponto  $x = c$  em que o polinômio é desenvolvido sendo sua expressão dada por:*

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

O teorema do desenvolvimento de Taylor foi demonstrado acima exceto num ponto, em sua afirmação  $f(x) \approx P(x)$  que passaremos a discutir agora.

Análise a figura (fig. 3.1) na página 70, nela o gráfico dum polinômio de Taylor do terceiro grau coincide com o gráfico de uma função no ponto  $x = 3$ , até a terceira derivada. Veja que a aproximação é “boa” somente em volta do ponto  $x = 3$ . Longe deste pontos os dois gráficos se afastam. Quer dizer que aproximação produzida pelo polinômio de Taylor é local.

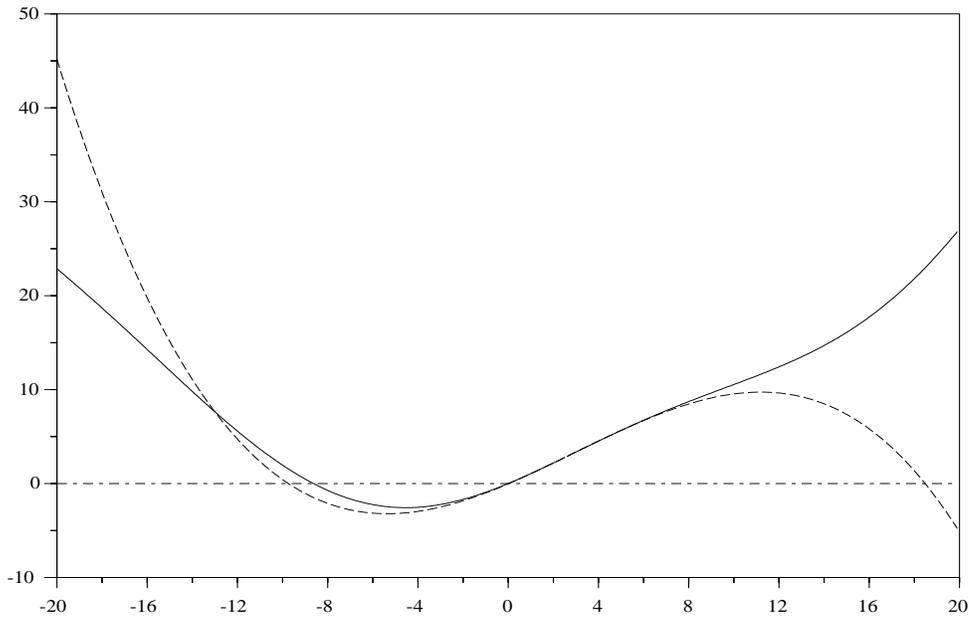


Figura 3.1: Gráficos simultâneos do polinômio de Taylor de grau 3 e da função  $f$ .

Do ponto de vista de *aproximação*, polinômios de Taylor servem pouco. Você verá ao final do capítulo um método melhor de aproximação, os *splines*.

Mesmo assim, e a título de curiosidade, veja o gráfico (fig. 3.2), página 71, do polinômio de Taylor do seno de grau 11 junto com o gráfico da função seno. O gráfico é enganoso, as duas funções se tangenciam no ponto  $x = 0$ .

**Exercícios 7** 1. *Mostre que um polinômio*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

*tem um desenvolvimento como potências de  $(x-a)$  e calcule os coeficientes deste desenvolvimento.*

2. *Mostre, por indução que vale a expressão da fórmula de Taylor de ordem  $n$  se a função  $f$  for diferenciável até esta ordem.*
3. *Escreva polinômios de Taylor de ordem  $n > 10$  para as seguintes funções no ponto  $a$  indicado:*

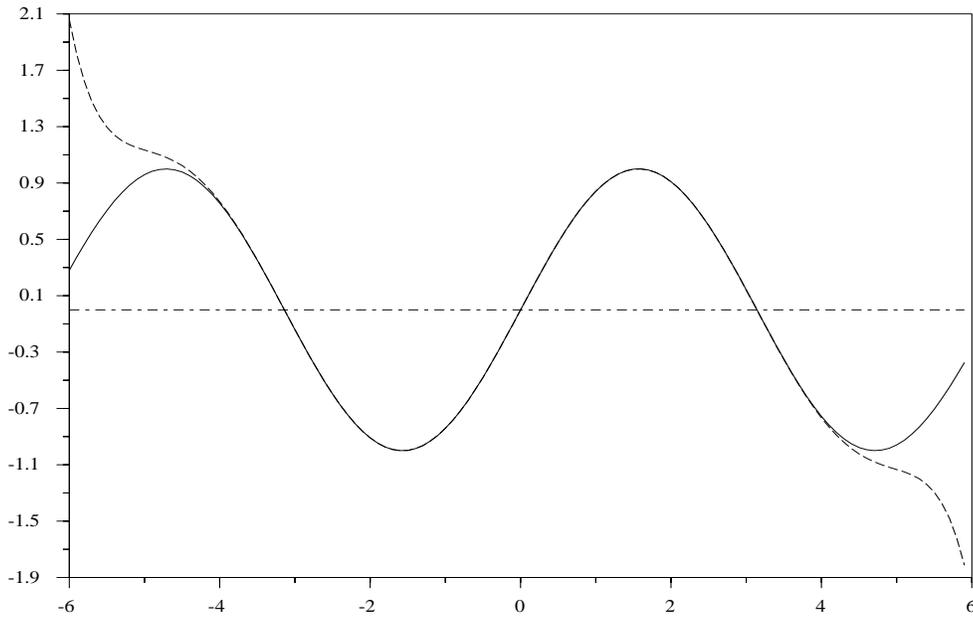


Figura 3.2: Gráficos simultâneos do seno e de seu polinômio de Taylor de grau 11 .

(a)  $f(x) = \text{sen}(x)$  ;  $a = 0$

(b)  $f(x) = \text{cos}(x)$  ;  $a = 0$

(c)  $f(x) = e^x$  ;  $a = 0$

(d)  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  ;  $a = 0$

(e)  $f(x) = \text{cos}(x) + i\text{sen}(x)$  ;  $a = 0$

(f)  $f(x) = e^{ix}$  ;  $a = 0$

4. Escreva polinômios de Taylor de ordem  $n > 10$  para as seguintes funções no ponto  $a$  indicado:

(a)  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  ;  $a = \pi$

(b)  $f(x) = \text{cos}(x) + i\text{sen}(x)$  ;  $a = \pi$

(c)  $f(x) = e^{ix}$  ;  $a = \pi$

5. Você pode tirar alguma conclusão, sobre uma fórmula famosa, a partir dos dois últimos desenvolvimentos de Taylor ?

Calcule a soma  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Calcule a soma  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

Nossa verdadeira intenção com os polinômios de Taylor é discutir expressões do tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (x-a)^k = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (x-a)^k \quad (3.15)$$

Há várias questões a serem discutidas numa tal expressão, e vamos deixar esta discussão para um parágrafo mais a frente em que discutiremos o assunto *series*.

Neste momento vamos resumir nossa discussão numa forma de calcular o erro expressão em

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (x-a)^k. \quad (3.16)$$

O segundo termo na equação acima continuará ser chamado por nós de *Polinômio de Taylor*, deixaremos a palavra *série* para quando discutirmos o assunto mais acuradamente.

Há duas maneiras de analisar o erro entre  $f$  e  $P_n$ . Vamos estudar os dois métodos a partir de uma visão concreta semelhante a que usamos para fazer aparecer os *polinômios de Taylor*.

### 3.1.1 O erro médio.

Vamos usar um teorema do Cálculo univariado que relembremos aqui, como lema:

**Lema 1** *Teorema do valor médio diferencial*

*Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Existe um ponto*

$$c \in (a, b) ; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O ponto  $c$  no *teorema do valor médio* não é o ponto médio do intervalo como o teorema infelizmente sugere, tudo que sabemos é: “existe um ponto  $c$  no interior do intervalo tal que o quociente das diferenças corresponde ao valor da derivada”. Vamos usar a expressão do Teorema do valor médio diferencial com a derivada de ordem  $n$  na fórmula de Taylor. *E, a despeito de que do ponto  $c$ , nós sabemos apenas da existência*, nós o vamos usar como o ponto de desenvolvimento de dois polinômios de Taylor de  $f$  de ordem sucessivas. Assim, nos cálculos que se seguem,  $P_1, P_2$  são os desenvolvimentos de Taylor de  $f$ , de ordem  $n, n+1$ , respectivamente, no ponto  $c$  definido pelo teorema do valor médio do Cálculo Diferencial.

$$P_2(x) - P_1(x) = \quad (3.17)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k = \quad (3.18)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} = \frac{(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))}{(b-a)(n+1)!} (x-c)^{n+1} = \quad (3.19)$$

$$A(x-c)^{n+1}; \quad A = \frac{(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))}{(b-a)(n+1)!} \quad (3.20)$$

O número

$$A_n = \frac{(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))}{(b-a)(n+1)!}$$

decrece rapidamente para zero quando  $n$  crescer, se  $f$  tiver *tiver derivadas indefinidamente*, e nós usaremos esta hipótese mais a frente quando estudarmos séries. Neste momento o que podemos concluir é, que, a diferença entre dois desenvolvimentos sucessivos de Taylor, para  $f$ , num ponto  $c$  do intervalo  $[a, b]$  em que  $f$  esteja definida e tiver derivadas até a ordem  $n$  inclusive nos extremos do intervalo, é o polinômio de grau  $n+1$

$$A(x-c)^{n+1}; \quad A = \frac{(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))}{(b-a)(n+1)!}$$

em que o coeficiente  $A$  é muito pequeno para grandes valores de  $n$ . Vamos deixar isto registrado no teorema seguinte:

**Teorema 6** *do Resto no polinômio de Taylor*

*Se uma função tiver derivadas até a ordem  $n+1$ , contínuas, no intervalo  $[a, b]$  então o erro entre os desenvolvimentos de Taylor de  $f$  de ordem  $n$  e de ordem  $n+1$  é o polinômio*

$$A(x-c)^{n+1}; \quad A = \frac{(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))}{(b-a)(n+1)!}.$$

As figuras (fig. 3.3), página 74, (fig. 3.1), página 70, mostram polinômios de Taylor de grau 1 e grau 3.

A figura (fig. 3.4), na página 75, mostra os polinômios de graus 11 e 13 do seno. Como a função seno tem derivadas de qualquer ordem se pode observar que um dos polinômios, o de grau 13, fica mais próximo de  $f(x) = \text{sen}(x)$ , em outras palavras o erro  $A_{14}(x)^{14}$  tem uma oscilação muito pequena no intervalo  $[-6, 6]$ , ou, pelo menos, menor do que o erro  $A_{12}(x)^{12}$ , que corresponderia ao polinômio de Taylor de grau 11.

Sugerimos que o leitor consulte outros livros de Cálculo para analisar uma outra fórmula para o erro entre o polinômio de Taylor e a função, diferente da que obtivemos aqui. Nos exercícios estudaremos numericamente esta diferença.

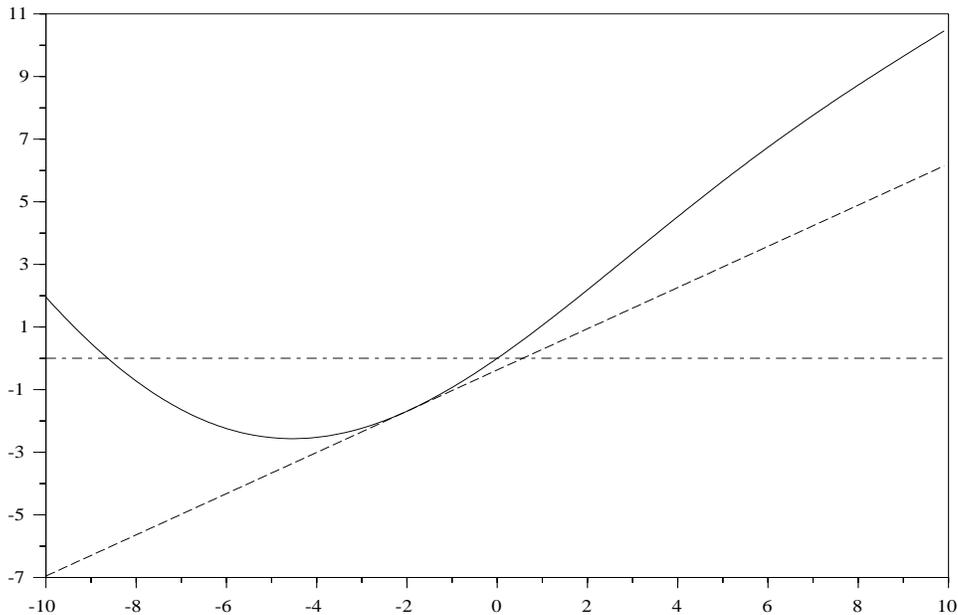


Figura 3.3: Reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x = -2$ .

### 3.1.2 O erro integral.

O cálculo que fizemos na seção anterior, para encontrar uma estimativa do erro entre  $f$  e seu desenvolvimento de Taylor mostra um erro “variável”  $f(x) - P(x) = A(x - c)^{n+1}$ .

Existem várias formas de se avaliar um erro, sobre tudo em se tratando de dados “variáveis”. Uma das formas consiste em estimar o erro em um ponto, foi o que fizemos escolhendo anteriormente o ponto  $c$  “determinado” pelo teorema do valor médio do Cálculo Diferencial. Outra forma consiste em avaliar uma média de uma coleção considerada de erros.

Estas duas formas são dois métodos extremos existindo uma considerável variação de métodos entre estes dois que não seria o caso de considerar aqui. Os distintos métodos são escolhidos em relação à necessidade que o pesquisador tiver num determinado momento. Vamos aqui mostrar o outro extremo, calculando uma média que é o chamado “erro integral”.

Pol Taylor n=11 - seno

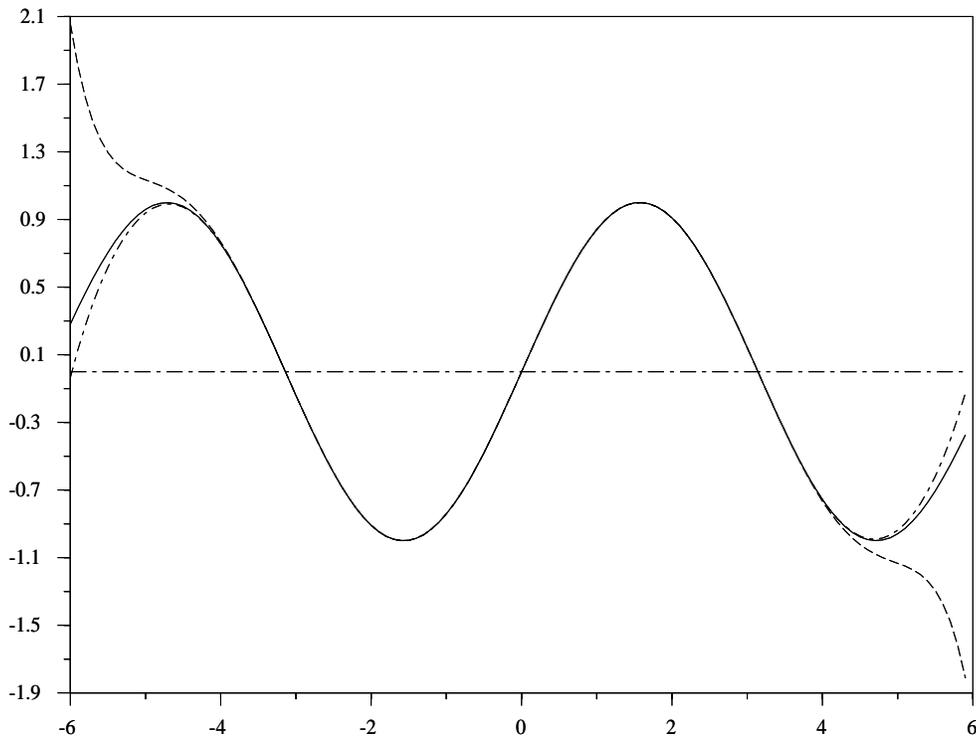


Figura 3.4: Polinômios de grau 11 e 13 do seno desenvolvidos em  $x = 0$ .

A idéia consiste em calcular

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - P_n(x) dx.$$

Este cálculo pode ser modificado usando  $|f(x) - P_n(x)|$  no integrando tendo-se outro significado para o erro. Como já dissemos há várias variantes para a busca do erro, e uma das formas de analisar consiste o ponto  $x = c$  em que  $P_n$  é desenvolvido. Aqui vamos usar  $x = a$ .

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - P_n(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b P_n(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k dx \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k dx \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} x^{k+1} \Big|_0^{b-a} \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \left( \sum_{k=-1}^n \frac{F^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} - F(a) \right) \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{1}{b-a} \left( \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{(k)!} (b-a)^k - F(a) \right) \\
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

em que  $F$  é uma primitiva de  $f$ . Podemos observar que o resultado representa a diferença entre o valor médio de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  e o valor médio da derivada de uma primitiva de  $f$ ,  $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$  calculada usando-se o seu desenvolvimento no ponto  $x = a$ .

Como pelo valor médio do Cálculo Integral, existe um ponto  $c$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

é o que temos como primeiro membro na expressão encontrada. que, para grandes valores de  $n$  o cálculo da integral de  $f$  ou de  $P_n$  representam o mesmo valor o que mostra que, se o desenvolvimento de Taylor representa uma aproximação pontual de baixa classe para  $f$ , do ponto de vista da *energia do fenômeno representado por  $f$*  o desenvolvimento de Taylor é uma boa aproximação:

**Teorema 7** *do erro integral do desenvolvimento de Taylor*

*A energia de  $f$  e de um polinômio de Taylor de  $f$ ,  $P_n$ , são semelhantes para grandes valores de  $n$ .*

Como um último comentário, a escolha do método no cálculo do erro foi dirigido por um interesse específico do autor.

### Aproximação de funções.

*Aproximação de funções* ou o de forma mais geral *Teoria da Aproximação* é um capítulo imenso em Matemática e que apenas cresce nos dias atuais por sua importância natural. Nesta seção vamos deixar um pequeno testemunho de um dos tópicos importantes dentro da área de *aproximação de funções*: aproximação com polinômios trigonométricos. Para que você tenha uma ideia da superficialidade do que trataremos aqui, um dos livros mais famosos sobre o assunto, escrito por Antony Zigmund (1900-1993), sob o título *Trigonometric Series*, tem perto de 1000 páginas em seus dois volumes.

O uso de séries trigonométricas, (polinômios trigonométricos), para aproximar funções apenas representa um elemento histórico que possivelmente deva ficar restrito à primeira metade do século 20. Desde o fim do século 19, Fourier em particular, mas outros que o antecederam, entendiam que as Séries Trigonométricas representavam *ondas* e portanto funções de um tipo particular que descrevessem os fenômenos ondulatórios. Ainda assim uma nova técnica que lhe roubou a metodologia com inovações significativas: as Wavelets, lhe ameaçando a hegemonia neste setor.

Mesmo assim, vamos apresentar aqui as séries de trigonométricas como um método de aproximação de funções.

A base teórica para o conteúdo deste parágrafo foi desenvolvida resumidamente no parágrafo anterior é a Álgebra Linear. O nosso intuito com os *Polinômios Trigonométricos* é duplo:

- Dar um exemplo pesado de uso de espaço vetorial com produto escalar. “Pesado” em vários sentidos, por suas aplicações, por seu valor teórico e pelo aprofundamento da intuição geométrica que ele pode proporcionar.
- O nosso segundo objetivo é o de motivar um estudo mais aprofundado de *convergência*. Vamos logo ver que “falta alguma coisa na teoria”, esta “coisa” que estará faltando é *convergência*.

## 3.2 Polinômios Trigonométricos.

Em 1822, num artigo apresentado à *Academia Francesa de Ciências*, Joseph Fourier, (1768-1830) afirmou que *todas as funções periódicas* podem ser decompostas em múltiplos das funções

$$x \longrightarrow \text{sen}(nx)$$

e

$$x \longrightarrow \text{cos}(kx)$$

com  $n, k \in \mathbf{N}$ .

Não seriam *todas* como se veria com o passar do tempo e da revolução que Fourier provocou no desenvolvimento da Matemática com as suas Séries Trigonométricas, chamadas ainda de *Séries de Fourier*, mas que eram conhecidas de alguns matemáticos anteriores a ele, como Euler, (1707-1783) e alguns dos irmãos Bernouilli.

As funções

$$\text{sen}k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \text{sen}(kx) \tag{3.21}$$

e

$$\text{cos}j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \text{cos}(jx) \tag{3.22}$$

formam um sistema de *vetores* linearmente independentes e ortogonais no espaço vetorial das funções contínuas definidas num intervalo fechado e limitado, *intervalo compacto*, vamos particularizar o problema para apresentar uma teoria pequena, o intervalo base será  $[0, 2\pi]$ . Para provar as propriedades enunciadas, é preciso definir neste espaço  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  um produto escalar, o conceito que nos permite calcular os ângulos entre vetores ou os módulos destes, é o produto escalar que permite *generalizar* os conceitos geométricos, *ângulo*, *módulo*, *distância* a espaços mais gerais. O produto escalar poderia ser definido assim

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (3.23)$$

Uma integração por partes mostra que *sen* e *cos* são ortogonais:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\cos(x)dx = \\ & = \text{sen}^2|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\cos(x)dx \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\cos(x)dx = \text{sen}^2|_0^{2\pi} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\cos(x)dx = 0 \end{aligned}$$

De modo análogo se pode mostrar que *senk* e *cosj* são ortogonais para quaisquer que sejam  $k, j$  ;  $j = k$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(kx)dx = \\ & = \frac{1}{k} \text{sen}kx\text{sen}(kx)|_0^{2\pi} - \frac{k}{k} \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(kx)dx = \\ & 0 - \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(kx)dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(kx)\cos(kx)dx = 0 \end{aligned}$$

a justificativa da última linha no bloco de equações acima sendo que a integral de *senk**senj* não muda se fizermos uma translação de  $2\pi$  e no intervalo  $[-\pi, \pi]$  uma é par e a outra é impar. Se  $k \neq j$  então uma nova integração por partes nos leva de volta às funções iniciais:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(jx)dx = \\ & = \frac{k^2}{j^2} \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(jx)dx \Rightarrow \\ & = (1 - \frac{k^2}{j^2}) \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(jx)dx = 0 \Rightarrow \\ & \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\cos(jx)dx = 0 \end{aligned}$$

mostrando as relações de ortogonalidade que desejadas, que pela sua importância merecem estar registradas sob o nome de teorema:

**Teorema 8** da ortogonalidade das funções *senk* e *cosj*. Se definirmos em  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  o produto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

então as funções  $\text{sen}k(x) = \text{sen}(x)$  e  $\text{cos}j(x) = \text{cos}(jx)$  formam um sistema de vetores ortogonais, para todos os valores de  $j, k \in \mathbb{N}$ .

Um raciocínio geométrico simples nos conduz a

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \text{cos}^2(x)dx$$

porque  $\text{sen}$  é translação de  $\text{cos}$  de  $\frac{\pi}{2}$ , assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x))dx = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \\ &\langle \text{sen}, \text{sen} \rangle = \pi \\ &\langle \text{cos}, \text{cos} \rangle = \pi \end{aligned}$$

Com o mesmo argumento geométrico, apoiado numa mudança de variável, se conclue que

$$\langle \text{sen}k, \text{sen}k \rangle = \pi \tag{3.24}$$

$$\langle \text{cos}k, \text{cos}k \rangle = \pi \tag{3.25}$$

portanto o produto escalar é “defeituoso” e deve ser redefinido para que estes vetores sejam “unitários”:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \tag{3.26}$$

e desta maneira se tem

$$\begin{aligned} \langle \text{sen}k, \text{sen}k \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\text{sen}(kx)dx = 1 \\ \langle \text{cos}k, \text{cos}k \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{cos}(kx)\text{cos}(kx)dx = 1 \end{aligned}$$

para qualquer que seja  $k$ . Isto nos induz a uma correção do teorema anterior que agora ficou incompleto frente a estes novos resultados:

**Teorema 9** do sistema trigonométrico ortonormal. Se definirmos em  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  o produto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

então as funções  $\text{sen}k(x) = \text{sen}(x)$  e  $\text{cos}j(x) = \text{cos}(jx)$  formam um sistema ortonormal de vetores, para todos os valores de  $j, k \in \mathbb{N}$ . **Dem**: Falta apenas considerar o caso  $k = 0$ . Como  $\text{sen}(kx)$   $k = 0$  resta apenas verificar o que acontece com  $\text{cos}(kx) \equiv 1$ . A função constante é perpendicular a todos os vetores  $\text{sen}(kx)\text{cos}(jx)$ ;  $k, j \geq 1$ . Mas verificando  $|\text{cos}(0x)|$  vamos encontrar o valor 2. Como já não é possível alterar o produto escalar, vamos alterar a definição da função  $\text{cos}(0x)$ . A solução é considerá-la definida por:

$$\text{cos}(0x) = \frac{1}{2}.$$

Veremos logo que a história tomou rumo diferente, rumo ao qual logo vamos aderir.

**q.e.d.**

Seguindo as ideias do nosso projeto inicial, podemos agora estender a geometria do  $\mathbb{R}^3$  a este novo espaço. Teremos que discutir a validade desta extensão, obviamente. Em  $\mathbb{R}^3$ , na Geometria Analítica, depois de definido o produto escalar, se chamam os números  $\langle u, e_n \rangle$  de *projeções* de  $u$  na direção dos vetores  $e_n$ , como são habitualmente chamados os vetores unitários das três direções do espaço e depois se recompõe  $u$  com uma soma:

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Como agora temos *produto escalar* em  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  e temos duas sucessões de vetores unitários relativamente aos quais podemos calcular as projeções de

$$f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) :$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (3.27)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (3.28)$$

então fica a pergunta:

*não poderíamos recompor  $f$  a partir destas projeções?*

Queremos escrever:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (3.29)$$

mas esta fórmula está errada como veremos a partir dos exemplos seguintes. Além disto, como não existem *somas infinitas* ela nos obriga a pensar em *convergência*. Discutiremos a convergência das séries no próximo capítulo.

**Exemplo 14** *Linearidade da transformada de Fourier*

*Estamos, por vez primeira, chamando os coeficientes de Fourier de “transformada” de Fourier. Repetiremos esta forma de falar outras vezes e vamos discutí-la mais cuidadosamente mais a frente.*

*Quer dizer que o conjunto dos coeficientes é a imagem de  $f$ , obviamente, uma sequência, e portanto estamos falando de um conjunto de funções que tem “coeficientes de Fourier” e um conjunto de sucessões que são os coeficientes de Fourier dos elementos daquele conjunto. Por exemplo, todas as funções contínuas, mas não somente estas, têm coeficientes de Fourier.*

*Se considerarmos a função identicamente zero, a sucessão dos coeficientes é obviamente a sucessão identicamente nula também. Quer dizer que a imagem do zero é o zero.*

*Uma notação vai ser útil: vamos chamar*

$$(a_n, b_n) = \hat{f}_n.$$

Considere duas funções “que tenham coeficientes de Fourier”,  $f, g$ . Os coeficientes de  $f + g$  vão se dividir em

$$(f + g)_n = \hat{f}_n + \hat{g}_n$$

como mostra um simples cálculo que vou deixar para o leitor fazer como exercício.

Se  $h = \lambda f$  em que  $\lambda \in \mathbb{R}$  então

$$\lambda \hat{f}_n = \hat{\lambda f}_n$$

como se pode também deduzir com um simples cálculo a partir das fórmulas que escrevemos acima.

Resumindo, a transformada de Fourier se comporta como as funções lineares da Álgebra Linear, e podemos dizer que a transformada de Fourier é linear.

### Exemplo 15 Função par e função ímpar

Somente podemos falar de funções pares ou ímpares se o domínio for equilibrado em volta de zero. Vamos portanto aqui considerar o conjunto das funções contínuas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Se  $f$  for par, “um simples cálculo” que novamente vou deixar como exercício para o leitor, torna os coeficientes  $b_n$  nulos, os coeficientes de  $\sin K$ . Quer dizer que  $f$  não tem projeção no espaço das funções ímpares.

Se  $f$  for ímpar, “um simples cálculo” que novamente vou deixar como exercício para o leitor, torna os coeficientes  $a_n$  nulos, os coeficientes de  $\cos K$ . Quer dizer que  $f$  não tem projeção no espaço das funções pares.

Este resultado simples em matéria de coeficientes de Fourier fez com que se suspeitasse muito cedo de um resultado mais geral que levou anos para ser demonstrado (demonstração nada simples) mas, a partir das idéias expostas acima, fácil de ser concebida:

### **Teorema** 10 Funções pares e ímpares

Toda função contínua pode ser decomposta numa soma de duas outras funções, uma par e outra ímpar.

### Exemplo 16 O erro do coeficiente $a_0$ .

Considere, no espaço  $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$  as funções

$$f(x) = x ; g(x) = x + \pi$$

Pela linearidade, e usando a notação introduzida logo acima,

$$\hat{g} = \hat{f} + \hat{\pi}$$

em que agora estamos considerando a constante  $\pi$  como a função constante.

Ora, mas  $\hat{\pi}$  tem que ser apenas  $(a_0, 0)$ . Calculando  $a_0$  temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi dt = 2\pi$$

e vemos que tem um erro. A solução deste erro é definir

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

uma vez que não seria mais possível corrigir o produto escalar e também porque não seria aceitável definir a função

$$\cos 0 = \frac{1}{2}$$

que poderia ser outra saída.

Vamos fazer uma outra motivação mais complicada e portanto com aparência mais técnica (nunca se iluda com as parâmetros), usando um programa de computador. Os computadores sempre podem ser úteis até mesmo para manipulações incorretas da realidade... sobre tudo se ficarmos presos à forma em vez de irmos a fundo nas questões.

**Exemplo 17** Séries de Fourier de algumas funções.

1.  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0$$

porque  $\cos N$  é par e  $f$  é ímpar.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \\ &= -2 \frac{\pi \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1)^{(n+1)}}{n} \end{aligned}$$

então teríamos

$$f(x) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sin(nx)$$

e se assim o for, se tiver sentido escrever esta série, temos também

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

como  $\text{sen}(n\frac{\pi}{2})$  assume ciclicamente os valores  $\{1, 0, -1, 0\}$  a “série” acima perde os termos de ordem par, ficando então

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Fazendo o cálculo da soma com um programa em Pascal, com 1000 termos se obtém para a soma o valor 1.56980 enquanto que  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57080$  usando o valor interno do Pascal para  $\pi$ . Entretanto temos discutir a validade destes resultados o que faremos no próximo capítulo. Observe que  $f(\pi) = \pi$  enquanto que a série trigonométrica vale 0 para  $x = \pi$  porque a série representa uma função periódica que é uma boa aproximação para  $f$  sobre  $[-\pi, \pi]$ , entretanto nos extremos ou em pontos de descontinuidade da função a ser aproximada, ocorrem problemas que ainda voltaremos a discutir. Um programa em Pascal para calcular esta soma pode ser o seguinte:

```

Program soma;
Var n,teto: Extended;
    soma : Extended;
Begin
  WriteLn('Teto = ');ReadLn(teto);
  n:=1;soma:=0;
  While (n<=teto) Do
    Begin
      soma := soma + cos(n*pi)*sen(n*pi/2)/n;
      n:= n+1;
    End;
  WriteLn('Valor da soma: ',2*soma:10:5);
  WriteLn('o valor de pi/2 do Pascal eh: ',pi/2);ReadLn;
End.

```

2.  $f(x) = x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \\ &= \frac{x \sin(nx)}{n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

se  $n \neq 0$  e  $a_0 = 2\pi$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n\pi} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \\ &= -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

então teríamos, valendo a convergência,

$$f(x) = 2\pi - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

podemos testar com um programa em Pascal esta soma num valor escolhido de  $x$ , por exemplo  $x = \frac{\pi}{2}$ , então  $\text{sen}(\frac{n\pi}{2})$  assume ciclicamente os valores  $\{1, 0, -1, 0\}$  e assim na soma se eliminam os valores pares de  $n$ , temos:

$$2\pi - 2 \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \approx 2\pi - 1.56980 \approx \frac{3\pi}{2}$$

e no entanto o valor  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$  portanto temos um erro de  $\pi$ . Veremos abaixo que a fórmula correta é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx) \quad (3.30)$$

porque que  $a_0$  tem assim que vir dividido por 2. Este exemplo nos aponta para esta correção. Se diz que Euler teria feito cálculos de séries usando este método e uma das críticas que as vezes se faz ao seu trabalho inclui a observação de que estas “somadas” foram feitas sem nenhuma comprovação. De certa forma estamos repetindo o caminho de Euler, mas faremos a comprovação rigorosa destes limites no próximo capítulo. Os que algumas vezes criticam Euler, esquecem-se de que ele estava abrindo uma estrada muito larga e não tinha tempo para verificar os detalhes, estes ficaram para os seus sucessores, e se diz que até recentemente ainda haviam verificações para serem feitas...

3.  $f(x) = x^2 - \pi^2$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Porque  $\text{sen}N$  é ímpar e  $f$  é par, então  $b_n = 0$ . Se  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{(x^2 - \pi^2) \text{sen}(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \text{sen}(nx) dx = \\ &= 0 - \frac{1}{n\pi} \frac{-2x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

e no caso de  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) dx = -\frac{4\pi^2}{3}$ . Teríamos, com a correção sugerida pelo exemplo anterior:

$$f(x) = -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

se aplicarmos esta série de cosenos para  $x = \frac{\pi}{2}$   $\cos(\frac{n\pi}{2}) \in \{0, -1, 0, 1\}$  o que reduz a série a soma

$$-\frac{2\pi^2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{36} \cdots + \frac{(-1)^{(n+1)}}{4n^2} + \cdots$$

e novamente com o programa Pascal acima encontramos como valor desta soma até 1.000 aproximadamente o mesmo valor de  $f$  no ponto  $x = \frac{\pi}{2} \approx -7.40220$  confirmando mais uma vez a correção da fórmula com  $\frac{a_0}{2}$  em lugar de  $a_0$ .

A fórmula correta para série de Fourier é então:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (3.31)$$

e a explicação para este fato vem conseqüente com as ideias que desenvolvemos até agora: Queremos vetores *unitários* para gerar um espaço de funções e os vetores  $\cos K, \sin K$  satisfazem esta condição com  $K \neq 0$ , entretanto quando  $K = 0$ ,  $\sin 0 \equiv 0$  e  $\cos 0 \equiv 1$ . O vetor  $\cos 0$  é um candidato a vetor unitário, mas calculando o seu módulo, temos:

$$\|\cos 0\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2 \quad (3.32)$$

como não podemos mais *reformular* o produto escalar, resta-nos corrigir o vetor e definiremos:

$$\cos 0 \equiv \frac{1}{2}; \|\cos 0\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = 1 \quad (3.33)$$

o que se fez, historicamente, foi manter  $\cos 0$  com sua definição inalterada mas se corrigiu  $a_0$ :

$$a_0 := \frac{a_0}{2}.$$

A afirmação de Fourier em 1822, relativamente às funções periódicas, foi: “uma função periódica qualquer pode ser representada pela série trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (3.34)$$

O problema é que não existem *somas infinitas* e portanto a expressão acima implica numa discussão sobre convergência. Em vez de enfrentar o problema de frente, vamos nos beneficiar de séculos de História da Matemática e montar uma teoria que vai nos levar indiretamente a boa quantidade dos resultados existentes a respeito das *Séries de Fourier*. Isto será feito no próximo capítulo, de imediato vamos produzir alguns exemplos computacionais que nos mostram que tem sentido estudar o assunto.

**Exemplo 18** Os próximos dois gráficos (fig. 3.5), (fig. 3.6), comparam duas situações e ajudam a aclarar algumas ideias. No primeiro você pode ver o polinômio trigonométrico da função indentidade no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . O gráfico todo se estende ao longo do intervalo  $[-15, 15]$  e podemos ver que o gráfico de  $P_5(f)$  se aproxima do gráfico de  $f$  apenas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Fora deste último intervalo não há nenhuma “aproximação”. Os polinômios trigonométricos são

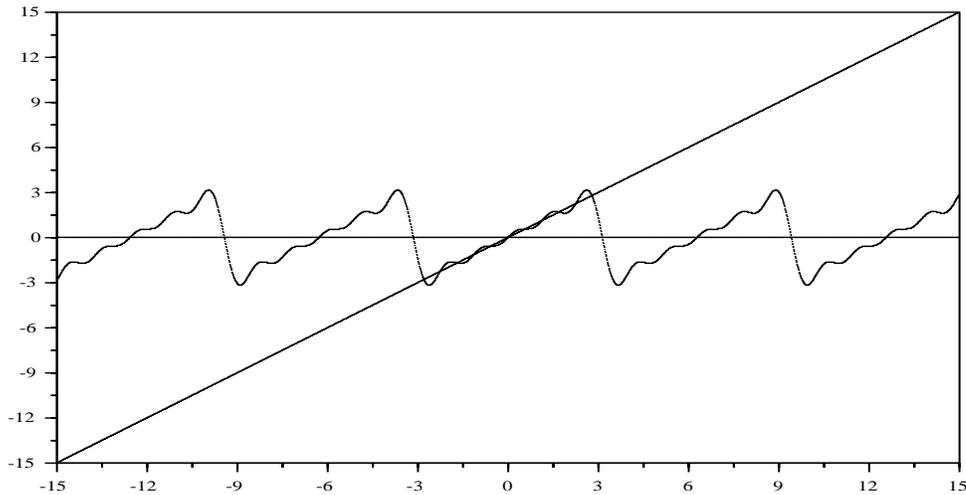


Figura 3.5: polinômio trigonométrico com 5 termos: aproximação da função dente de serrote em  $\mathbb{R}$ .

funções periódicas, o segundo gráfico mostra a função periódica que  $\text{graf}(P_{10}(f))$  de fato aproxima: a função dente de serrote, uma função descontínua.

Na prática o que temos não é uma série e sim um polinômio trigonométrico:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = P_N(f)(x). \quad (3.35)$$

As somas acima são os termos de uma sucessão de funções contínuas que desejamos caracterizar como “convergente” e tendo  $f$  como limite. Convergência de séries é o próximo assunto que deveremos desenvolver e dentro dele voltaremos a discutir a convergência das séries de Fourier.

**Observação 12** Espaço de funções gerado por  $\{\sin k, \cos k\}$  Acabamos de construir uma base de vetores ortonormais para o espaço  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ . É uma base que tem uma “quantidade” não enumerável de vetores. Como os vetores  $\sin k, \cos k$  são funções contínuas, vemos que  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$  tem dimensão não finita, ou como é habitual dizer-se, dimensão infinita. O conceito “dimensão” muda obviamente de sentido nos dois casos: finito, infinito, e não é apenas uma questão de “quantidade” muito grande de vetores na base. Ver conjectura de Cantor. Mas uma função não precisa ser contínua para que lhe possamos calcular os coeficientes de Fourier, veja a fórmula 3.26, nada nos impede de calculá-la com uma função descontínua desde que seja integrável. Assim parece que estes vetores geram um espaço que contém  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  como seu subespaço próprio. Este espaço se chama  $\mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ , mais um fato para demonstrarmos posteriormente. Esta é a metodologia de construção da Matemática: conjecturas são feitas quando temos um resultado aparentemente verdadeiro. A

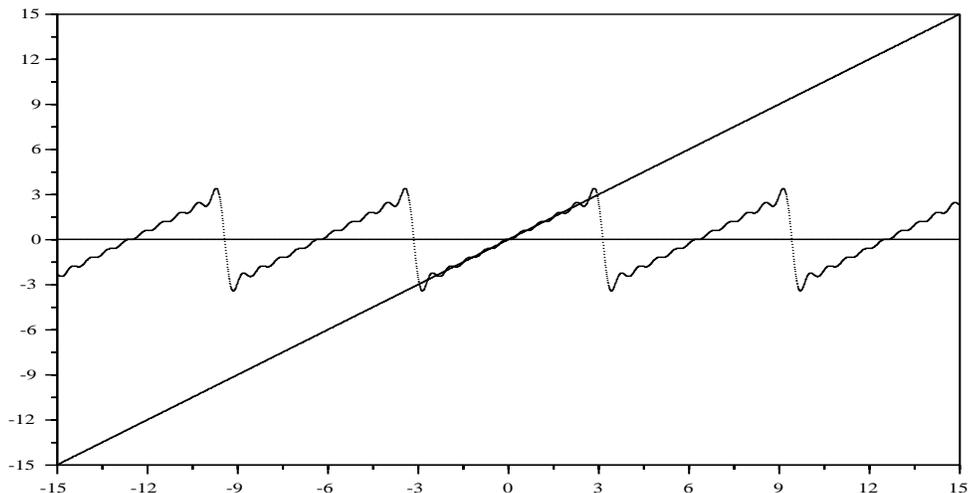


Figura 3.6: polinômio trigonométrico com 10 termos no intervalo  $[-15, 15]$ : aproximação da função dente de serrate em  $\mathbb{R}$ .

*palavra conjectura é uma etiqueta, indica que temos aparentemente um "teorema" que deve ser demonstrado depois ou, se surgir alguma contradição ao considerá-lo na teoria, ele perde a validade com as consequências dele tiradas, ou algumas vezes se restringe sua validade considerando-se uma teoria de menor alcance.*

**Observação 13** *A conjectura de Cantor. Georg Cantor, enunciou uma conjectura que até hoje ninguém conseguiu provar mas que é aceita como um axioma da Matemática estabelecendo "saltos de cardinalidade", que é o nome para a "quantidade dos elementos de um conjunto". Se esta quantidade for finita, (pleonasma), a cardinalidade é o que se costuma chamar de número de elementos de um conjunto. Cardinalidade é uma generalização do conceito quantidade de elementos de um conjunto. Falar na quantidade de elementos de um conjunto só é próprio se este conjunto for finito. Se o conjunto for infinito, perde sentido em falar-se na quantidade dos seus elementos, se diz então a sua cardinalidade.*

Vamos lhe sugerir alguns experimentos que podem ser feitos com auxílio do programa *Fourier*, e que lhe permitirão uma visão complementar caso você se decida a ler mais alguma coisa a este respeito. Ou brinque um pouco com estas ferramentas. O programa *Fourier* se encontra no arquivo *pas.zip* ver [17].

**Exercício 4** *Experiências com Polinômios Trigonômétricos. Os programas citados nestes exercícios são programas em Pascal que podem ser encontrados em <http://www.uwanet.br/matematica> em um arquivo chamado *pas.zip*. São programas livres.*

1. Use um programa de cálculo de integrais aproximadamente para verificar que  $\text{sen } k$  e  $\text{cos } j$  são ortogonais para quaisquer que sejam  $k$  e  $j$ .

2. Verifique numericamente qual é o módulo dos vetores  $\text{sen}k$  e  $\text{cos}j$  para vários valores de  $k$  e  $j$ . Primeiro use o produto escalar definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (3.36)$$

e depois inclua o coeficiente  $\frac{1}{\pi}$  na integral e volte a calcular os módulos destes vetores. Tente uma demonstração formal dos resultados alcançados.

3. Faça um programa que calcule as projeções de  $f(x) = \text{sen}(4x+3) + 3x+1$  nas direções dos vetores  $\text{sen}k$ ;  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$ . Estes números, como na Geometria Analítica, são os coeficientes da decomposição do vetor  $f(x) = \text{sen}(4x+3) + 3x+1$  relativamente ao conjunto de vetores  $\text{sen}k$ ;  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$ . Não se esqueça de manter presente que estamos trabalhando dentro de  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ , ou de  $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ .

4. Chame  $b_k$  aos coeficientes encontrados na questão anterior. Complete o programa para calcular o vetor  $g(x) = \sum_{k=1}^{10} b_k \text{sen}k(x)$  e faça os gráficos de  $f$  e  $g$  num mesmo sistema de eixos.

5. Faça um programa que calcule as projeções de  $f(x) = \text{sen}(4x+3) + 3x+1$  nas direções dos vetores  $\text{cos}K, \text{sen}K$ ;  $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$ . Chame este coeficientes de  $a_k, b_k$ , respectivamente. Complete o programa para calcular o vetor

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k \text{cos}K(x) + b_k \text{sen}K(x)$$

fazendo os gráficos de  $f$  e  $g$  num mesmo sistema de eixos. Lembre que estabelecemos a notação:  $\text{sen}K(x) = \text{sen}(kx)$   $\text{cos}K(x) = \text{cos}(kx)$  Estes coeficientes se chamam coeficientes de Fourier de  $f$ .

6. Rode o programa Fourier. Ele lhe permite ver um polinômio trigonométrico cujos coeficientes estão previamente definidos como uma sucessão no arquivo `fourier.num`.
7. Faça uma tabela para os coeficientes de Fourier para as seguintes funções, todas definidas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

(a)  $f(x) = x^n$ ;  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$

(b)  $f(x) = |x|$

(c)  $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(d)  $f(x) = -x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(e)  $f(x) = x^3 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(f)  $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = -x^2 \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(g)  $f(x) = x^3 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = -x^3 \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(h)  $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$ ;  $f(x) = -x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

- (i)  $f(x) = -x^2 \iff -\pi \leq x \leq 0$  ;  $f(x) = -x \iff 0 < x \leq \pi$   
(j)  $f(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}$   
(k)  $f(x) = \frac{3}{2}\chi_{[-1/3, 1/3]}$   
(l)  $f(x) = 2\chi_{[-1/4, 1/4]}$   
(m)  $f(x) = \frac{5}{2}\chi_{[-1/5, 1/5]}$

Veja no final do capítulo a tabela dos coeficientes de Fourier de algumas funções.

Vamos terminar esta introdução sobre as séries de Fourier com a descrição de algumas aplicações. Observe que qualquer dos itens aqui abaixo representa assunto para um livro inteiro e assim você deverá vê-los com esta perspectiva: são exemplos.

### 3.3 Aproximação polinomial clássica.

Vamos terminar este capítulo com um método de aproximação polimômial que se assemelha ao das séries trigonométricas.

#### 3.3.1 Quadrados mínimos.

A construção que faremos é bem geométrica. Ela consiste em calcular um “objeto”  $Q$  que se encontre a distância mínima de outro,  $f$ :

$$d(Q, f) < \epsilon$$

em que  $\epsilon$  é um erro “suportável”.

Os “objetos”  $Q$  que consideraremos são polinômios, e o *outro objeto dado*  $f$  será um conjunto de pontos observados em algum experimento. O módulo, ou *norma* que vamos usar para calcular esta distância mínima será a norma do espaço  $\mathcal{L}^2([a, b])$  em que  $[a, b]$  o “espaço” de tempo durante o qual se realizou o experimento.

Estaremos resolvendo uma equação:

$$d(Q, f)^2 = \|X - f\|_2^2 = \int_a^b |X(t) - f(t)|^2 dt < \epsilon^2 \quad (3.37)$$

mas também estamos “escolhendo” a incógnita que iremos encontrar ao decidir que  $Q$  será um polinômio.

#### Observação 14 *O problema:*

*Vamos aplicar este método, como dissemos acima, em uma função resultante de algumas observações feitas em um número finito de pontos do intervalo  $[a, b]$  durante o qual se realizou o experimento. Quer dizer que tudo que conhecemos de  $f$  são os valores*

$$\{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m)\}$$

*observados.*

*Este é um real impedimento para aplicar a fórmula do cálculo da distância de  $\mathcal{L}^2([a, b])$ . A solução é encontrar um método indireto que se assemelha muito ao usado na construção das séries de Fourier.*

Imaginemos para isto que possamos encontrar um conjunto de polinômios suficientemente simples:  $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$  tal que todo polinômio de grau menor ou igual a  $n$  se possa escrever em função destes. Os polinômios  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  são um exemplo da existência de tais polinômios, mas veremos que existem outros satisfazendo as condições que precisamos.

Ao final mostraremos como utilizar os dados discretos que temos sobre  $f$  para encontrar o polinômio  $Q$ .

Este é o nosso plano! Veja que  $f$  é o dado conhecido, frequentemente uma tabulação discreta de valores de algum fenômeno,  $Q$  é a aproximação desejada, logo a incognita do problema.

Se  $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$  forem os polinômios básicos mencionados na observação, de tal forma que  $\mathcal{E}_0$  é o polinômio constante, e  $\mathcal{E}_i$  é de grau  $i$ ,  $i > 0$ , então um polinômio  $Q$ , qualquer, de grau  $n$  se escreve:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{E}_k(x) \quad (3.38)$$

e impondo a condição de distância mínima de  $f$  temos:

$$\mathcal{N}(f, a_0, \dots, a_n) = \|f - Q\|_2^2 = \int_a^b (f(t) - \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{E}_k(t))^2 dt. \quad (3.39)$$

Esta expressão define uma função  $\mathcal{N}$  que depende das variáveis:

$$a_0, \dots, a_n$$

e do parâmetro  $f$ ,

$$\mathcal{N}(f, a_0, \dots, a_n) = \|f - Q\|_2^2 \quad (3.40)$$

e o nosso objetivo é de calcular um mínimo de  $\mathcal{N}$  relativamente as variáveis  $a_0, \dots, a_n$  que representam o polinômio  $Q$  e assim encontramos um polinômio que esteja o mais próximo possível de  $f$ . Uma condição *necessária* para se ter um mínimo de uma função é que a derivada se anule:  $\mathcal{N}' = 0$ , o que implica que suas componentes  $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial a_k} = \partial_k \mathcal{N}$ , as derivadas parciais, também se anulem. Calculando as derivadas parciais de  $\mathcal{N}$  vamos encontrar, para cada  $k$

$$\partial_k \mathcal{N} = -2 \int_a^b f(t) \mathcal{E}_k(t) dt + 2 \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b \mathcal{E}_j(x) \mathcal{E}_k(x) dx = 0 \quad (3.41)$$

temos portanto um sistema de equações lineares nas variáveis  $a_j$  em que também está envolvida a função  $f$ .

Veja que temos muitas *incognitas* em nosso problema:

$$f, a_0, \dots, a_n$$

e na verdade conhecemos apenas:

$$\{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m)\}.$$

então é necessário fazer *hipóteses de trabalho* que reduzam as incognitas.

**Observação 15** *Método da variação dos parâmetros. Este método se repete em toda construção matemática ou científica de modo mais geral:*

- *Se escreve a solução do problema de acordo com um modelo já conhecido, (algumas vezes se inventam novos modelos...).*
- *Se acrescentam hipóteses sobre os parâmetros permitindo encontrar-se uma solução particular.*
- *Se aplica uma variação sobre os parâmetros de modo a descobrir situações mais gerais em que se pode aplicar a solução encontrada.*

*Estamos tentando utilizar o modelo das séries de Fourier usando polinômios em lugar de  $\text{sen}K, \text{cos}K$ .*

A primeira hipótese que vamos fazer arremeda o que foi feito com os polinômios trigonométricos, quando impusemos a condição de ortogonalidade sobre os vetores  $\text{sen}K, \text{cos}K$ :

**Hipótese 2** *Os polinômios que formam a base do espaço sejam ortonormais.*

Com esta hipótese parte de nossas equações lineares acima desaparecem:

$$\int_a^b \mathcal{E}_j(t)\mathcal{E}_k(t)dt = \begin{cases} 0 & \Leftarrow j \neq k \\ 1 & \Leftarrow j = k \end{cases} \quad (3.42)$$

com esta simplificação o sistema de equações formado pelas derivadas parciais se reduz a igualdade:

$$a_k = \int_a^b f(t)\mathcal{E}_k(t)dt \quad (3.43)$$

e assim chegamos às equações semelhantes as que definiram os coeficientes de Fourier agora como condição de minimalidade.

Só nos resta descobrir um conjunto ortonormal de polinômios, para isto vamos descrever um método de ortonormalização de vetores num espaço vetorial qualquer.

**Observação 16** *A série de Fourier é uma solução ótima.*

*Associamos distância mínima com ortogonalidade, partimos da premissa de que nos interessava uma solução que minimizasse, do ponto de vista de energia o erro entre uma amostragem de um fenômeno  $f$  e um polinômio  $Q$  que desejamos obter.*

*O leitor poderia muito bem se perguntar porque não partimos direto da hipótese de ortogonalidade dos polinômios para escrever a equação acima como no caso dos polinômios trigonométricos.*

*Aparentemente poderíamos começar exatamente deste ponto, entretanto o nosso objetivo inicial foi outro: o de minimizar o erro de uma aproximação polinomial de  $f$ , logo tínhamos que estudar as condições de mínimo como fizemos acima.*

*Isto também mostra que as séries de Fourier são uma solução que minimiza o erro relativamente a um tipo de vetores escolhidos como base do espaço, os vetores  $\text{sen}K, \text{cos}K$ .*

### 3.3.2 O método de Gram-Schmidt.

O processo de Gram-Schmidt só pode ser desenvolvido num espaço com produto escalar e tem uma descrição simples:

- Considera-se um conjunto conhecido de  $n$  vetores linearmente independentes no espaço:

$$u_0, u_1, \dots, u_n$$

- Divide-se o primeiro vetor pelo seu módulo obtendo-se assim

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|},$$

um vetor unitário. *Faz-se agora*  $u_0 = e_0$ . Observe que o espaço pode se reduzir a  $\{0\}$  e nele não há vetores ortonormais, vamos supor que este não é o caso, (*do contrário nada haveria a fazer*).

- Se escolhe agora o segundo vetor linearmente independente do primeiro,  $u_1$  e se subtrai dele a componente na direção de  $e_0$  resultando em

$$u_1 := u_1 - \langle u_1, u_0 \rangle u_0$$

e<sup>1</sup> se divide  $u_1$  por sua norma para obter um vetor unitário:

$$u_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

- Se itera o processo:

$$u_2 := u_2 - \langle u_2, u_0 \rangle u_0 - \langle u_2, u_1 \rangle u_1$$
$$u_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

- A expressão geral e computacional seria:

$$u_k := u_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle u_k, u_j \rangle u_j$$
$$u_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Observe que com o conceito de *atribuição* se torna desnecessário incluir mais uma *variável* nas definições e assim o conjunto de vetores ortonormais fica representado com as mesmas letras que inicialmente representavam os vetores da coleção de vetores linearmente independentes dada inicialmente.

A igualdade é uma relação, serve para produzir sentenças abertas que podem ser *falsas* ou *verdadeiras*, enquanto que a *atribuição* é uma operação.

---

<sup>1</sup>Vamos introduzir formalmente o símbolo  $x := F(x)$  neste livro cujo significado são as seguintes operações matemáticas:

1.  $y = F(x)$ ; em que  $F$  representa um conjunto de operações legais sobre  $x$ .
2. A atribuição: *fazendo-se agora*  $x = y$ .

e que chamaremos de atribuição.

**Exemplo 19** Ortonormalização de vetores.

Vamos ortonormalizar o seguinte conjunto de vetores:

$$\{(1, 2, 3), (3, 1, 4), (2, 1, 1)\}$$

tornado o primeiro unitário:

$$u_1 = \frac{(1, 2, 3)}{\|(1, 2, 3)\|} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

eliminando a componente de  $u_1$  em  $u_2$

$$\begin{aligned} u_2 &:= u_2 - \langle u_2, u_1 \rangle u_1 = \\ (3, 1, 4) &- \left[\frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{12}{\sqrt{14}}\right] \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \\ &= (3, 1, 4) - \left[\frac{17}{\sqrt{14}}\right] \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \\ &= (3, 1, 4) - \left(\frac{17}{14}, \frac{34}{14}, \frac{51}{14}\right) = \left(\frac{25}{14}, \frac{-20}{14}, \frac{5}{14}\right) \end{aligned}$$

dividindo  $u_2$  por seu módulo:

$$u_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{14}}, \frac{-4}{\sqrt{3}\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right)$$

calculando  $u_3$

$$\begin{aligned} u_3 &:= u_3 - \langle u_3, u_1 \rangle u_1 - \langle u_3, u_2 \rangle u_2 = \\ &= (2, 1, 1) - \left[\frac{7}{\sqrt{14}}\right] u_1 - \left[\frac{7}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right] u_2 \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) \end{aligned}$$

dividindo  $u_3$  por seu módulo:

$$\begin{aligned} u_3 &:= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Os tres vetores ortonormais são:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \\ u_2 &= \left(\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{14}}, \frac{-4}{\sqrt{3}\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right) \\ u_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Os cálculos feitos acima mostram que a obtenção dos vetores ortonormais podem ser bem “envolventes” vamos procurar uma solução algorítmica para o caso dos polinômios.

Partimos dos vetores linearmente independentes:

$$\{\mathcal{E}_0(x) = 1, \mathcal{E}_1(x) = x, \mathcal{E}_2(x) = x^2, \dots, \mathcal{E}_n(x) = x^n\}$$

para chegar a um conjunto de polinômios ortonormais. Vamos usar a atribuição para simplificar a linguagem deixando as expressões no ponto de serem implementadas numa linguagem *funcional* de computação, conseqüentemente os mesmos símbolos  $\mathcal{E}_k$  irão ainda representar os vetores resultantes.

1. passo: Determinação de  $\mathcal{E}_0$ : normalização do vetor 1.

$$\|1\| = \int_a^b 1 dx = b - a$$

logo podemos dividir o vetor 1 por  $\sqrt{b-a}$  para garantir que tenha norma <sup>2</sup> 1 ou re-definir o produto escalar como fizemos no caso das séries de Fourier. Vamos adotar a segunda opção e dividir o produto escalar por  $b-a$ . Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(x) &= 1 \\ \langle f, g \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Nos cálculos que se seguem, escreveremos  $\int f(x)dx$  em vez de  $\int_a^b f(x)dx$ .

2. passo: Determinação de  $\mathcal{E}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x) &:= \mathcal{E}_1(x) - \langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0 \rangle \mathcal{E}_0(x) \\ &= x - \langle x, \mathcal{E}_0 \rangle \mathcal{E}_0(x) \\ &= x - \left(\frac{1}{b-a} \int t \mathcal{E}_0(t) dt\right) \mathcal{E}_0(x) = \\ &= x - \left(\frac{1}{b-a} \int t dt\right) \mathcal{E}_0(x) = \\ &= x - \frac{a+b}{2} \\ \mathcal{E}_1 &:= \frac{\mathcal{E}_1}{\|\mathcal{E}_1\|_2} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{\frac{1}{b-a} \int \mathcal{E}_1^2(x) dx}} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{\frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + \frac{(a+b)^2 x}{4} \right]_a^b}} = \\ &= \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{\frac{(b-a)}{2}} \end{aligned}$$

que é unitário e ortogonal a  $\mathcal{E}_0$ .

---

<sup>2</sup>se nos restringirmos ao espaço das funções contínuas no intervalo  $[a, b]$  o produto escalar define uma norma

3. passo: As duas equações gerais deste processo iterativo são:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_k(x) &:= \mathcal{E}_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j \rangle \mathcal{E}_j(x) = \\
 &= x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle t^k, \mathcal{E}_j(t) \rangle \mathcal{E}_j(x) = \\
 &= x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{1}{b-a} \int t^k \mathcal{E}_j(t) dt \right) \mathcal{E}_j(x) = \\
 &= x^k - \frac{1}{b-a} \int \left[ \sum_{j=0}^{k-1} t^k \mathcal{E}_j(t) \mathcal{E}_j(x) \right] dt \\
 \mathcal{E}_k &:= \frac{\mathcal{E}_k}{\|\mathcal{E}_k\|} =
 \end{aligned}$$

As contas acima descritas são difíceis de serem levadas à termo exatamente como se encontram sugeridas. Para calcular com esta “generalidade” um programa de *computação algébrica* rodando num *pentium a 100 Mhz* levou 10 minutos para calcular os tres primeiros termos. A solução para cálculos desta natureza consiste em escrever o programa com as equações gerais como está acima, entretanto, rodá-lo com os valores de  $a, b$  que interessam na prática. O resultado comparativo é: *os tres primeiros termos foram conseguidos em alguns segundos.*

Ao mesmo tempo o *próprio programa é fórmula geral* que precisamos e que pode ser aplicada em qualquer caso particular.

Abaixo você tem esta *fórmula-programa* em condições ser aplicada:

**Exemplo 20** *Fórmula-programa.*

```

u0 := proc(x) 1;end; a:= 0;b:= 3; s1 :=1;
u1 := proc(x) (1/s1)*(x - (1/(b-a))*(b^2 - a^2)/2 );end; s2:=1;
s1:=sqrt( (1/(b-a))*Int(u1(t)^2,t=a..b));s1 :=evalf(s1);

```

*Retorne à definição de u1 para que ela volte a ser lida com a nova versã de s1.*

```

u2 := (1/s2)*proc(x) (1/s2)*(x^2 - (1/(b-a))*int(t^2*u1(t),t=a..b)*
u1(x) - (1/(b-a))*int(t^2,t=a..b)); end; s3:=1;
(1/(b-a))*int(u1(t)*u2(t),t=a..b);
s2:= sqrt(evalf((1/(b-a))*int(u2(t)^2,t=a..b))):s2;

```

*Retorne à definição de u2 para que ela volte a ser lida com a nova versã de s2.*

```

u3 := proc(x) (1/s3)*(x^3 - (1/(b-a))*int(t^3*u2(t),t=a..b)*u2(x) -
(1/(b-a))*int(t^3*u1(t),t=a..b)*u1(x) -
(1/(b-a))*int(t^3,t=a..b)) ; end; s4:=1;
s3:= sqrt(evalf((1/(b-a))*int(u3(t)^2,t=a..b))):s2;

```

Retorne à definição de  $u_3$  para que ela volte a ser lida com a nova versão de  $s_3$ .

```
(1/(b-a))*int(u3(t)*u2(t),t=a..b);
(1/(b-a))*int(u3(t)*u1(t),t=a..b);
(1/(b-a))*int(u3(t)*u1(t),t=a..b);
sqrt((1/(b-a))*int(u3(t)^2,t=a..b));
```

A fórmula pode ser estendida para  $n$  operações com cópia de blocos que se encontram claramente demarcados por observações escritas no *modo texto* do programa de *computação algébrica*. Estas observações têm dupla finalidade:

1. Marcar os blocos lógicos do programa.
2. Relembrar que a operação de definição de  $\mathcal{E}_k$  deve ser iterada depois que o coeficiente  $s_k$  foi calculado com seu valor definitivo. A linha em que  $u_k$  está definido pode também ser repetida evitando-se a observação e o contacto manual com o programa...

O último bloco na listagem anterior representa alguns testes de ortogonalidade e um teste da norma do último vetor calculado.

Construímos assim uma família com  $n$  polinômios ortonormais e exatamente à semelhança da aproximação com *polinômios trigonométricos* sendo a última equação ?? os coeficientes de  $f$  relativamente aos vetores unitários  $\mathcal{E}_k$  resultando na igualdade aproximada:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathcal{E}_k(x) \approx f(x). \quad (3.44)$$

Como os vetores ortonormais foram obtidos como condição de mínimo de uma função, eles minimizam  $\|f - Q\|_2$  e demonstramos assim:

**Teorema 11** *Aproximação com polinômios ortonormais.*

*Dada uma função contínua  $f$  no intervalo  $[a, b]$  as equações*

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \\ Q(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{E}_k(x); \\ a_k &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \text{cal} \mathcal{E}_k(t) dt \end{aligned}$$

*definem um polinômio  $Q$  tal que*

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathcal{E}_k(x) \approx f(x).$$

*O polinômio  $Q$  é uma solução de minimização do erro  $|f - Q|$ .*

Estes resultados podem ser postos num quadro mais geral, em nenhum momento usamos a continuidade da função  $f$  na construção acima, e como já sabemos que o espaço  $\mathcal{L}^2([a, b]) \supset \mathcal{C}([a, b])$  então podemos substituir no teorema *função contínua por função de quadrado integrável*.

Finalmente, o interesse que se pode ter na construção que fizemos fica na busca de um polinômio  $Q$  que aproxime uma função desconhecida  $f$  da qual temos apenas uma *amostragem* em um número finito de pontos do intervalo  $[a, b]$ . Estes dados podem ser usados para calcular os coeficientes  $\alpha_k$ , as projeções de  $f$  ao longo dos vetores básicos  $\mathcal{E}_k$  com a soma de Riemann :

$$\alpha_k \approx \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^n f(z_j) \mathcal{E}_k(z_j) \Delta z_j \quad (3.45)$$

em que  $\{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m)\}$  são os valores conhecidos de  $f$ . Estes cálculos serão tanto mais precisos quanto mais densa for a amostragem  $\{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m)\}$  de  $f$ .

**Observação 17** *Quadrados mínimos.*

Denominamos com o sub-título de quadrados mínimos o conteúdo desta seção. Chama-se de um problema de quadrados mínimos a busca de uma função contínua, em geral um polinômio, muitas vezes uma reta, função do primeiro grau, ou uma função do segundo grau, que minimize a distância

$$\sum_{k=0}^n |f(z_k) - Q(z_k)|^2.$$

Foi isto que conseguimos ao determinar o polinômio  $Q$  representando a fórmula final para o valor aproximado de  $\alpha_k$  a discretização do método.

**Exercício 5** *Aproximação por polinômios ortonormais.*

1. *Polinômios linearmente independentes*<sup>3</sup>.

- (a) \*Enuncie o Teorema fundamental da Álgebra.
- (b) *Mostre que uma coleção crescente de polinômios, segundo o grau, é linearmente independente sobre um intervalo qualquer  $\iff$  não contém o polinômio constante não nulo.*
- (c) *Estabeleça a relação entre os dois itens anteriores.*

2. *Prove que se*

$$\{\mathcal{E}_0(x) = 1, \mathcal{E}_1(x) = x, \mathcal{E}_2(x) = x^2, \dots, \mathcal{E}_n(x) = x^n\}$$

*forem ortonormais então  $\mathcal{E}_k$  ;  $k > 0$  tem pelo menos um zero no intervalo  $[a, b]$  sob consideração.*

3. (a) *Construa um programa que, dados os números*

$$\{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m), a, b, n\}$$

---

<sup>3</sup>Os exercícios marcados com asteriscos são de natureza teórica e o leitor deve decidir se lhe interessa fazê-los sem grandes consências caso prefira ignorá-los.

produza uma aproximação polinomial para  $f$ . Os números  $a, b$  são os extremos do intervalo de observação e  $n$  é o grau da aproximação polinomial. Teste os resultados graficamente com algumas funções conhecidas.

(b) Faça o programa calcular a norma

$$\|f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathcal{E}_k(x)\|_2$$

para as mesmas funções conhecidas.

(c) \* Inclua no programa mencionado acima uma estatística que meça o desvio padrão entre os valores conhecidos de  $f$  e do polinômio. Seu programa deve construir uma tabela de dados para memorizar a história de todas as funções analisadas que possa ser consultada como uma opção de menu.

Um livro clássico sobre este assunto, [24], tem cerca de 500 páginas, isto mostra que necessariamente as próximas páginas são uma pálida fotografia sobre o assunto. Os splines são considerados, por sua origem, Mas como estamos falando de aproximação terminariamos por deixar a ideia de que *séries de Fourier ou de Taylor* seriam métodos para, por exemplo, enfiar nas calculadoras eletrônicas os valores das funções, e isto não seria verdadeiro. O método usado é “splines” do qual falaremos agora um pouco e mostraremos como se pode construir alguns, de modo empírico, apenas para transmitir a idéia.

## 3.4 Séries numéricas.

### 3.4.1 Definições e exemplos.

As séries de Fourier nos alertaram para existência de somas parciais de funções que definem sucessões de funções. As sucessões cujo termo geral se apresentam na forma de somas parciais, se chamam **séries**.

**Definição 9** *Séries numéricas.* Seja  $s$  uma sucessão e definamos

$$S_n = \sum_{k=k_0}^n s_k.$$

$S$  é uma nova sucessão chamada de série de termo geral  $s_n$  ou série associada a  $s$ . Se  $s$  for positiva e seu termo geral será maior do que o número real  $a > 0$  então sua série associada crescerá além de qualquer limite sendo portanto divergente. Vemos assim que

**Teorema 12** *Condição necessária de convergência.* Se  $S$  for a série associada à sucessão  $s$  então

$$S \text{ é convergente} \Rightarrow \lim_n s_n = 0$$

Mas esta condição não é suficiente, o exemplo seguinte o mostra:

**Exemplo 21** A série associada a  $\frac{1}{n}$ . A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge.

**Dem**: Só poderemos demonstrar com exatidão este resultado com auxílio dos critérios de convergência que logo estudaremos, portanto esta demonstração vai repousar em dados intuitivos. Tente mostrar que as somas entre duas quaisquer potências de 10, sucessivas, por exemplo, entre 10 e 100, ou entre 100 e 1000, tem o mesmo valor, aproximadamente. Veja a seguinte listagem:

```
inicio ...10
fim ...100
soma = 2.34840926367
```

```
=====  
inicio ...100  
fim ...1000  
soma = 2.30709334291
```

```
=====  
inicio ...1000  
fim ...10000  
soma = 2.30303517549  
=====
```

```
log(10)= 2.30258509299  
=====
```

esta listagem de dados sugere que o valor comum das somas parciais tomadas entre duas potências de 10, (excluindo sempre a última) vale aproximadamente o número  $2.30258509299 = \log(10)$ .

Estes experimentos sugerem que o seguinte teorema seja demonstrado:

**Teorema 13** Hipótese sobre a série de Riemann.

$$\sum_{10^{n_1}}^{10^{n_2}-1} \frac{1}{k} \approx 2.3$$

Se este teorema puder ser demonstrado, usando a associatividade, podemos concluir que

$$\sum_{10^{n_1}}^{10^{n_2}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \sum_{j=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{1}{j} \approx (n_2 - n_1) * \log(10)$$

e assim as somas parciais crescem aproximadamente com uma progressão aritmética cuja razão é  $\log(10)$ . **q.e.d.** A “demonstração” acima não chega a ser errada, mas contém imperfeições técnicas. A técnica adequada para fazer esta demonstração passa pelo uso de desigualdades, majorando as soma para se concluir que as somas parciais crescem mais do que uma certa progressão aritmética. É preciso relembrar o óbvio, o programa que produziu a listagem dados acima, não pode

demonstrar a divergência da série, mas pode sugerir uma hipótese para ser demonstrada formalmente, como fizemos. A notação no exemplo acima deve ser discutida. Não existem somas com um “número de termos infinito”. A expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

representa um limite. Portanto a frase no exemplo deve ser entendida como “a série não tem limite”. Esta é forma de escrever este limite, mesmo quando ele não exista, imposto por uma tradição histórica que não vale a pena tentar corrigir, mesmo porque é cômodo. As somas parciais na série do exemplo, podem ser agrupadas em pacotes associados com as potências de 10 e assim se pode verificar que dentro destes pacotes a soma pode ser minorada pelo valor do primeiro pacote:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$$

o que mostra que a série cresce indefinidamente e proporcionalmente a este número para cada potência de 10. Isto ainda significa que o seu crescimento se amaina com o passar das potências de 10... Seu valor para  $n = 1000$  é 7.47442 e seu valor para  $n = 2000$  é 8.17285 com uma diferença de 0.6.

**Observação 18** Somas e séries. Não existem “somas” com um número infinito de termos, aliás, veja “infinito” n’outro lugar deste livro, o infinito é uma classe de objetos e não um único objeto. As séries são uma das maneiras de estender o conceito aritmético soma a uma família não finita de objetos. As integrais oferecem outra forma de fazê-lo. No caso das séries este método se pode descrever simplesmente como um cálculo de limites, e no caso das integrais se trata de um “limite” mais envolvido porque a “cardinalidade” do funil que conduz a este limite pode ser diferente. A palavra técnica usada em Matemática não é “funil” e sim, filtro, mas a ideia é de um afinilamento numa certa direção que generaliza o conceito de limite. Séries são um tipo de integral, entretanto.

### 3.4.2 Critérios de convergência.

Vamos começar com um exemplo.

**Exemplo 22** As séries geométricas. O cálculo seguinte nos permite calcular somas de progressões geométricas:

$$(r - 1)(r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1) = r^{n+1} - 1$$

de onde se conclui que

$$r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1 = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Se  $|r| < 1$  então  $\lim_n (r^n) = 0$  e assim vemos que as séries geométricas associadas às progressões geométricas de razão menor que 1 em módulo, convergem para

$$\frac{1}{1 - r}$$

As séries geométricas são as únicas que sabemos calcular diretamente. Outras séries podem ser calculadas indiretamente mas vamos logo ver que as séries geométricas desempenham um papel central no estudo das séries. Se uma sucessão  $s$  for positiva e termo a termo menor que uma série geométrica de razão menor que 1 em módulo, então será convergente porque suas somas parciais serão menores que as somas parciais da série geométrica. Este teorema é importante ser apresentado em toda sua generalidade.

**Teorema 14** *Teorema de comparação de séries. Sejam  $s, t$  duas sucessões positivas tais que*

$$\forall n > n_0 : s_n \leq t_n$$

*então se a série associada a  $t$  convergir, também converge a série associada a  $s$ . Se divergir a série associada a  $s$  também diverge a série associada a  $t$ :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} t_k < \infty &\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} s_k < \infty \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} s_k = \infty &\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} t_k = \infty \end{aligned}$$

Vamos introduzir uma simplificação na linguagem que é muito corrente. Dada uma sucessão  $s$  passaremos a dizer apenas a “série  $s$ ” quando quisermos dizer “a série associada a  $s$ ”.

Aplicamos o teorema anterior às séries geométricas para compará-las com outras séries: se uma série  $s$  positiva for tal que

$$s_n \leq r^n ; |r| < 1$$

então  $S$ , a série  $s$ , converge também.

**Exercício 6 \***

*Desenvolva a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

*e compare-a com a série geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  para concluir que é uma série convergente.*

Vamos deduzir um teorema semelhante anterior comparando séries com uma integral. Se uma sucessão  $s$  for positiva, as suas somas parciais podem ser interpretadas como a soma dos retângulos de base 1 e altura  $s_n$ .

Veja o gráfico 3.7, nele estão representadas a área  $\sum_{k=1}^N s_k$  e  $\int_1^N s(x)dx$  observe que a função sob sinal de integral é  $s(x)$  é a mesma equação que define a sucessão  $s$ . O gráfico também sugere que  $s$  é decrescente, e vamos adotar isto como hipótese do nosso futuro teorema. Finalmente há duas maneiras de interpretar

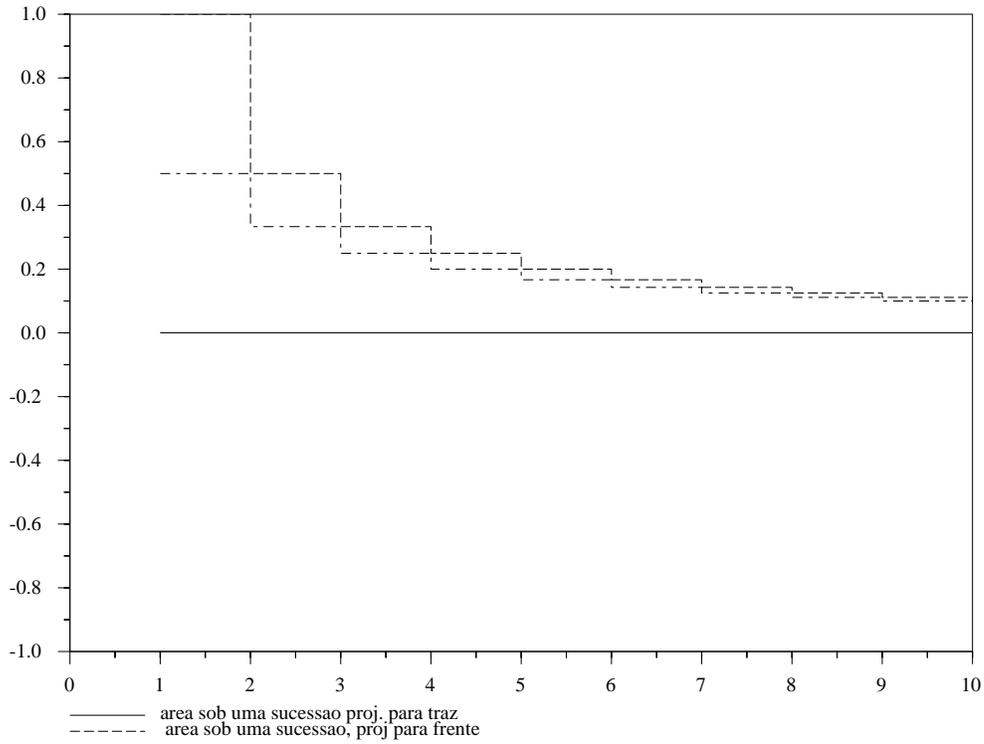


Figura 3.7: Área associada a uma soma parcial-projeção para traz - projeção para frente.

geometricamente a área sob a sucessão, compare os gráficos na (fig. 3.7), uma fornece o valor da soma *por maior* e a outra oferece o valor da soma *por menor*. Compare com as somas parciais:

$$\sum_{k=1}^N s_k ; \quad \sum_{k=2}^{N+1} s_k ;$$

Estas duas interpretações geométricas nos conduzem a

$$\sum_{k=2}^{N+1} s_k \leq \int_1^{N+1} s(x)dx \leq \sum_{k=1}^{N+1} s_k$$

Sob a hipótese de que  $s$  seja integrável, temos:

$$S - s_1 = \sum_{k=2}^{\infty} s_k \leq \int_1^{\infty} s(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k = S$$

que é uma desigualdade da forma

$$S - s_1 \leq I \leq S \quad (3.46)$$

em que  $S$  representa o limite da série e  $I$  o limite da integral. A conclusão é que  $S$  converge sse  $I$  converge. Demonstramos assim

**Teorema 15** *Teste da integral.* Se  $s$  for uma função decrescente então  $\int_1^\infty s(x)dx < \infty$  sse  $\sum_{k=1}^\infty s_k$  converge e

$$\sum_{k=2}^\infty s_k \leq \int_1^\infty s(x)dx \leq \sum_{k=1}^\infty s_k$$

**Exemplo 23** *Uma aplicação do teste da integral.* Já fizemos referência anteriormente que  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$  é divergente, mas que  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$  é convergente se  $p > 1$ . Estamos em condições de demonstrar isto com o teste da integral.

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{1}{x^p} dx &= x^{1-p} \Big|_1^N = \\ &= \frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \\ &= \frac{N^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

O limite da última expressão é  $\frac{1}{p-1}$ .

**Conclusão:** como a integral acima é finita, então para todo  $p > 1$  a série  $\phi(p)$ :

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$$

converge e portanto o seu valor pode ser calculado com um programa de computador, aproximadamente.

Assim, se  $p = 2$  temos:

$$\int_{k=1}^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934 = \sum_{k=1}^{50000} \frac{1}{k^2}$$

ou se  $p = 3$  temos:

$$\frac{1}{2} = \int_{k=1}^\infty \frac{1}{x^3} dx < \sum_{k=1}^{37000} \frac{1}{k^3} = 1.2020547 < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3},$$

ou ainda se  $p = 11$  temos:

$$0.1 = \int_{k=1}^\infty \frac{1}{x^{11}} dx < \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^{11}} = 1.0009945 < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{11}}.$$

Sã bons exemplos de resultados para serem testados com um programa de computador para somar termos de uma série. Observe que apenas no primeiro caso nós conhecemos o valor exato, mas o método para obtê-lo não é o descrito acima e sim com auxílio das séries de Fourier, como veremos adiante.

Completando uma observação anterior, dissemos que as únicas séries que sabíamos calcular eram as geométricas, vemos agora um *meio indireto* para calcular as séries chamadas  $\Phi(p)$  ou ainda chamadas *séries de Riemann*.

**Observação 19** *Sem querer diminuir a importância do resultado contido no exemplo anterior, vejamos que se trata de uma agulha num palheiro e que portanto continua válida nossa observação anterior de sabermos calcular apenas as séries geométricas. Nosso objetivo com esta observação é o de reduzir os fatos à sua real significância: não interessa por si próprio o cálculo do valor de uma série, porque isto só pode ser alcançado em alguns casos particulares. Muito mais importante, e é este o conteúdo dos teoremas de comparação, é poder mostrar que uma série converge. Sabendo que  $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$  converge, o seu valor exato é menos importante e pode ser obtido aproximadamente por um programa de computador. A arte de calcular séries é bonita mas não é científica no sentido de que ela não pode produzir resultados efetivos. Então o que é científico é demonstração da convergência. Os testes de convergência por comparação sugerem que é preciso ter um estoque grande de séries convergentes. Com as séries geométricas e as séries  $\Phi(p)$  já podemos admitir que temos um estoque modesto, mas significativo.*

**Exemplo 24** *A divergência da série harmônica de Riemann. Vamos deduzir do já exposto que a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

*é divergente.*

*Uma demonstração direta usando o teste da integral seria impossível porque nos levaria a discutir a finitude de*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

*o que nos levaria a um círculo vicioso. O que vamos fazer é completar os dados imprecisos que apresentamos anteriormente. Modificando o teste da integral temos:*

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} \frac{1}{k} < \int_{n_1+1}^{n_2} \frac{dx}{x} < \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{k}$$

*Uma propriedade da integral da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  que enunciaremos, (dizendo apenas que sua demonstração se pode fazer com alguma astúcia a partir da definição de integral por aproximação de somas de Riemann):*

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{a/b}^1 \frac{dx}{x} = \int_1^{b/a} \frac{dx}{x}$$

isto, é dizendo em outras palavras, que um dos limites de integração pode ser cancelado na integral. Usando esta propriedade temos:

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} \frac{1}{k} > \int_1^{n_2/(n_1+1)} \frac{dx}{x} > \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{k}$$

Se escrevermos agora  $n_1$  e  $n_2$  como potências sucessivas de 10 concluímos:

$$\sum_{k=10^{n_1}}^{10^{n_1+1}} \frac{1}{k} > \int_1^{10} \frac{dx}{x} = C > \sum_{k=10^{n_1+1}}^{10^{n_1+2}} \frac{1}{k}$$

e assim os pacotes de somas parciais entre duas potências de sucessivas de 10 é maior do que, (a desigualdade que faltava no exemplo anterior...), a constante

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} = C$$

que é o número  $\log(10)$  que já havíamos achado experimentalmente.

Vamos estudar outro método de análise da convergência de uma série que analisa o quociente.

Suponhamos que  $S_n = \sum_{k=1}^n s_k ; s_k > 0$  seja convergente e que possamos provar que

$$\lim_k \frac{s_k}{t_k} = r \in \mathbb{R} ; r > 0$$

entã as sucessões  $s$  e  $t$  têm mesma ordem de grandeza e a convergência de  $S_n = \sum_{k=1}^n s_k$  implica na convergência de  $T_n = \sum_{k=1}^n t_k$ , entretanto não como o mesmo limite. Demonstramos:

**Teorema 16** *Comparação de séries por quociente. Se os termos gerais  $s_k, t_k$  de duas séries tiverem mesma ordem de grandeza, entã a convergência de uma das séries implica a convergência da outra.*

Mencionamos acima a *ordem de grandeza* que é um conceito muito importante e que precisa ser estabelecido detalhadamente:

**Definição 10** *Ordem de grandeza.*

*Mesma ordem de grandeza: Dizemos que duas sucessões  $s, t$ , têm mesma ordem de grandeza se*

$$\lim_k \frac{s_k}{t_k} = r$$

*para algum  $r \in \mathbb{R} ; r > 0$*

*Ordem grandeza inferior: Diremos que a ordem de grandeza de  $s$  é menor que a ordem de grandeza de  $t$  se  $r$  no limite acima for zero.*

*Notação de Landau: Quando duas sucessões tiverem mesma ordem de grandeza, isto é comumente indicado com a notação*

$$s = \mathcal{O}(t)$$

*que se lê “s é um grande  $\mathcal{O}$  de t”, e quando a ordem de grandeza de s for menor que a de t isto se indica com*

$$s = o(t)$$

*que se lê “s é um pequeno  $o$  de t”.*

**Exemplo 25** *Ordem de grandeza de sucessão.*

Séries  $\Phi(p)$ . *Dados dois “expoentes”  $p, q$  então*

$$\lim_k \frac{\frac{1}{k^p}}{\frac{1}{k^q}} = \lim_k \frac{k^q}{k^p} = \lim_k k^{q-p}$$

*que será zero se  $q < p$  e será  $\infty$  se  $q > p$ .*

Séries  $\Phi(p)$  II. *Se os “expoentes em duas séries  $\Phi(p)$  forem diferentes, suas ordens de grandeza serão diferentes. Observe que neste caso ambas serão convergentes se  $p, q > 1$ .*

Maior e Menor ordem de grandeza.  $4 < 5$  mas  $\frac{5}{4} < 2$  logo 4, 5 têm mesma ordem de grandeza. 16.000.000.000.000 e 500.000.000 têm também a mesma ordem de grandeza..., um é o tamanho do roubo de alguns bancos em 1995 e o outro o orçamento minguado da Universidade do Rio Grande... é um conceito pouco apropriado para tratar com roubos de dinheiros públicos.

O número e. *Vamos comparar o fatorial com uma potência  $x^n$  de um número qualquer:*

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots, k! \dots$$

*Temos uma sucessão  $s_k = k!$ , o quociente*

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1$$

*portanto é maior do que o quociente*

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{x^{k+1}}{x^k} = x$$

*das potências de um número  $x$  qualquer a partir de  $k+1 > x$ :*

$$\frac{(k+1)!}{k!} > \frac{x^{k+1}}{x^k} = x \Leftrightarrow k+1 > x,$$

*então  $k!$  é maior do que qualquer progressão geométrica, porque a condição  $k+1 > x$  significa apenas “para grandes valores de  $k$ ”. Digamos isto de*

outra forma:  $\frac{s_{k+1}}{s_k} > x$  para qualquer que seja  $x$  desde que  $k$  seja suficientemente grande. Consequentemente a razão entre dois termos sucessivos de  $s$  é maior do que qualquer razão geométrica.

Interessa-nos entretanto discutir a ordem de grandeza, o quociente acima diz que a sucessã  $k!$  é maior do que  $x^k$  para qualquer  $x$  a partir de  $k+1 > x$ . Se invertermos as frações teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)!} &< \frac{1}{x^{k+1}} < \frac{1}{x^k} ; \\ \frac{1}{(k+1)!} &< \frac{x^k}{x^{(k+1)}k!} < \frac{x^{(k+1)}}{x^{(k+1)}k!} < \frac{1}{x^{(k+1)}} ; \\ \frac{1}{(k+1)!} &< \frac{1}{xk!} < \frac{1}{x^{k+1}} ; \\ \frac{1}{\frac{(k+1)!}{x^{k+1}}} &< \frac{x}{k!} < \frac{x}{x^k} < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

para qualquer razão  $x$  suficientemente grande. Como a última fração tende a zero, a conclusão é que a primeira também tende a zero, logo se conclue que a ordem de grandeza de  $\frac{1}{k!}$  é menor do que a de qualquer progressã geométrica:

$$\forall x \quad \frac{1}{k!} = o\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

Uma das consequências é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

converge. Tudo que podemos saber é que a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  converge, mas quanto vale este limite? Pelo simples fato de convergir, define um número, foi dado a este número o nome  $e$ , seu valor pode ser calculado aproximadamente com qualquer reduzida da série. Outra série convergente é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

também converge para todo  $x > 1$ , porque a progressã geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k}$  converge para todo  $x > 1$  e pelo Teorema da comparação por quociente de séries.

### 3.5 Séries de funções.

O último exemplo nos oferece um gancho para um novo tópico. A expressã

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

define uma função desde que  $-1 < x < 1$ , porque esta série geométrica converge para qualquer  $x$ ;  $|x| < 1$ . Temos assim uma função:

$$F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.47}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{3.48}$$

é um novo tipo de função, definida por uma série cujos termos são funções. Podemos pensar num modelo de expressão que generaliza a anterior:

$$F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.49)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (3.50)$$

em que os termos da série são multiplicados pelos de uma sucessão  $a_k$ ;  $|a_k| \leq 1$ . No caso anterior temos  $a_k = 1$ , e, é claro, se  $|a_k| \leq 1$  melhoraremos as condições de convergência podendo, talvez ter um domínio mais amplo de válida para a função  $F(x)$ :

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.51)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (3.52)$$

com  $r > 1$ . O modelo mais genérico seria

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.53)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad (3.54)$$

este modelo, como redigido acima é muito difícil de ser discutido, mas casos particulares dele podem ser analisados com os dados que já temos. Por exemplo

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.55)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (3.56)$$

o modelo este que é do tipo

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.57)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (3.58)$$

e vai ser analisado na próxima seção.

### 3.5.1 Séries de potências.

**Definição 11** *Série de potências.*

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.59)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (3.60)$$

em que  $r$  é o maior número real positivo tal que se  $|x| < r$  a série que define  $F$  é convergente. O intervalo  $(-r, r)$  se chama “disco de convergência” da série de potências  $F$  e o número  $r$  é o seu “raio de convergência”.

As denominações *disco*, *raio* se devem ao fato de que estas funções se encontram naturalmente definidas para os números complexos que definem um plano e onde “disco e raio” tem um sentido mais “natural”. No caso

$$F : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

o raio de convergência é  $\infty$  porque, como já analisamos,  $\frac{1}{k!} = o(x^k)$ , quer dizer que os termos desta série satisfazem à condição necessária, mas *não suficiente* de convergência, (meio caminho andado).

Vamos ver que o raio de convergência depende do comportamento assintótico dos coeficientes  $a_k$ . Facilmente se vê que se eles forem constantes então o raio de convergência será 1 porque

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ax^k = A \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

cálculo que só é possível fazer se  $|x| < 1$  porque então os limites envolvidos existem.

**Observação 20** *Coefficientes limitados.* Se usarmos uma sucessão de coeficientes que seja limitada, não existe praticamente nenhuma diferença com a constante  $A$  usada acima. Uma sucessão que convirja para  $A$ , representa o número real  $A$ . Isto mostra que existe uma grande quantidade de sucessões diferentes que podemos usar como coeficientes para produzir pelo menos funções

$$F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.61}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{3.62}$$

Veremos que se uma sucessão definir o número zero, e há muitas e com ordem grandeza distintas, o resultado será um acréscimo no domínio de  $F$ . É este rumo que os nossos próximos cálculos vão tomar.

Os seguintes cálculos nos conduzem a uma conclusão:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \tag{3.63}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt[k]{a_k} x)^k \tag{3.64}$$

converge se assintoticamente<sup>4</sup>

$$\sqrt[k]{|a_k|} |x| < 1 \tag{3.65}$$

---

<sup>4</sup>quer dizer, se uma quantidade finita de termos desobedecer a regra, a regra ainda é obedida, ou ainda, estatisticamente falando a regra vale. Também a sucessão  $a_k$  dos coeficientes não precisa ter limite, ela pode ser divergente.

o que é suficiente se

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = r \quad (3.66)$$

$$|x| < \frac{1}{r} = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}} = \rho \quad (3.67)$$

que expressa assim a relação entre o tamanho máximo do módulo de  $x$  para que se tenha convergência em função de uma limitação assintótica de  $\sqrt[k]{|a_k|}$ . O número  $r$  em nosso exemplo inicial era 1 e correspondia até mesmo a sucessões de coeficientes limitados. Agora obtivemos a fórmula

$$r = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Tã menor seja a *limitação assintótica* de  $\sqrt[k]{|a_k|}$  tã maior pode ser o raio de convergência que limita o valor de  $x$ . Sã inversamente proporcionais. Como queremos expressar sob forma de *um raio de convergência* esta relação, vamos usar o inverso do valor assintótico de  $\sqrt[k]{|a_k|}$ :

$$|x| < \frac{1}{r} = \rho$$

para designar o raio de convergência:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}}$$

é o raio de convergência da série de potências:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (3.68)$$

Demonstramos assim o teorema:

**Teorema 17** *Lema de Abel. Consideremos a série de potências*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Se  $|x| < \rho = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}}$  então a série converge absolutamente e uniformemente sobre qualquer disco de raio  $\rho' < \rho$ . Nada se pode dizer quando  $|x| = \rho$ .

As séries de potências definem assim uma função no seu disco de convergência.

A parte de ser o *Lema de Abel* uma ferramenta importante uma vez que ele determina o domínio, o *disco*, de convergência de uma série de potências, ele fundamenta uma ideia que será usada com grande frequência: *temos duas sucessões,  $a_k$  e  $x^k$ , a segunda converge naturalmente quando  $|x| < 1$  mas o produto das duas pode convergir num conjunto mais amplo se a sucessã multiplicadora  $a_k$  for suficientemente pequena.* Em suma a ideia é que uma *sucessã multiplicadora* pode melhorar, ou piorar, a convergência de outra. Vamos fazer uso direto deste método para dar uma resposta razoável para o problema que deixamos aberto sobre as *séries de Fourier*, é o que faremos em seguida.

## 3.6 Generalizações.

Na primeira parte desta seção vamos tratar de uma generalização natural dos espaços de funções que discutimos e inclusive das desigualdades de Cauchy-Schwartz e triangular. Na parte final vamos aprofundar a discussão sobre convergência de séries com que terminaremos este capítulo.

### 3.6.1 Espaços de funções.

Vamos relatar rapidamente alguns resultados que generalizam as desigualdades de Cauchy-Schwartz e a desigualdade triangular. A primeira generalização é da desigualdade de Cauchy-Schwartz pois é com esta nova expressão que se pode obter a seguinte de maneira parecido como foi feito no parágrafo anterior. Repetindo a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \sqrt{\langle g, g \rangle} \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3.69)$$

sabemos que ela pode ser escrita como

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|g\|_2 \|f\|_2 \quad (3.70)$$

em que 2 é o *índice da raiz*, de tal modo que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Se agora escolhermos dois números positivos cuja soma seja também 1 um resultado análogo pode ser obtido:

**Teorema 18** *Desigualdade de Hölder* Se  $p, q$  forem números positivos tais que

1.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
2.  $f \in \mathcal{L}^p([0, 2\pi])$ ,  $g \in \mathcal{L}^q([0, 2\pi])$

então

$$|\langle f, g \rangle| \leq \sqrt[p]{\langle g, g \rangle} \sqrt[q]{\langle f, f \rangle}.$$

Se escolhermos o par  $(p, q) = (2, 2)$  retornaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, portanto, se a desigualdade de Hölder for verdadeira, e é, ver [21, pag. 230, desig. de Hölder para sucessões] ela é generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Em um certo sentido, e na demonstração isto é usado, a desigualdade de Hölder contém o significado das médias ponderadas,  $p, q$  se compensam sob a condição  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Esta desigualdade posta em termos das integrais que definem  $\langle, \rangle$  se escreve ainda

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} f(x)^p dx} \sqrt[q]{\int_0^{2\pi} g(x)^q dx} \end{aligned}$$

**Observação 21** A ausência de produto escalar nos espaços de Lebesgue  $\mathcal{L}^p([a, b])$ .

Entretanto, o símbolo  $\langle f, g \rangle$  não representa um produto escalar porque nos espaços  $\mathcal{L}^p([a, b])$  que generalizam o espaço  $\mathcal{L}^2([a, b])$  não há produto escalar e conseqüentemente eles tem uma geometria diferente da geometria euclidiana.

Com a desigualdade de Hölder se pode demonstrar a desigualdade triangular, (desigualdade de Minkowski):

**Teorema 19** *Desigualdade de Minkowski.*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

As mesmas desigualdades se podem enunciar e provar para espaços de sucessão:

**Teorema 20** *Desigualdade de Hölder para sucessão.* Se  $p, q$  forem números positivos e  $s, t$  duas sucessão tais que

1.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
2.  $s \in l^p(\mathbb{N})$ ,  $t \in l^q(\mathbb{N})$

entã

$$|\langle s, t \rangle| = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t_k \leq \tag{3.71}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|^p} \sqrt[q]{\sum_{k=0}^{\infty} |t_k|^q} \tag{3.72}$$

e a desigualdade de Minkowski:

**Teorema 21** *Desigualdade de Minkowski.* Se  $s, t$  forem sucessão entã

$$\|s + t\|_p \leq \|s\|_p + \|t\|_p.$$

Observe que a desigualdade de Minkowski é a *desigualdade triangular* generalizada. As demonstrações das destas desigualdades podem ser encontradas em [21, parte 2, pag 230, exerc. 4], a leitura do capítulo 9 de [21], onde se encontram estas demonstrações das desigualdades de Hölder e Minkowski, é recomendado para quem quiser ter uma ideia mais ampla do que discutimos aqui e é relativamente independente dos demais capítulos do mesmo livro.

### 3.6.2 Convergência condicional.

Nã discutimos em nenhum momento a convergência de uma série

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k \tag{3.73}$$

quando  $s$  nã fosse positiva. Ficou sempre implícito que estavamos tratando de séries de termos positivos. Vamos agora discutir a convergência de uma série qualquer. Infelizmente o único resultado seguro que temos é o seguinte:

**Teorema 22** da convergência absoluta. Se  $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$  convergir então  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$  converge.

**Dem**: É consequência direta da desigualdade triangular aplicada às somas parciais:

$$\left| \sum_{k=0}^n s_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |s_k|$$

portanto se a soma, em valor absoluto, for convergente, por um dos critérios de convergência de séries, qual? a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k$$

converge. **q.e.d.**

Este teorema mostra, portanto, como foi importante estudar as séries positivas porque delas sai tudo que podemos dizer de forma geral sobre as outras. Quando o Teorema da convergência absoluta falha, a série ainda pode convergir, como mostra o seguinte exemplo:

**Exemplo 26** Convergência de séries.

1. A série harmônica: A série harmonica  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$  é divergente. Com o teste da integral se verifica que suas somas parciais são comparáveis a integral

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n)$$

nos exercícios você irá encontrar outros resultados semelhantes.

2. A série alternada:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  converge para um número próximo de 0.7
3. e séries de Potências: Os termos da série alternada podem definir uma série de potências com raio de convergência 1

$$a_0 = 1 = f(0) ; a_1 = -\frac{1}{2} = f'(0) ; \dots ; a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} ; \dots$$

O problema se encontra em descobrir uma função que tenha estas derivadas na origem. A função  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  ajuda o início da procura, porque suas derivadas se alternam de sinal. Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+1} ; f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} ; f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \dots \\ \dots f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \dots ; \\ f(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots ; \end{aligned}$$

Integrando  $f$  vamos encontrar uma função interessante:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(x+1) = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots \\ F(1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots = S \end{aligned}$$

que é valor procurado da série alternada,  $S = \ln(2) \approx 0.7$ .

4. limitação do Lema de Abel: O lema de Abel garante a convergência de uma série de potências apenas dentro do disco de convergência, quando  $|x| < \rho$  em que  $\rho$  é raio de convergência. Aqui  $|x| = 1 = \rho$ .

5. Associatividade: Veja que, se  $N$  for par:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{2k};\end{aligned}$$

entretanto não podemos aplicar limite na segunda linha de equações porque teríamos duas séries divergentes às quais não se aplicaria o teorema da soma de limites. Não vale a associatividade generalizada para as séries que não converjam absolutamente.

Resta saber se os cálculos que fizemos acima, calculando integrais de uma série, tem alguma validade. Numéricamente eles se justificam, calculando a série alternada com um programa de computador o valor que se encontra é  $\ln(2)$ , então a prática força a teoria. Algumas lições se devem tirar deste exemplo, uma delas é que precisamos justificar a convergência de séries cuja convergência absoluta não se dá. Outro é que o Lema de Abel está com sua redação precisa: uma série de potências converge com certeza no disco de convergência determinado pelo raio de convergência, entretanto pode se dar convergência ou não, em cima da fronteira do disco.

Este exemplo justifica a criação do termo *convergência condicional*:

**Definição 12** *Convergência condicional*. Dizemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k$$

é condicionalmente convergente se for convergente mas não absolutamente convergente.

**Observação 22** *Convergência condicional em oposição à convergência absoluta*.

O termo *convergência condicional*, do ponto vocabular, é péssimo uma vez que não traduz corretamente a oposição a convergência absoluta.

Veja o último exemplo acima, ele mostra que não vale a associatividade generalizada quando uma série não convergir absolutamente. Tais séries convergem dependendo do arranjo dos seus termos (negando-se assim a propriedade associativa para séries), como dependem do arranjo dos termos, convergem condicionalmente.

É esta a razão do nome, mas como tantos outros termos que se agregaram ao linguajar matemático, este ficou consagrado pelo uso.

É muito difícil verificar diretamente se uma série é convergente. Em geral se consegue o resultado indiretamente usando-se algum série de Taylor, é a ideia contida no acima, multiplicando-se os termos  $s_k$  por  $x^k$  temos um meio para discutir a convergência de

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

com auxílio do Lema de Abel e de onde se pode deduzir a convergência de uma série numérica particular

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k$$

em que  $r$  é um valor particular dado a  $x$  dentro do raio de convergência da série de potências. Mas é preciso chamar a atenção do leitor que o método é artesanal, sem nenhum preconceito contra o artesanato, é preciso salientar entretanto a falta de método claro e geral.

**Exercício 7** 1. Verifique que se  $a > 1$  então  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ . Consequentemente se numa série de potência os coeficientes convergirem para  $a > 1$  então o seu raio de convergência será  $\rho = 1$ .

2. Verifique que se  $0 < a < 1$  na questão anterior, a conclusão é a mesma. Enuncie o resultado geral.

3. Encontre a série de Taylor de  $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$  desenvolvida no ponto  $a \neq -3$ . Calcule o seu raio de convergência.

4. Qual é o raio de convergência da série de Taylor de  $f(x) = \frac{P(x)}{x-a}$  no ponto  $x = b \neq a$ .

5. Encontre as séries de Taylor de  $\sin$  e de  $\cos$  num ponto  $x = a$  qualquer e calcule os seus respectivos raios de convergência.

6. (a) Encontre a série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \Leftarrow x \in (0, \pi] \\ -\cos(x) & \Leftarrow x \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (3.74)$$

(b) Calcule  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$

7. Considere a função de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \Leftarrow x \in [-\pi, \pi] \\ \text{estensão periódica} & \Leftarrow x \notin [-\pi, \pi] \end{cases} \quad (3.75)$$

Calcule a sua série de Fourier de  $f$

8. Qual é a comparação de ordem de grandeza entre  $n$  e  $\log(n)$ ? Determine os limites:

$$\lim_n \frac{n}{\log(n)} \quad \lim_n \frac{\log(n)}{n}$$

9. Se  $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}$ , converge  $u_n$ ?

10. Escreva a série de Taylor de  $f(x) = \ln(x+1)$  no ponto  $x=0$  e calcule o seu raio de convergência. Como  $\ln(2) < \infty$  verifique que o Lema de Abel tem sua redação correta e conclua que série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

converge.

11. (a) Verifique que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  é divergente.  
 (b) Se  $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}$ ,  $u$  é uma sucessã convergente ou divergente?  
 (c) Se  $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ,  $u$  é uma sucessã convergente ou divergente? Se convergente qual o seu limite?  
 (d) constante,  $\gamma$ , de Euler: Verifique se  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  converge ou diverge.
12. Calcule  $\limsup u$  e  $\liminf u$  com  $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$ . Existe  $\lim(u)$  ?
13. Considere a sucessã de funções  $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ .

- (a) convergência de funções: Faça alguns gráficos dos elementos dessa sucessã.
- (b) convergência pontual: Verifique que  $\forall n f_n(0) = 0$ .
- (c) convergência pontual: Calcule o limite no intervalo  $[a, b]$ ;  $a, b > 0$  e discuta a seguinte conclusã: a sucessã de funções converge para a função constante 1.
- (d) convergência pontual: Como resolver o problema da convergência no ponto  $x=0$ . Esta era a dor de cabeça de Du Bois-Reymond com respeito à convergência das séries de Fourier...
- (e) convergência em integral: Calcule  $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  e verifique a convergência desta sucessã. Compare com o número  $A = \int_0^1 1 dx$ . Será que poderíamos dizer que  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  para alguma função  $f$ ?

14. (a) Estude a convergência, em integral, se for possível, de

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^3 x^2 + 1} \quad x \in (0, 1]$$

- (b) Estude a convergência ponto a ponto da sucessã de funções acima.

15. (a) Estude a convergência, em integral, se for possível, de

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^3 x^2 + 1} \quad x \in (a, 1]$$

em que  $0 < a < 1$ .

(b) Estude a convergência ponto a ponto da sucessã de funções acima.

16. Determine uma fórmula para os termos da série de potências

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

de modo que  $xf'' + f' - f = 0$  com  $f(0) = 1$  e verifique assim que  $f$  resolve a equação diferencial, (solução particular).

17. Estude a ordem de grandeza de  $x$  e de  $\ln(x)$  na origem, e determine o valor da integral  $\int_0^1 \ln(x) dx$

18. Mostre geometricamente que  $\int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$  existe.

19. Calcule o limite  $\lim_n f_n(0)$  com  $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{x}$  e mostre que  $\int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(nx)}{x} dx$  existe. Calcule um valor aproximado para esta integral, possivelmente usando uma integração por partes primeiro.

20. O núcleo de Dirichlet: Considere a sucessã de funções  $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{x}$ .

(a) Faça alguns gráficos dos elementos dessa sucessã.

(b) Verifique que  $f_n(0)$  diverge mas que  $\int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(nx)}{x} dx$  converge. Estude a possibilidade de uma função  $f$  tal que

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{x} \rightarrow f.$$

(c) Calcule  $A_n = \int_0^1 f_n(x)\phi(x)dx$  para alguns exemplos de funções, ( $\phi$  polinomial ... !), e tente deduzir o que aconteceria em geral com  $A_n$ .



# Capítulo 4

## Aplicações

Cada um dos assuntos tratados nesta seção poderia sozinho preencher um livro, de forma que você deve considerá-la como um breve passeio sobre o que existe para ser estudado. É uma tentativa de aguçar sua curiosidade e motivá-lo para seguir se aprofundando conosco nas técnicas auxiliares que vamos estudar nos capítulos seguintes. Algumas vezes voltaremos a fazer referência ao material aqui apresentado como demonstração de de que as peças do plano tem todas ligação entre elas. O tamanho da letra, como sempre, indica a importância relativa do assunto, você pode saltar esta seção e deixar para lê-la posteriormente.

### 4.1 As séries de Fourier.

*De acordo com os resultados que você conseguiu nos exercícios acima, podemos repetir a afirmação de Joseph Fourier feita no artigo apresentado à Academia Francesa de Ciências, em 1807: “ uma função qualquer periódica  $f$  pode ser escrita como combinação linear das funções  $\text{sen}K$  ,  $\text{cos}K$ ”:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx). \quad (4.1)$$

*Embora isto seja uma verdade, num sentido que Fourier mal podia imaginar em sua época, em 1873, Paul Du Bois-Reymond construiu um exemplo de função contínua cuja série de Fourier divergia em um determinado ponto. Se as séries de Fourier já tinham sido mal recebidas em 1807 pelos acadêmicos franceses, a descoberta de Du Bois-Reymond tornou a questão mais aquecida porque não havia dúvidas sobre a sua real importância, o problema era entender o que significava “convergência” destas séries. Se pode dizer que os matemáticos só conseguiram entender claramente este tipo de convergência no início do presente século, cerca de 200 anos depois que os primeiros matemáticos iniciaram a calcular com séries trigonométricas, (Euler e alguns dos Bernoulli bem antes de Fourier).*

*Vamos discutir com maiores detalhes qual o significado da convergência representada por estas séries no próximo capítulo, entretanto vejamos logo qual é ideia intuitiva e geométrica que se encontra por traz desta convergência.*

Para que você tenha uma ideia dos gráficos que você pode ver, inclusive alterando para obter outros relativos a funções que você mesmo escolha, veja os gráficos (fig. 3.5), (fig. 3.6), que se encontram às páginas 86,87. Neles você tem os gráficos conjuntos da função identidade  $f(x) = x$  e do polinômio trigonométrico  $P_n(f)$  para  $n \in \{5, 10\}$ . Os polinômios trigonométricos descrevem fenômenos oscilatórios como veremos em seguida, então  $P_n(f)$  “oscila” em torno de  $f$ . É isto que destroi a “convergência” num sentido comum e mais intuitivo e que foi contestado no exemplo de Du Bois-Reymond, entretanto do ponto de vista da energia contida em  $f$ , ou mais exatamente no fenômeno modelado por  $f$ , a aproximação é excelente. A energia está representada pela integral de  $f$  e agora sim: a integral de  $P_n(f)$  se aproxima muito da integral de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_0^{2\pi} P_n(f)(t)dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(x)dx \quad (4.2)$$

Polinômios trigonométricos são aproximação de funções periódicas ou então de uma função, mas apenas sobre um intervalo em que ela é considerada como restrição de um função periódica, mas do ponto de vista da da quantidade de fenômeno, ou ainda, a integral de  $f$  é bem aproximada pela integral de  $P_n(f)$ .

É preciso abrir uma ressalva: não estamos apresentando polinômios trigonométricos como um método para calcular integrais aproximadamente.

Vamos agora descrever algumas situações em que se aproximam funções com o método de Fourier ou que estas séries encontram aplicação.

## 4.2 Fenômenos vibratórios, a música.

A motivação que os nossos antepassados do século 18, Joseph Fourier (1768-1830), Leonard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782) entre muitos outros, para chegar aos polinômios trigonométricos ou às séries trigonométricas, foi o comportamento periódico destas funções que serviriam para reproduzir parcialmente alguns fenômenos vibratórios, *cordas vibrantes, possivelmente devido a enorme influência musical da época em que viveram*, ou de elasticidade, que eles logo descobriram que continham aspectos de periodicidade. Os aspectos de periodicidade, eles logo viram, seriam as componentes harmônicas, e portanto a presença dos vetores  $\text{sen}K, \text{cos}K$  ;  $K \in \{0, 1, \dots\}$  nestes fenômenos. Você pode consultar esta história em livros sobre *equações diferenciais ordinárias*, por exemplo [22], de onde tiramos muitas das informações biográficas aqui contidas.

Vem desta aplicação a denominação de **frequência** para o número inteiro  $\mathbf{k}$  que multiplica o parâmetro angular em  $a_{\mathbf{k}}\text{cos}(\mathbf{k}x)$  e  $b_{\mathbf{k}}\text{sen}(\mathbf{k}x)$ . Também pela mesma razão se estabeleceu o nome de **amplitude** para os coeficientes  $a_{\mathbf{k}}$  e  $b_{\mathbf{k}}$ . Quando se vai analisar sinais, por exemplo, estes números inteiros são estudados na ordem do milhar, pelo menos, representando kHz ou mHz, ver [3, cap 1] sobre o assunto.

### 4.3 As comunicações.

Depois vieram os fenômenos eletromagnéticos, novamente cheios de componentes periódicas e em seguida as comunicações que sem dúvida substituíram a música do século 18 como motivação social *concreta* nos estudos de muitos cientistas. Nas comunicações os polinômios trigonométricos tiveram o seu principal reino. Um sinal eletromagnético podia ser modificado por um *som* e depois recapturado e ao ser reproduzido se podia recuperar o *som* que o modificara, nascia um método para transmitir dados:

Um sinal eletromagnético é uma *portadora* que se deforma, por exemplo, com o som da voz. Esta *portadora* deformada é capturada e analisada por um decodificador programado com o mesmo método utilizado na deformação inicial, fazendo então a operação inversa, reproduz *aproximadamente* o som de voz transmitido. O método de codificação-decodificação era substancialmente o das séries de Fourier.

Se decompunham sinais eletromagnéticos modificados por sons e se transmitiam as suas componentes que depois seriam usadas no formato

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos K(x) + b_k \sin K(x)$$

em que  $n$  é *capacidade* de precisão do sistema, para recompor uma *aproximação* do *som* inicial.

**Observação 23** *Compactação de dados.*

Segundo Gilbert Strang, em um artigo publicado no *Bulletin of American Mathematical Society*, este é um primeiro exemplo de compactação de dados, uma função, que afinal é isto que é um som, é um objeto que tem uma quantidade infinita não enumerável de componentes, informações, que podem ser compactadas aproximadamente, com perda de parte das informações em um número finito de dados, num polinômio trigonométrico, ou ser compactada exatamente numa quantidade enumerável de dados, numa série trigonométrica.

Um dos problemas, e sempre foram os problemas que produziram o avanço tecnológico, junto com os sons vinham *ruidos*, que é o nome dado aos *sons indesejáveis* que chegam junto com sinal que se recupera e que se devem a muitos fatores. A filtragem dos ruidos criou esta imensa ciência em volta das transformações trigonométricas, envolvendo pesquisa em física, matemática, química, ciências dos materiais e mais recentemente a informática que veio modificar este conjunto científico permitindo que a velocidade no processamento dos dados permitissem novas experiências.

Podemos considerar a transmissão de informações como a principal aplicação das transformações trigonométricas, *polinômios trigonométricos*, claro, ela se encontra por traz da medicina, *tomografia*, da comunicações, das ciências espaciais, enfim onde se precise transmitir e analisar dados. Ver a respeito [11, cap 1].

## 4.4 Compactação de dados.

As aplicações que mencionamos acima são muito específicas para serem tratadas neste livro assim como esta de que agora falaremos para complementar a menção feita anteriormente. Todos são assuntos que tem vida própria e discutí-los necessita de livros em separado.

Falamos de compactação de dados ao falarmos de transmissão de informações, citando uma observação de *Strang*. Este é um problema muito atual quando a quantidade de informações existentes crescem em volumes absurdos e devem ser estocadas ocupando espaço. Pior do que simplesmente estocar a informação é retransmití-la porque toma tempo proporcional ao tamanho da informação no ato de transmissão.

Então, seja para estocar ou para transmitir, é vital um método de compactação. As séries de Fourier representam uma forma *violenta* de compactação de dados de modo exato. Na prática podem ser usadas quando se puder descobrir uma lei de formação *algébrica* para os coeficientes, e neste caso, em geral extremamente casual, se tem uma nova compactação violenta de dados... veja o exercício abaixo.

### Exercício 8 Polinômios trigonométricos.

1. Calcule os coeficientes de Fourier da função  $f(x) = x$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , quer dizer que ele se estende por periodicidade para  $\mathbf{R}$  a partir da definição neste intervalo. O produto escalar 1.8 é feito com uma integral sobre este intervalo.
2. Calcule exatamente os coeficientes de Fourier de  $f(x) = x$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .
3. Calcule exatamente os coeficientes de Fourier de  $f(x) = x$  definida no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Rode o programa Fourier e se convença de que tem que ser diferentes dos coeficientes de Fourier de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

A verdade é outra, aproximar  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  significa aproximar uma função dente de serra que assume valores negativos e positivos simétricos em torno de um ponto. Aproximar  $f(x) = x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  significa aproximar uma outra função dente de serra que é sempre positiva. Esta segunda função nem é par, nem é ímpar, e consequentemente tem componentes tanto na direção dos vetores  $\text{sen}K$  como na direção do vetor  $\text{cos}$ .

O conteúdo do exercício anterior tem que ser entendido nas suas reais limitações, nem toda função tem coeficientes de Fourier passíveis de serem escritos como  $\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ , como é o caso de  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , que se compõe de 12 caracteres, (ou um pouco mais ou um pouco menos de 12 caracteres, dependendo da sintaxe da comunicação a ser usada). A série de Fourier de  $f$  é uma série de *senos*, os coeficientes da forma acima são os coeficientes de  $\text{sen}K$  na série de Fourier de  $f(x) = x$  sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Mas serve

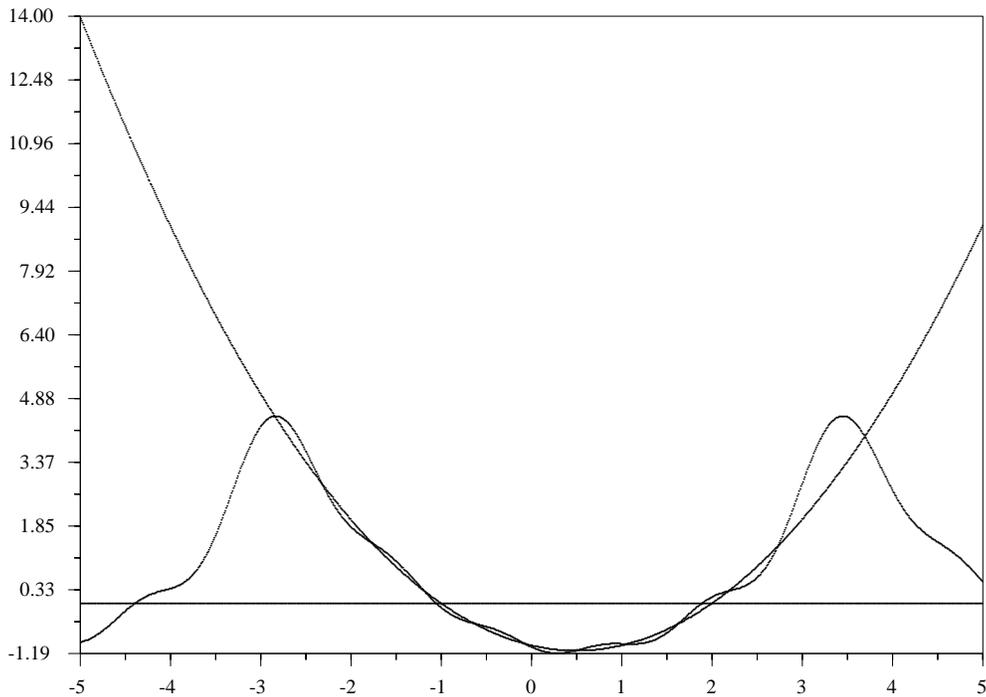


Figura 4.1: gráfico da parábola  $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$  aproximada por um polinômio trigonométrico, no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

como exemplo da existência da possibilidade de compactação de uma quantidade infinita de informações com um número finito de dados. Abaixo você tem os dois gráficos, da função  $f(x) = x$  e do polinômio trigonométrico com 18 termos,  $n \in \{0, \dots, 17\}$ , obtido com os coeficientes de Fourier de  $f$ . Compare com o outro obtido páginas atrás com 10 coeficientes. Você poderá fazer diversos gráficos como estes usando alguma modificação de *FourierX*.

## 4.5 Equações diferenciais.

Se você nunca estudou *equações diferenciais*, leia agora a introdução de um algum livro a respeito, ou leia o conteúdo desta seção usando o máximo de sua intuição. Alternativamente, deixe a leitura deste parágrafo para quando estiver estudando o assunto. O texto tenta lhe oferecer a idéia sobre equações

diferenciais na sua forma mais intuitiva.

Uma forma compacta de descrever um fenômeno que contenha algum tipo de movimento ou dinâmica, consiste em sintetizar as relações que existam entre suas distintas taxas de variação: de ordem zero, de ordem 1, de ordem 2 etc...

**Exemplo 27** *Um pêndulo.*

*O movimento dum pêndulo se descreve aproximadamente por uma equação do tipo*

$$I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + c\theta = f(\theta) \quad (4.3)$$

*em que  $I$  é o momento de inercia do pêndulo,  $k$  é uma constante de amortecimento,  $c$  é uma constante vinda da gravidade terrestre e  $f$  é a função que descreve a energia fornecida ao pêndulo. Por exemplo, se  $f$  representar uma forma de anular o efeito da gravidade e do atrito, a equação do pêndulo, a equação ficaria:*

$$I\ddot{\theta} = 0 \quad (4.4)$$

Vamos considerar uma equação com o formato da equação do pêndulo e encontrar-lhe a solução como exemplo de uso da teoria das séries de Fourier.

**Exemplo 28** *Solução aproximada de uma equação diferencial.*

*Consideremos a equação diferencial de segunda ordem:*

$$Af'' + Bf' + Cf = g \quad (4.5)$$

*Se supusermos, de acordo com Fourier, que todas as funções se podem escrever como combinação linear, possivelmente infinita, de  $\text{sen}k$  e  $\text{cos}k$  com  $k \in \mathbf{N}$  então podemos considerar uma solução aproximada representada pelo polinômio trigonométrico:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \text{cos}(kx) + b_k \text{sen}(kx). \quad (4.6)$$

*e o conteúdo da equação diferencial implica em que calculemos as derivadas de primeira e segunda ordem de  $f$  multiplicando-as pelas constantes  $B$  e  $A$ , respectivamente, enquanto que devemos multiplicar  $f$  por  $C$ :*

$$C \cdot f(x) = C \left[ \sum_{k=1}^n a_k \text{cos}(kx) + b_k \text{sen}(kx) \right] \quad (4.7)$$

$$B \cdot f'(x) = B \left[ \sum_{k=0}^n +kb_k \text{cos}(kx) - ka_k \text{sen}(kx) \right] \quad (4.8)$$

$$A \cdot f''(x) = A \left[ \sum_{k=0}^n -k^2 a_k \text{cos}(kx) - k^2 b_k \text{sen}(kx) \right] \quad (4.9)$$

e somando todas estas equações temos:

$$A \cdot f''(x) + B \cdot f'(x) + C \cdot f(x) = \quad (4.10)$$

$$= \sum_{k=0}^n [(C - Ak^2)a_k + Bkb_k] \cos(kx) + [(C - Ak^2)b_k - Bka_k] \sin(kx) \quad (4.11)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) = g(x) \quad (4.12)$$

A segunda equação do bloco anterior é um polinômio trigonométrico cujos coeficientes envolvem as constantes  $A, B, C$  e os coeficientes “desconhecidos” de  $f$ . Como a função  $g$  é dada, podemos calcular-lhe os coeficientes de Fourier com a fórmula 1.8 e estabelecer uma igualdade termo a termo da qual podemos tirar os sucessivos valores de  $a_k$  e de  $b_k$  e assim recompor  $f$ . A última “igualdade” tem que ser “aproximada” uma vez que  $g$  é um valor exato enquanto que na linha anterior se encontra uma aproximação da solução. Entretanto, para manter a compatibilidade com a soma de  $n$  termos da linha do meio, teremos que considerar apenas:

$$g(x) \approx \frac{\alpha_0}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx).$$

Igualando termo a termo termo, chamando de  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  os coeficientes de  $\cos k$  e  $\sin k$  no polinômio trigonométrico de  $g$ , temos:

$$(C - Ak^2)a_k + Bkb_k = \alpha_k \quad (4.13)$$

$$-Bka_k + (C - Ak^2)b_k = \beta_k \quad (4.14)$$

Pela regra de Cramer os valores dos coeficientes de Fourier de  $f$  são:

$$\Delta = (C - Ak^2)^2 + B^2k^2 \quad (4.15)$$

$$a_k = \frac{\alpha_k(C - Ak^2) - \beta_k Bk}{\Delta} \quad (4.16)$$

$$b_k = \frac{\beta_k(C - Ak^2) + \alpha_k Bk}{\Delta} \quad (4.17)$$

Rodando o programa em MapleV que se encontra listado abaixo você poderá produzir a solução gráfica desta equação com 10 coeficientes, ou alterar os parâmetro para conseguir uma solução mais aproximada. O programa, talvez melhor, o script produz os gráficos de  $g$ , de  $P_{10}(g)$ , da solução aproximada  $H$  e de  $A \cdot H'' + B \cdot H' + C \cdot H$ , feitas simultaneamente para evidenciar a precisão: o erro não é visível no gráfico, mas existe, obviamente.

O código fonte em Maple que resolve aproximadamente esta equação diferencial é:

Não lhe apresentamos o gráfico feito em MapleV porque não possuímos uma licença para rodar este programa. MapleV é um pacote comercial.

Nos capítulos 2 e 3 vamos discutir a solução das equações diferenciais, mas o exemplo acima mostra que os polinômios trigonométricos junto com métodos computacionais são um instrumento eficaz para obter soluções aproximadas de equações diferenciais lineares ordinárias a coeficientes constantes.

**Exercício 9** Solução aproximada de equações diferenciais.

1. Complete um dos programas FourierX para resolver uma equação diferencial de segunda ordem calculando os coeficientes de Fourier da solução.
2. Inclua no programa o gráfico da solução.
3. Inclua no programa o gráfico de  $P(D)h$  em que  $h$  é solução encontrada.
4. Resolva outras equações diferenciais lineares usando o método.

## 4.6 Tabelas diversas

Abaixo você encontra uma pequena tabela de transformadas discretas de Fourier.

funções  $2\pi$ -periódicas definidas em  $[-\pi, \pi]$   
 Funções definidas por um par de equações, cada equação vale num dos sub-intervalos:  $[-\pi, 0]$ ,  $[0, \pi]$   
 nesta ordem.

função	$\frac{a_0}{2}$	$a_n$	$b_n$
$x$	0	0	$-2 \frac{\cos(n\pi)}{n}$
$x^2$	$\frac{2\pi^2}{3}$	$4 \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$	0
$x^3$	0	0	$\frac{\cos(n\pi)}{n} (\frac{12}{n^2} - 2\pi^2)$
$x^2, x$	$\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\pi n^2} (2\pi \cos(n\pi) + \cos(n\pi) - 1)$	$\frac{1}{\pi n^3} (2 + \pi^2 n^2 \cos(n\pi) - 2\cos(n\pi) - \pi n^2 \cos(n\pi))$
$x^2, -x^2$	0	0	$\frac{2}{\pi n^3} (2 + n^2 \pi^2 \cos(n\pi) - 2\cos(n\pi))$
$x^3, -x^3$	$-\frac{2\pi^3}{4}$	$-\frac{6}{\pi n^4} (2 + n^2 \pi^2 \cos(n\pi) - 2\cos(n\pi))$	0
$\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$	$\frac{1}{\pi}$	$2 \frac{\operatorname{sen}(n/2)}{n\pi}$	0

Solução de  $Ay'' + By' + Cy = f$  usando Polinômios de Fourier.

O código abaixo está escrito na linguagem do Maple V.

Tarcisio Praciano Pereira

Dep. de Matematica - URG - 1995

`N := 10; Digits := 10; A:=3; B:=2; C:=4;`

`aMat := array(0..N); bMat := array(0..N); DeltaMat := array(0..N);`

`alpha := array(0..N); beta := array(0..N);`

`f := proc(x) x^2 + 3*x ; end;`

`a:= evalf(Pi);`

`for k from 0 to N do; alpha[k]:= evalf(int(f(x)*cos(k*x),x=-a..a));`

`beta[k]:= evalf(int(f(x)*sin(k*x),x=-a..a));`

`DeltaMat[k]:= (C-A*k^2)^2 + B^2*k^2;`

`aMat[k]:= (alpha[k]*(C-A*k^2)-beta[k]*B*k)/DeltaMat[k];`

```

bMat[k]:= (beta[k]*(C-A*k^2) + alpha[k]*B*k)/DeltaMat[k];od:
aMat[0]:= (evalf(int(f(x),x=-a..a)))/3; bMat[0]:=0;

F := proc(x) sum(alpha[j]*cos(j*x)+ beta[j]*sin(j*x),j=0..N);end;

plot(F(x),x=-a..a);

H := proc(x) sum(aMat[j]*cos(j*x)+ bMat[j]*sin(j*x),j=0..N);end;

h:= A*D(D(H)) + B*D(H) + C*H;

plot({f,h},-a..a);

```

A função  $h$  é o resultado da aplicação do operador diferencial  $P(D)$  em  $H$  a solução aproximada encontrada resolvendo os sistemas de equações com os coeficientes de Fourier:

$$P(D) = AD^2 + BD + C ; \quad (4.18)$$

$$h = P(D)(H) = AH'' + BH' + CH ; \quad (4.19)$$

$$H(x) = \sum_{k=0}^N a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) ; \quad (4.20)$$

Este programa faz os gráficos simultâneos de  $f$  e de  $h$ , esta última é  $P(D)(H) \approx f$ .



## Parte II

# A integral no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$



# Capítulo 5

## Introdução

Neste capítulo vamos reunir exercícios sobre Geometria Analítica Vetorial, derivadas e integração que possam servir de uma rápida revisão para o restante do livro.

Vamos estudar parametrização de curvas com objetivo de estabelecer relações com um tipo especial de curvas, aquelas em que

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} = 1$$

em que  $\Delta P$  é a distância entre dois pontos sobre a curva e  $\Delta s$  é a distância, sobre a curva, entre estes dois pontos.

Estas curvas têm propriedades que desejamos enfatizar e elas serão a classe de curvas que consideraremos, preferencialmente, neste livro.

### 5.1 Equações paramétricas de uma curva

Vamos começar construindo alguns exemplos de curvas e suas parametrizações.

#### 5.1.1 Curvas e suas equações

1. O círculo trigonométrico é o exemplo mais simples de curva parametrizada, é assunto típico da Ensino Médio.

O *círculo trigonométrico* é aquele em que cada ponto tem por coordenado o *seno* e *coseno* do ângulo central associado a um ponto sobre o círculo.

Se designarmos por  $\alpha$  o ângulo central que cada ponto sobre o círculo determina com o segmento de reta que o une ao centro, as coordenadas deste ponto serão

$$\cos(\alpha), \sin(\alpha) \tag{5.1}$$

Reciprocamente, este conjunto de equações, quando  $\alpha \in [0, 2\pi]$  descreve o círculo

$$[0, 2\pi] \ni \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.2)$$

e temos assim definida uma função

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (5.3)$$

$$[0, 2\pi] \ni \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.4)$$

e dizemos que que  $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$  são as equações paramétricas do círculo.

2. **Cicloides** são curvas obtidas quando se fixa um ponto sobre o raio de um círculo enquanto ele gira sobre uma reta.

- (a) Se o ponto escolhido for o centro do círculo o resultado é uma reta paralela a outra reta sobre a qual o círculo se desloca.
- (b) O outro extremo é se o ponto escolhido for o outro extremo do raio. O resultado é uma curva que se encontra com a reta sobre a qual o círculo se desloca a cada intervalo de  $2\pi R$  em que  $R$  é a medida do raio do círculo. Para simplificar a notação vamos considerar  $R = 1$ , e basta multiplicar por  $R$  as equações que vamos obter. Esta curva tem um ponto crítico, sem derivada, nos múltiplos inteiros de  $2\pi$ .

Entre as duas situações extremas apresentadas acima, existe uma família de curvas muito regulares.

voir Hocquenghem et Jaffard page 295 vol I

Veja na figura (fig. 5.1) página 132, uma cicloide desenhada a mão. Para

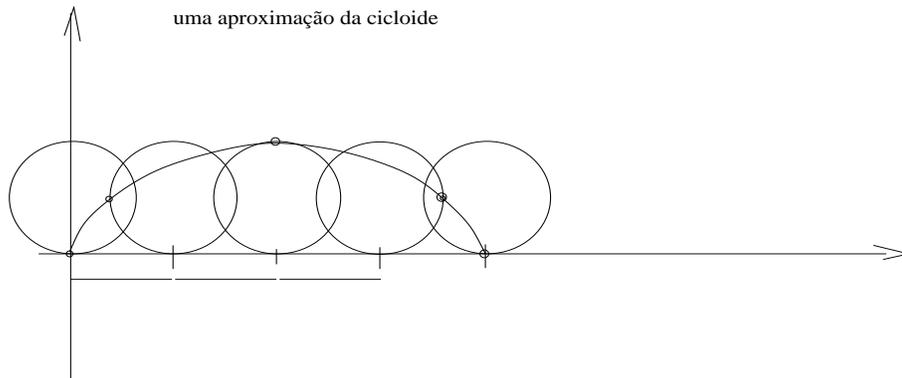


Figura 5.1: Cicloide desenhada à mão

isto copieie o círculo de raio 1 com centro sobre  $OY$  e tangente em  $(0, 0)$

para três outras posições:  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  e marquei em cada um deles a posição do ponto escolhido. Depois juntei os pontos com uma curva diferenciável construída com auxílio de um *spline* do `xfig`<sup>1</sup>. O resultado é uma aproximação da cicloide, feita à mão, com auxílio do `xfig`.

### 5.1.2 Notação

Começaremos discutindo alguns itens bastante gerais antes de nos lançarmos na geometria das curvas, que é o nosso objetivo principal, vamos estabelecer a notação que usaremos assim como as primeiras definições e exemplos.

Uma curva no  $\mathbb{R}^n$  é uma função contínua e continuamente diferenciável,  $\alpha$  definida em um intervalo fechado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Vamos acrescentar mais uma hipótese da qual faremos uso em breve:  $|\alpha'(t)| \neq 0$ . Esta última hipótese será logo substituída por outra mais forte.

Poderíamos considerar objetos mais gerais, mas entrariamos em questões que não interessam neste texto<sup>2</sup>. O nosso objetivo aqui é ainda o de restringir ainda mais o tipo de objeto que chamamos curvas, porque elas serão usadas, com frequência, neste texto, para transformações auxiliares na derivação e na integração, e neste caso elas devem intervir sem deixar rastros. Esta restrição se justifica uma vez que estamos selecionando uma família de curvas que usaremos como instrumento, portanto, estamos selecionando o tipo de instrumento que nos serve. Ainda que pareça estranho, esta particularização de aplica uma classe muito grande de curvas, praticamente a todas as curvas que você conseguiria traçar com um programa de computador, por exemplo.

Então uma função de classe  $\mathcal{C}^1$

$$[a, b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \quad (5.5)$$

é uma curva, e a menos que digamos expressamente o contrário, toda curva será uma função deste tipo.

Com frequência desejamos fazer referência à imagem  $\alpha([a, b])$  do domínio por esta curva e é comum cometermos o erro de novamente chamarmos esta imagem de *curva*. Em geral o leitor conseguirá facilmente separar qual dos dois sentidos estaremos dando a palavra *curva*<sup>3</sup> de formas que seguiremos, sem pejo, cometendo este erro, com o objetivo de usar uma linguagem mais simples fazendo a observação pertinente, por exemplo, acrescentando o predicado “*cuja imagem*” se houver risco na interpretação.

### Comprimento de arco de uma curva

Relembrando o comprimento de arco de uma curva  $\alpha$ , considere a curva

$$[a, b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \quad (5.6)$$

---

<sup>1</sup>`xfig` é um programa para desenhos distribuído com `Linux`

<sup>2</sup>ver Intr. do *Top and modern analysis*, de G.F.Simmons, um apêndice sobre curvas que preenchem os pontos de um retângulo sendo contínuas mas não diferenciáveis, procure por *filling curves*

<sup>3</sup>alguns autores preferem usar a notação  $\alpha^*$  para designar a imagem do intervalo  $[a, b]$

e uma partição  $\{t_0 = a, \dots, t_k = a + k\Delta t, \dots, t_n = b\}$  do intervalo  $[a, b]$ , gera sobre a imagem da curva  $\alpha$  uma seqüência de pontos veja a figura (fig. 5.2) página 134,

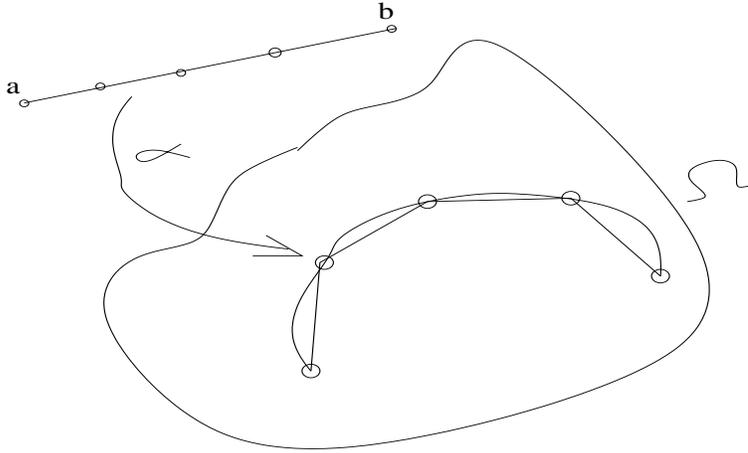


Figura 5.2: Arco de curva

$$t_0 = a, \dots, t_k = a + k\Delta t, \dots, t_n = b \quad (5.7)$$

$$P_0 = \alpha(a), \dots, P_k = \alpha(t_k), \dots, P_n = \alpha(b) \quad (5.8)$$

$$T_k = d(P_k, P_{k+1}) = |P_{k+1} - P_k| \quad (5.9)$$

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} T_k \quad (5.10)$$

sendo a equação (eq. 10) o resultado da soma dos comprimentos dos lados da poligonal com vértices  $(P_k)_{k=0}^{n-1}$ . Multiplicando e dividindo na equação (eq. 10) por  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  temos

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{|P_{k+1} - P_k|}{|\Delta t_k|} \right| \Delta t_k = \quad (5.11)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k)}{\Delta t_k} \right| \Delta t_k \quad (5.12)$$

Como  $\alpha'$  é integrável (é contínua) podemos identificar na equação (eq. 12) uma soma de Riemann que produz sucessões de Cauchy equivalentes a integral

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt \quad (5.13)$$

é que por outro lado, associada a cada cadeia de partições em que norma tenda a zero, poligonais que se aproximam arbitrariamente da imagem da curva  $\alpha$  portanto esta integral é o comprimento da curva  $\alpha$

Há várias formas de construir curvas, por exemplo se

$$\mathbb{R}^{n+1} \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbb{R} \tag{5.14}$$

for uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ , em que  $\Omega$  seja um aberto do  $\mathbb{R}^n$  então

$$F(x_1, \dots, x_n) = c \in \mathbb{R} ; c \text{ dado} \tag{5.15}$$

é uma variedade de dimensão  $n-1$  e se considerarmos uma curva  $\alpha$  cuja imagem esteja contida em  $\Omega$  então  $F \circ \alpha$  é uma curva cuja imagem estará contida na variedade  $F(x_1, \dots, x_n) = c$

O nosso objetivo será o de estudar curvas deste tipo, cujas imagens estejam dentro de uma determinada variedade de dimensão  $m$ , e que podem não ser tão simples como  $F(x_1, \dots, x_n) = c$  nos obrigando a determinação de um mapeamento adequado da mesma.

As curvas que vamos estudar aqui estarão definidas por equações paramétricas. Quer dizer que

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \tag{5.16}$$

em que  $\alpha_i$  são funções reais de classe  $\mathcal{C}^1$  definidas em  $[a, b]$  para todo  $i$ , com

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t)) \tag{5.17}$$

Uma das operações que mais frequentemente precisaremos fazer é a reparametrização de uma curva:

$$[c, d] \xrightarrow{\beta} [a, b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \tag{5.18}$$

$$[c, d] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \tag{5.19}$$

$$\gamma = \alpha \circ \beta \tag{5.20}$$

redefinindo esta curva em outro intervalo  $[c, d]$  sendo  $\gamma$  a nova parametrização, quando desejarmos entender a função  $\beta$ , que obviamente é uma curva, como uma *mudança de variável*<sup>4</sup> nos interessa medir a distorção de medida introduzida por  $\beta$  que é caracterizada por  $\beta'$

$$\gamma' = \alpha' \circ \beta' \tag{5.21}$$

As integrais são insensíveis a estas distorções porque

$$\int_{[a,b]} \alpha(s) ds = \int_{[c,d]} \alpha(\beta(t)) \beta'(t) dt \tag{5.22}$$

---

<sup>4</sup>esta denominação é, possivelmente, a pior possível porque em “curvas” assim como nas integrais, não existem variáveis, mas as limitações linguísticas terminam nos conduzindo a usar esta linguagem o que continuaremos a fazer sem retornar a este problema epistemológico

entretanto a derivada é sensível ficando o seu tamanho distorcido pelo tamanho de  $\beta'$ , o que é compreensível porque as *mudanças* de parametrização traduzem, uma alteração na *velocidade* com que a *imagem da curva* é percorrida, sem alterar o comprimento da curva (imagem) calculado por uma integral.

Observe que as curvas definidas em variedades como  $F(x_1, \dots, x_n) = c$  podem ser vistas também como parametrizações de uma parte da variedade, mudanças de variável com restrição do domínio. Vamos tomar esta observação como uma motivação para a restrição que faremos agora para nossa definição de curva: *curvas serão aquelas cuja derivada tenha módulo 1*. Como uma reparametrização é também uma curva, somente consideraremos aqui *reparametrizações* cuja derivada tenha módulo 1 o que na prática significa que podemos alterar o intervalo de parametrização, mas não a medida do mesmo. Desta forma eliminamos distorções que apenas tornam a teoria mais complicada, e quando for absolutamente necessário introduzir uma distorção, o faremos explicitamente, justificando a sua necessidade.

Vamos ver, num cálculo simples, a vantagem que esta longa introdução nos dá. Considere uma curva  $\alpha$  cuja imagem se encontre numa variedade de dimensão  $n - 1$   $F(x_1, \dots, x_n) = c$ , veja a figura (fig. 5.3) página 137,

Considere  $\{t_0 = a, \dots, t_k = a + k\Delta t, \dots, t_n = b\}$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  em que esteja definida a curva  $\alpha$ , e acompanhe os cálculos seguintes:

$$t_0 = a, \dots, t_k = a + k\Delta t, \dots, t_n = b \quad (5.23)$$

$$P_0 = F(\alpha(a)), \dots, P_k = F(\alpha(t_k)), \dots, P_n = F(\alpha(b)) \quad (5.24)$$

$$T_k = d(P_k, P_{k+1}) = |P_{k+1} - P_k| \quad (5.25)$$

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} T_k \quad (5.26)$$

A equação (eq. 26) é a soma dos comprimentos da poligonal que aproxima a imagem da curva  $\alpha$  univocamente associada à partição escolhida. O leitor pode facilmente substituir  $t_k$  pelos nós de uma partição arbitrária considerada em  $[a, b]$ , mas como as funções aqui consideradas são integráveis<sup>5</sup> se as partições são ou não uniformes. Refazendo as contas acima, usando o Teorema da função implícita podemos escrever, se todas as derivadas parciais de  $F$  forem diferentes de zero sobre a imagem de  $\alpha$  e fixada uma partição,

$$F(x_1, \dots, x_n) = c \implies x_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (5.27)$$

$$x_j = g_j((x_k)_{k \neq j}) \quad (5.28)$$

$$\alpha(t_j) = \alpha(g_j((t_k)_{k \neq j})) \quad (5.29)$$

$$P_0 = F(\alpha(a)), \dots, P_k = F(\alpha(t_k)), \dots, P_n = F(\alpha(b)) \quad (5.30)$$

$$T_k = d(P_k, P_{k+1}) = |P_{k+1} - P_k| \quad (5.31)$$

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} T_k = \quad (5.32)$$

---

<sup>5</sup>as somas de Riemann vão gerar sucessões de Cauchy todas equivalentes definindo um número, uma integral.

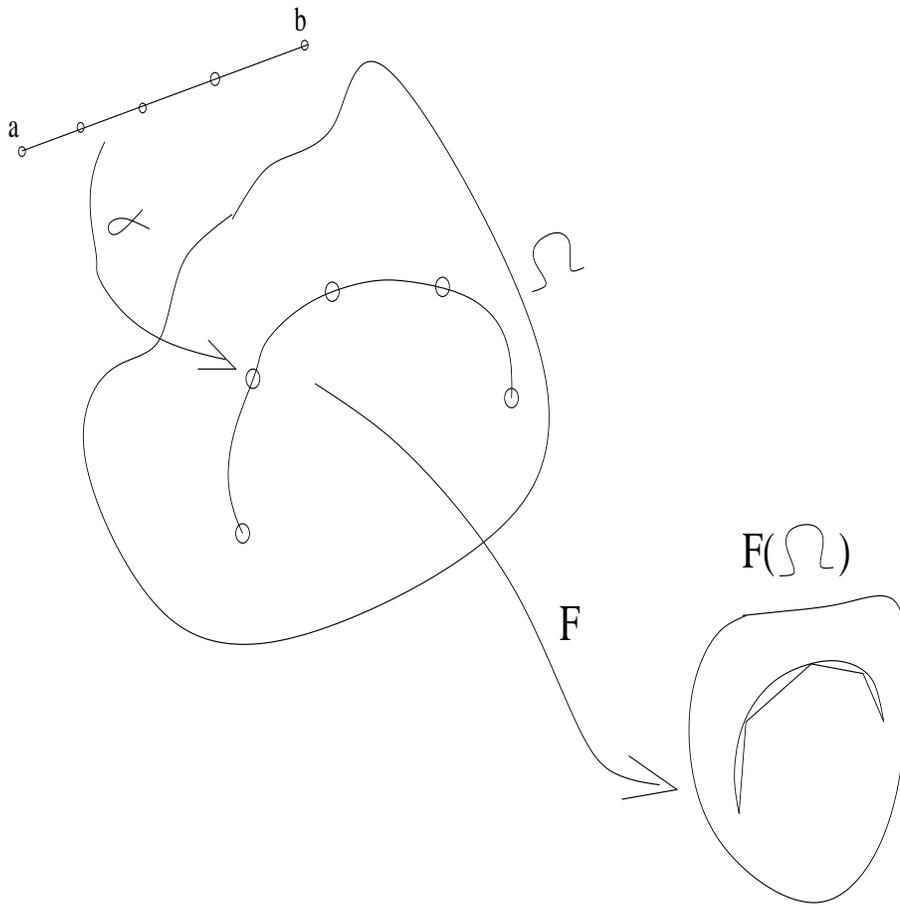


Figura 5.3: Curva parametrizada

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |F(\alpha(t_{k+1})) - F(\alpha(t_k))| = \quad (5.33)$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k ; \Delta_k(\alpha) = \alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k) \quad (5.34)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{F(\alpha(t_{k+1})) - F(\alpha(t_k))}{\Delta_k(\alpha)} \right| |\Delta_k(\alpha)| = \quad (5.35)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|F(\alpha(t_{k+1})) - F(\alpha(t_k))|}{|\Delta_k(\alpha)|} \frac{|\Delta_k(\alpha)|}{\Delta t_k} \Delta t_k = \quad (5.36)$$

Como  $F$  e  $\alpha$  são diferenciáveis, e a última soma é uma *Soma de Riemann*, considerando-se qualquer cadeia de partições do intervalo  $[a, b]$  cuja norma tenda a zero os *quocientes de diferenças* tem, respectivamente, como limite, o módulo da derivada direcional de  $F$  na direção da derivada de  $\alpha$  e a derivada do módulo de  $\alpha$  e vamos obter, assim, a integral que nos dá o comprimento de arco da

imagem de  $\alpha$

$$\int_a^b |J(F)(t)_{\alpha'(t)}| |\alpha'(t)| dt \quad (5.37)$$

em que  $J(F)(t)_{\alpha'(t)}$  representa a derivada direcional de  $F$  na direção do vetor  $\alpha'(t)$ .

Vamos terminar esta introdução com uma observação. Suponha que  $\Omega = F(\Omega)$  e que portanto  $F$  seja a função identidade, então a equação (eq. 36) seria idêntica a equação (eq. 12)<sup>6</sup>. Vemos assim que  $F$  atuando como uma mudança de variável (pouco usada) no conjunto de chegada, e sua derivada representando a distorção produzida na imagem, em  $F(\Omega)$ , da curva  $\alpha \subset \Omega$ .

**Exemplo 29** *Parametrização pelo comprimento de arco*

*É interessante mostrar uma parametrização cuja derivada seja 1 em módulo. Considere uma curva qualquer (fugindo de nossa restrição)*

$$[a, b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \quad (5.38)$$

e vamos definir

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} [0, d]; [a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) = \int_a^t |\alpha'(s)| ds \quad (5.39)$$

em que o leitor deve reconhecer o comprimento de arco de  $\alpha$  no intervalo  $[a, t]$  como o valor de  $\gamma$  no ponto  $t \in [a, b]$  e portanto podemos usar o conjunto de chegada ótimo tomando

$$d = \int_a^b |\alpha'(s)| ds \quad (5.40)$$

A derivada de  $\gamma'(t) = |\alpha'(t)| > 0$  mostra que  $\gamma$  é uma função bijetiva, portanto tem inversa. Chamemos a inversa de  $\beta$  e temos

$$[0, d] \ni r; \beta'(r) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}; r = \int_a^t |\alpha'(s)| ds \quad (5.41)$$

consequentemente a reparametrização  $\alpha \circ \beta$  tem por derivada

$$[0, d] \in r; |\alpha'(\beta(r))| |\beta'(r)| = \frac{|\alpha'(t)|}{|\alpha'(t)|} = 1 \quad (5.42)$$

A parametrização  $\alpha \circ \beta$  é chamada parametrização pelo comprimento de arco.

---

<sup>6</sup>porque  $F(\alpha(t_{k+1})) = \alpha(t_{k+1}); F(\alpha(t_k)) = \alpha(t_k)$

## 5.2 Família de curvas

As curvas de nível de uma superfície servem para descrevê-la. Vamos generalizar este método para gerar superfícies como família de curvas. Superfícies são variedades (*não necessariamente lineares*) de dimensão dois.

No parágrafo precedente consideramos um *caso particular* de superfície da forma  $F(x, y, z) = c$  em que

$$\mathbb{R}^3 \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbb{R} \quad (5.43)$$

é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  defina num aberto  $\Omega$ .

Se  $J(F) = 0$  em  $\Omega$  então  $F$  é a função constante e a superfície  $F(x, y, z) = c$  nada mais do que uma translação rígida de  $\Omega$  para o espaço. Vamos supor então que  $J(F) \neq 0$  exceto em alguns pontos isolados de  $\Omega$  para evitar trivialidades.

## 5.3 Dimensão e variedade

Falando de uma forma imprecisa, mas que expressa o fundamental, dizemos que se uma equação tiver apenas uma “variável livre” ela representa uma curva. Se tiver duas “variáveis livres”, representa uma superfície...

Vejamos um exemplo.

### Exemplo 30 Variável livre

Considere a equação  $w = F(x, y, z)$ , uma função de tres variáveis.

Dizemos que  $w$  é uma variável dependente porque seus valores são deduzidos dos valores que dermos a cada uma das variáveis  $x, y, z$ . Consequentemente as variáveis  $x, y, z$  se chamam livres porque a elas podemos associar, arbitrariamente valores. Observe que este conceitos são difusos porque podemos intercambiar a posição das variáveis e, conseqüentemente, considerar outra das variáveis como dependente...

O que interessa aqui é a “quantidade de variáveis livres”, três.

Por exemplo, poderíamos calcular, se o ponto  $(-3, 0, 2)$  estiver no domínio de  $F$ , usando um pacote computacional, scilab, por exemplo, que é software livre,

$$F(x, y, z) = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^5 \quad (5.44)$$

$$w(-3, 0, 2) = F(-3, 0, 2) ; x = -3; y = 0; z = 2 \quad (5.45)$$

$$w = F(-3, 0, 2) = -27 \quad (5.46)$$

Com a mesma forma de pensar, dizemos que as variáveis  $x, y, z$  são livres porque atribuímos valores de nossa escolha para estas variáveis e assim calculamos o valor de  $w$  associado.

Considere agora a equação  $F(x, y, z) = 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita<sup>7</sup> podemos escrever

$$x = f_1(y, z) ; y = f_2(x, z) ; z = f_3(x, y),$$

---

<sup>7</sup>veja no índice remissivo onde se encontra este teorema e o leia agora!

sob certas condições. Isto mostra, usando o mesmo raciocínio anterior, que em  $F(x, y, z) = 0$  existem duas variáveis livres. Portanto

$$F(x, y, z) = 0$$

representa uma superfície, um objeto de dimensão 2, enquanto que

$$w = F(x, y, z)$$

representa um objeto de dimensão 3.

Observe que você pode substituir o zero por qualquer constante. Ao fazermos

$$w = c$$

eliminamos uma variável, o que pode também ser feito com qualquer das outras variáveis na expressão. Veja também que se

$$F(x, y, z) = 0$$

é de dimensão 2, uma superfície, então caberia perguntar o que é

$$w = F(x, y, z)$$

tanto do ponto de vista de dimensão, como do ponto de vista geométrico. Diremos logo que é de dimensão 3 e que lhe daremos o nome de hipersuperfície. É o método subversivo que adotamos, espalhando as idéias sem discutí-las, para que você se acostume com elas.

O que se encontra por trás do número de variáveis é o conceito de “dimensão” e uma outra forma de expressar o conteúdo do parágrafo anterior consiste em dizer-se que *curvas* são *variedades* de dimensão 1, *superfícies* são *variedades* de dimensão dois, e que  $w = F(x, y, z)$  representa uma *variedade* de dimensão três.

A dimensão é o número de variáveis menos um.

Acabamos de introduzir dois novos conceitos, por comparação: *variedade*, *hipersuperfície*.

Curvas, retas, planos, superfícies, são *variedades*. A palavra *variedade* vai nos libertar da prisão dimensional em que a nossa intuição geométrica nos acorrenta e que linguagem que falamos reflete.

Vamos “definir”, informalmente, *variedade*. Que o leitor seja crítico e veja aqui uma falha na axiomática.

**Definição 13** *Variedade* O conceito de variedade nos libera da prisão tridimensional da língua que falamos. Uma variedade é um “objeto geométrico” do espaço. O gráfico de uma função

$$\{(x, y); y = f(x) ; \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

é uma variedade, também designada pelo nome de hipersuperfície do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

As variedades são portanto, as superfícies, os planos, as retas, as curvas, os gráficos de funções, os pontos. Distinguimos dois tipos de variedades: as variedades lineares, retas, planos enfim todas cuja equação seja uma combinação linear de “coeficientes” com “variáveis” que representam as coordenadas dos pontos do espaço e as outras, as variedades não lineares. Mais a frente falaremos de uma outra classificação.

- As variedades lineares são os gráficos de funções lineares que se podem expressar matricialmente como

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto y = Tx.$$

- Os hiperplanos são as variedades lineares de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.
- As hipersuperfícies são as variedades (não necessariamente lineares) de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.

### Exemplo 31 Variedade e dimensão

- Sabemos o que são pontos, apesar de que nunca tenhamos visto nenhum. São as variedades de dimensão zero. São os hiperplanos de  $\mathbb{R}$  e também são as hipersuperfícies deste espaço. Neste nível não distinguimos os tipos de variedade...
- O próximo item na hierarquia dimensional, são as variedades de dimensão 1, as curvas. As retas são variedades lineares de dimensão 1. Uma circunferência não é uma variedade linear, é uma variedade não linear de dimensão 1. As “retas” são os hiperplanos do  $\mathbb{R}^2$ , são também hipersuperfícies deste espaço. As curvas são as hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^2$ .
- Seguindo para uma dimensão maior temos as superfícies, as variedades de dimensão dois. Planos são variedades lineares de dimensão dois. É um tipo de superfície. Tem superfícies que não são planas, não são variedades lineares, são variedades de dimensão dois. Os “planos” são os hiperplanos do  $\mathbb{R}^3$ , as superfícies são as hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^3$ .
- Depois temos as variedades de dimensão 3, o espaço em que vivemos é uma variedade linear de dimensão 3. O globo terrestre, a Lua, os planetas, são variedades não lineares de dimensão 3. Uma variedade linear de dimensão três é um hiperplano do  $\mathbb{R}^3$ .
- Nós vivemos na superfície terrestre, um exemplo de variedade não linear de dimensão dois. O globo terrestre, com o seu interior, é um exemplo de variedade não linear de dimensão três.
- As hipersuperfícies são as variedades de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando. Assim

- as "retas" são as hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^2$ , como os círculos, as parábolas, as elipses. Enfim as curvas são as hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^2$ .
- os "planos", a fronteira das esferas, as faces de um cubo, os parabolóides hiperbólicos (sela do macaco), são hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^3$ .
- Uma variedade de dimensão 3 contida no  $\mathbb{R}^4$  é uma hipersuperfície deste espaço.
- Uma variedade de dimensão  $n-1$  contida no  $\mathbb{R}^n$  é uma hipersuperfície deste espaço.

Os dois conceitos, *hiperplanos*, *hipersuperfícies* são conceitos relativos. Não podemos falar de hiperplanos sem mencionar qual é o espaço em que os consideramos. O mesmo se diga das hipersuperfícies.

### 5.3.1 Hiperplano e hipersuperfície no $\mathbb{R}^4$

Mas podemos nos colocar em dimensão ainda mais elevada, o  $\mathbb{R}^4$  é um espaço de dimensão 4, porque os seus elementos se expressam usando *quatro variáveis livres*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

todas de sua livre escolha. O espaço em que vivemos é uma *variedade linear*, um *hiperplano* do  $\mathbb{R}^4$ . O globo terrestre e os planetas são *hipersuperfícies* do  $\mathbb{R}^4$ .

- hiperplano Uma variedade linear de dimensão 3 é um hiperplano do  $\mathbb{R}^4$ . Quer dizer que o  $\mathbb{R}^3$  é um hiperplano do  $\mathbb{R}^4$ . Qualquer translação  $\mathbb{R}^3 + \vec{r}$  é um hiperplano do  $\mathbb{R}^4$ . Nos vivemos num hiperplano do  $\mathbb{R}^4$  a bordo de uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^3$ .
- hipersuperfície Uma variedade não linear de dimensão 3 é um hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$ . A Terra por exemplo, não a superfície em que vivemos, mas o globo terrestre todo, é uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$ .

### 5.3.2 Um pouco sobre classificação de variedades

Nem toda variedade tem uma equação explícita, porém, e isto é consequência do Teorema da Função Implícita, que todas as variedades tem uma equação.

O tipo de equação de uma variedade serve para classificá-la:

- Variedades algébricas são aquelas que tem uma equação polinomial; Vamos incluir neste caso uma variedade que seja definida por um programa em uma linguagem de alto nível.
- Variedades não algébricas quando a equação que as definem tem expressões transcendentais.

- Gráficos de funções quando tivermos uma função

$$\mathbb{R}^n \supset W \xrightarrow{f} V \subset \mathbb{R}^m$$

então  $\text{graf}(f)$  será

- uma *variedade* algébrica, se  $f$  for uma expressão polinomial;
- uma *variedade* não algébrica, se  $f$  for uma expressão não polinomial, contiver funções transcendentais em sua fórmula.

- Variedades Diferenciáveis são aquelas cuja expressão que as definem são diferenciáveis. As variedades algébricas são diferenciáveis, por exemplo.

**Definição 14** *Variedades tangentes*

Sejam duas funções  $f, g$

$$W \xrightarrow{f, g} V$$

e as correspondentes variedades, do tipo “gráfico de função”,  $\text{graf}(f), \text{graf}(g)$ .

Diremos que as duas variedades  $\text{graf}(f), \text{graf}(g)$  são tangentes no ponto  $(a, b) \in W \times V$  se houver uma vizinhança  $D(a, r) \subset W$  tal que

$$\begin{cases} f(a) = g(a) & = b \\ f(a+h) - g(a+h) & = o(|h|) ; |h| < r \end{cases} \quad (5.47)$$

**Definição 15** *função diferenciável* Considere  $W \xrightarrow{f} V$  uma função contínua definida num aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  e tomando valores em outro aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Diremos que  $f$  é diferenciável no ponto  $a \in W$  se houver uma função linear  $T$  tal que  $\text{graf}(f), \text{graf}(T)$  são tangentes no ponto  $\underline{a}$ .

$$f(a+h) - f(a) - T(h) = o(|h|)$$

**Definição 16** *dimensão de uma variedade linear*

As variedades lineares são as variedades da forma  $\text{graf}(T)$  em que  $T$  é uma função linear afim.

Podemos definir de forma natural a dimensão das variedades lineares porque o gráfico  $\text{graf}(T)$  é um espaço vetorial (afim), então a dimensão de  $\text{graf}(T)$  é a dimensão do espaço vetorial afim  $\text{graf}(T)$ .

Considere uma variedade  $\Omega$  e uma vizinhança aberta de um ponto  $a \in \Omega$ . Se houver uma variedade linear  $\text{graf}(T)$  tangente a  $\Omega$  no ponto  $\underline{a}$ , então diremos que a dimensão local da variedade  $\Omega$  em  $a$  é a  $\dim(\text{graf}(T))$ .

**Exemplo 32** *Variedades com componentes de dimensão variada*

Observe que a definição acima admite a possibilidade de que uma variedade seja composta de componentes-variedades com dimensões distintas. Por exemplo, uma reta e um ponto que não pertença a esta reta formam uma variedade que tem uma componente de dimensão zero e outra componente de dimensão 1.

**Observação 24** *Gráfico e outros conceitos indefinidos*

Observe que precisamos do conceito de dimensão local para variedades que não sejam lineares. As variedades lineares terão a mesma dimensão em qualquer de seus pontos, porque são espaços vetoriais afins. Mas as variedades não lineares podem ser aglomerados os mais estranhos de sub-variedades com dimensões locais distintas. Considere “Saturno e seus anéis”, supondo que os anéis sejam de dimensão dois e Saturno de dimensão três, obviamente, estamos dentro de um exemplo forçado uma vez que nenhuma variedade do espaço  $x$  tempo em que vivemos tem dimensão diferente de três....

Não definimos gráfico, este conceito fica entre os muitos que iremos usar implicitamente sem alertar o leitor para isto, afim de não tornar enfadonha a leitura.

Vejamos de imediato qual a relação que pode haver com distintas funções lineares  $T_1, T_2$  que sejam tangentes ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ .

$$f(a+h) - f(a) - T_1(h) = o(|h|) \quad (5.48)$$

$$f(a+h) - f(a) - T_2(h) = o(|h|) \quad (5.49)$$

$$T_1(h) - T_2(h) = o(|h|) \quad (5.50)$$

$$(T_1 - T_2)(h) = o(|h|) \quad (5.51)$$

porque “também” a variável é linear relativamente às funções lineares... e como  $S = T_1 - T_2$  é uma função linear, temos

$$S(h) = o(|h|)$$

mas a única função linear que tem esta propriedade é a função identicamente nula, logo

$$T_1 = T_2$$

e concluímos

**Teorema 23** *Unicidade da derivada*

*Se  $f$  for diferenciável, a função linear tangente é única.*

Neste momento é interessante fixarmos uma base para o espaço vetorial. Como não precisaremos de mudar o referencial, vamos usar a base usual

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Consequentemente, a cada transformação linear lhe corresponde uma única matriz.

Considere agora uma função

$$\mathbb{R}^n \supset \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

e um ponto  $a \in \Omega = \text{Dom}_f$ . A derivada,  $J(f)$ , calculada em  $\underline{a}$  é uma função linear cujo gráfico é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ . Seja  $T$  a matriz desta transformação linear

Como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = J(f)(a) \implies \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial e_i} = ( a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} ) \quad (5.53)$$

a derivada na direção de  $e_i$ . Observando que esta é também a derivada de  $f$  na direção de  $e_i$ , podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial f}{\partial e_j} \Big|_a = \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial T}{\partial e_j} \Big|_a = a_{ij} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial T}{\partial e_i} \Big|_a = a_{ji} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial T}{\partial e_i} \Big|_a = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

Assim, se  $f$  for derivável, (tiver uma variedade linear tangente ao seu gráfico), então

**Teorema** 24 *Teorema de Schwartz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} = \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial f}{\partial e_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

As derivadas parciais de ordem 2, mistas, são iguais.

Devido a erros de concepção os que nos antecederam chamaram  $T$  de jacobiana de  $f$  no ponto  $a$ ,  $J(f)(a)$ , em vez de chamá-la simplesmente de *derivada* de  $f$ . Continuaremos com a notação histórica mas corrigindo a idéia.

**Observação** 25 *A notação  $J(f)(a)$*

*A matriz jacobiana é uma matriz funcional, uma função de  $\underline{n}$  variáveis no contexto destas notas. Consequentemente tem sentido escrevermos o seu valor no ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  idêntico assim uma matriz que foi obtida ao substituirmos cada uma das variáveis pelas coordenadas de  $\underline{a}$ .*

### 5.3.3 Conjunto aberto e fronteira de um conjunto

Precisamos de mais dois conceitos básicos. Um deles usamos indiretamente acima ao dizermos que vivemos na *superfície* do globo terrestre. É o conceito de *fronteira*. O outro é o conceito de *conjunto aberto*.

Disco aberto é a generalização de *intervalo aberto*. Disco aberto é o conjunto dos pontos cuja distância a um ponto  $P$  chamado centro é menor do que o raio  $r$ :

$$D(P, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; d((x, y), P) < r\}$$

A palavra *disco* é prisioneira da dimensão, e os matemáticos liberaram a palavra *bola* da prisão tridimensional usando sem esta preocupação. Uma bola aberta é

$$\mathcal{B}(P, r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, P) < r\}$$

ou ainda, se quisermos apresentar as coordenadas,

$$P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$$

e escrevemos

$$\mathcal{B}(P, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; d(x, P) < r\}$$

em que

$$d(x, P) = \sqrt{(x_1 - p_1)^2, \dots, (x_n - p_n)^2}$$

A fronteira da bola é o conjunto

$$\partial\mathcal{B}(P, r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, P) = r\}$$

é uma *hipersuperfície* ou uma *hiper-esfera*.

Nós vivemos na fronteira do globo terrestre:

$$\{(x, y, z) \mid d((x, y, z), C) = 6.500km\}$$

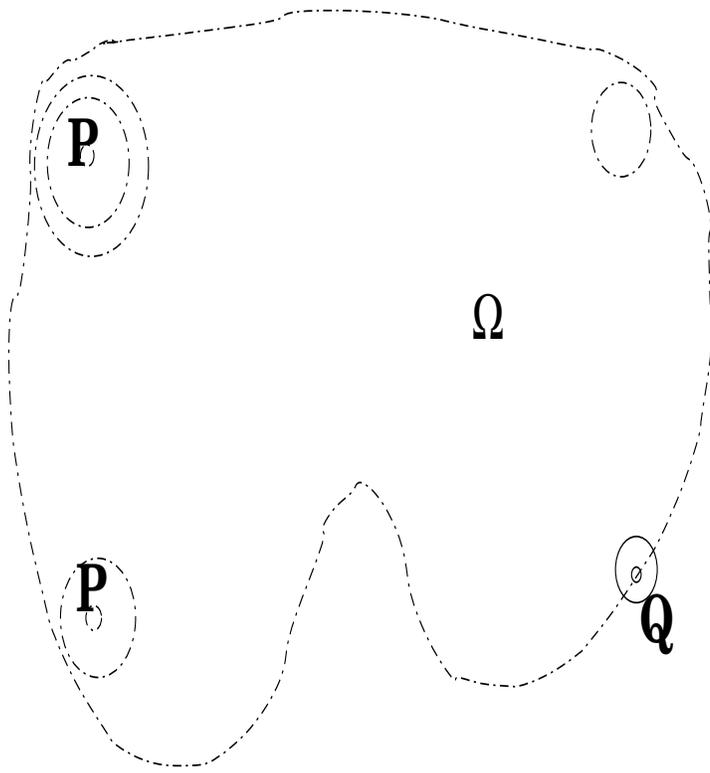
portanto vivemos numa variedade não linear de dimensão dois, cujo costume geométrico é chamar de superfície. Vivemos na fronteira de uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$  chamada por nós mesmos de Terra. Claro, alguns contestarão esta afirmação dizendo que a atmosfera pertence ao globo Terrestre, o que é verdade, portanto nós não vivemos na fronteira ... vivemos no *interior* da Terra. Deixamos que você escolha qual é a verdade matemática onde você vive.

Observe que não definimos *interior* o que deixaremos que você faça como exercício.

A fronteira de uma variedade tem dimensão inferior a da variedade. A bola do  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $n$ . A fronteira da bola do  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$  portanto uma hipersuperfície. Veja o caso de nossa prisão tridimensional:

- A bola do  $\mathbb{R}^3$  é uma variedade de dimensão 3. A fronteira da bola do  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície, uma variedade de dimensão dois (dimensão imediatamente inferior à dimensão do espaço).
- A bola do  $\mathbb{R}^2$ , um disco, é uma variedade de dimensão 2. A fronteira do disco, uma circunferência, é uma curva, uma variedade de dimensão um (dimensão imediatamente inferior à dimensão do espaço).

Vamos fazer definições agora.



## O ponto $Q$ está na fronteira de $\Omega$

Figura 5.4: Um conjunto aberto  $\Omega \ni P$  e um ponto.

### Definição 17 Conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$

Um conjunto  $\Omega$  se diz aberto se em qualquer ponto  $x \in \Omega$  pudermos considerar uma bola aberta  $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$ .

Veja a figura (fig. 5.4) página 147, em que  $Q$  é um ponto fronteira e  $P$  é um ponto interior.

O que torna a figura  $\Omega$  aberta é a ausência da fronteira como um subconjunto de  $\Omega$ . Se fronteira pertencesse à figura, e se considerássemos um ponto  $P$  sobre a fronteira, não poderíamos desenhar nenhuma bola aberta centrada em  $P$  dentro de  $\Omega$ . Porque parte da bola ficaria fora de  $\Omega$ . Este exemplo facilita a definição de fronteira:

**Definição 18** Fronteira de um conjunto  $\Omega$  Fronteira de um conjunto  $\Omega$  é o conjunto dos pontos  $Q$  tal que, toda bola aberta de centro  $Q$  tem pontos diferentes de  $Q$  tanto em  $\Omega$  como no complementar  $\Omega^c$ .

Designamos por  $\partial\Omega$  a fronteira de  $\Omega$ .

O ponto  $Q$  na figura (fig. 5.4) página 147, se encontra fronteira de  $\Omega$ .

**Exemplo 33** Ou exercícios resolvidos...

1. Conjunto Fechado e fronteira Conjunto Fechado é o complementar de um aberto. O falta a um aberto para ser fechado é fronteira. Mostre que todo conjunto fechado contém seus pontos fronteira. **Dem**:

Seja  $F$  um conjunto fechado, então  $F^c$  é aberto. Considere

$$P \in \partial F$$

e uma bola  $B(P, \nabla) r > 0$ .

**q.e.d.**

2.

3.

**Exercícios 8** *Curvas*

1. Quais dos gráficos das relações definidas na questão ??, são gráficos de funções?
2. Defina gráfico e função  $f : A \rightarrow B$  usando a definição de gráfico. Os conjuntos  $A, B$  serão sempre, aqui, intervalos da reta.
3. curva

**Definição 19** *Curva.* Uma curva em  $A \times B$  é um gráfico que pode ser parametrizado continuamente sobre um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Em outras palavras, uma curva é uma função contínua

$$I \xrightarrow{\alpha} A \times B ; I \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in R. ; I \subset \mathbb{R}.$$

- (a) Escreva as equações paramétricas da curva  $y = 2x$ .
  - (b) Escreva as equações paramétricas do círculo unitário.
  - (c) Dê exemplos de curvas apresentando uma parametrização adequada.
  - (d) curva diferenciável Defina curva diferenciável. Dê exemplos.
4. Sentido de percurso - anti-horário

- (a) Calcule a derivada da curva

$$t \mapsto e^{it} = s(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

- (b) Verifique que  $s'(t)$  é um vetor cuja direção é paralela à reta tangente no ponto  $s(t)$ . Prove isto.

- (c) Desloque  $s'(t)$  para o ponto de tangência e verifique que o vetor tangente indica (ou induz) o sentido de rotação de uma partícula que tenha a curva  $s(t)$  como “órbita”, e que isto justifica porque o sentido anti-horário é considerado positivo.

**Definição 20** *Curva diferenciável*

Uma curva é uma função, se esta função for diferenciável, diremos que a curva é diferenciável.

Uma curva é uma variedade de dimensão 1. Se for diferenciável temos uma variedade diferenciável de dimensão 1.

5. variedade linear tangente Considere a variedade diferenciável de dimensão 1 dada pelas equações paramétricas

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Verifique que a função derivada

$$t \mapsto r'(t)$$

define um campo vetorial, que a dimensão comum a todos os vetores deste campo é 1. Use isto para justificar por que a tangente em qualquer ponto de  $r$  é uma reta, que  $r$  deve ser uma variedade de dimensão 1 o que se chama comumente de curva.

6. variedade linear tangente Considere a função diferenciável  $z = F(x, y)$  definida em um domínio  $\Omega$  do plano  $\mathbb{R}^2$ .

## 5.4 Complementos sobre Integração

### Exercícios 9 Complementos

1. Verifique os itens da tabela de Hughes-Hallet de 1 até 7.

**Solução 2** (a)  $F(x) = \int x^n dx$  representa uma primitiva da função  $f(x) = x^n$ . Como sabemos que a derivada de uma função polinomial é outra função polinomial

$$\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$$

então, escrevendo estas expressões com o símbolo da integral temos

$$F(x) = \int mx^{m-1} dx = x^m + C \implies \int x^{m-1} dx = \frac{x^m + C}{m} = \frac{x^m}{m} + C'$$

ou simplesmente

$$\int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m} + C$$

Se  $n = m - 1 \implies n + 1 = m$  então

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n+1 \neq 0 \equiv n \neq -1$$

(b) O caso  $n = -1$  Não existe uma função “algebrica” que seja a primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Mas a integral

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

existe se  $x > 0$  o permite a definição da função

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

cujos valores só podem ser calculados aproximadamente. Esta função é a função logaritmo natural o que se traduz com a expressão da tabela. Observe que não fizemos nenhuma “demonstração”. A tabela faz referência aos valores e se encontra mal escrita. A correção é

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt \ln(x) + C ; x > 0$$

mas a função  $F(x) = \ln|x|$  está definida para qualquer valor de  $x \neq 0$  e neste caso a derivada desta função é  $f(x)F'(x) = \frac{1}{x}$

(c)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

Observe que a tabela não diz, fica sub-entendido,  $a > 0$ .

Uma forma de obter este resultado é usando a derivação da função composta (regra da cadeia)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

e como  $h(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$  então

$$h'(x) = e^{x \ln(a)} (x \ln(a))' = e^{x \ln(a)} \ln(a) = \ln(a) a^x$$

ou, dividindo toda a equação pela constante  $\ln(a)$  temos

$$\frac{h'(x)}{\ln(a)} = \frac{e^{x \ln(a)} (x \ln(a))'}{\ln(a)} = e^{x \ln(a)} = a^x$$

Então, uma primitiva de  $a^x$  é também uma primitiva de  $\frac{h'(x)}{\ln(a)}$  que é

$$\frac{h(x)}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

provando assim o item 3 da tabela.

(d) Derivando ambos os membros no item 4 temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int \ln x dx &= \frac{d}{dx} (x \ln(x) - x + C) \\ \ln(x) &= \frac{d}{dx} (x \ln(x) - x) = \frac{d}{dx} (x \ln(x)) - 1 \\ \ln(x) &= \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)\end{aligned}$$

chegamos a uma identidade através de operações lógicas concluindo então que partimos de uma expressão verdadeira que é o item 4 da tabela.

(e) Os itens 5,6 se encontram feitos na maioria dos livros de Cálculo. São consequência de que

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) ; \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

(f)  $\int \tan x dx = -\ln|\cos(x)| + C$

Escrevendo a definição de  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  na integral e observando que  $\sin(x) = -\frac{d}{dx} \cos(x)$  temos:

$$\begin{aligned}\int \tan(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \\ &= \int \frac{\sin(x) dx}{\cos(x)} = - \int \frac{d \cos(x)}{\cos(x)} = \\ &= - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

porque na última linha fizemos a substituição  $u = \cos(x)$ . Usamos também o item 2 da tabela Hughes- Hallet. Esta expressão merece algumas considerações como já observamos antes. Ela deve ser usada com cuidado observando o domínio das funções envolvidas.

2. Calcule as integrais abaixo:

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^{\pi} \sin(x) dx & b) \int_0^{\pi} \sin(2x) dx & c) \int_0^{\pi} \sin(4x) dx \\ d) 2 \int_0^{\pi} \cos(2x) dx & e) 3 \int_0^{\pi} \cos(3x) dx & f) 4 \int_0^{\pi} \cos(4x) dx\end{array}$$

Faça os gráficos correspondentes e procure deduzir uma “lei geral” descrevendo o comportamento multiplicativo em

$$\alpha \int_a^b f(\alpha x) dx$$

observando que

$$\sin(\alpha x) \neq \alpha \sin(x) \text{ e } \cos(\alpha x) \neq \alpha \cos(x).$$

Faça uma demonstração deste teorema usando somas de Riemann.

### Solução 3

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{sen}(2x)2dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(u)du$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \text{sen}(3x)3dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}(u)du$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \text{sen}(u)du$$

Veja que “não tiramos o  $\underline{n}$  do parâmetro do  $\text{sen}$ ”. O que fizemos foi, na integral que envolve  $\text{sen}(nx)$ , alteramos a “variável de integração”. Estamos usando uma técnica chamada mudança de variável na integração.

Esta é uma das denominações mais infelizes para métodos em Matemática, “mudança de variável”, uma vez que numa integral definida não nenhuma variável para ser mudada. O nome correto, e que provavelmente ninguém pensa seriamente na mudança, seria, “mudança de domínio na integral”, mas é preciso pelo menos fazer esta observação. Mais a frente vamos enunciar este método sob a forma de Teorema. Isto fica patente na demonstração faremos, mais a frente, usando somas de Riemann.

Use Gnuplot com os seguintes comandos, para ver o significado de  $f(x) = \text{sen}(nx)$ . Não use a numeração a), b), etc... no Gnuplot que ela irá provocar erros. A numeração vai ser usada em seguida para explicar o efeito de cada comando.

- a) `f(x) = sin(x)`
- b) `g(x) = sin(2*x)`
- c) `h(x) = sin(3*x)`
- d) `set yrange [-10:10]`
- e) `plot f(x), g(x), h(x), 0`

- (a)  $f(x) = \sin(x)$  para definir uma função  $f$  no Gnuplot.
- (b)  $g(x) = \sin(2 * x)$  para definir uma função  $g$  no Gnuplot.
- (c)  $h(x) = \sin(3 * x)$  para definir uma função  $h$  no Gnuplot.
- (d) `set yrange [-10:10]` para tornar os gráficos com um visual melhor, experimente primeiro sem este item e rode o próximo, e verá que os gráficos ficam pouco claros.
- (e) Pede ao Gnuplot que faça os gráficos simultâneos das funções  $f, g, h$  e da função constante zero - o eixo  $OX$ .

*Interpretando o resultado do Gnuplot.*

Você vê tres "senóides", quer dizer, tres ondas do tipo "seno". A diferença entre elas é a frequência. Se considerarmos  $y = \text{sen}(x)$  como o padrão, então  $g, h$  têm frequências maiores do que o padrão. Rode agora no Gnuplot sem usar a numeração a), b), etc...

- a)  $f(x) = \text{sin}(x)$
- b)  $g(x) = \text{sin}(2*x)$
- c)  $h(x) = \text{sin}(3*x)$
- d) `set yrange [-10:10]; set xrange [0:6.3]`
- e) `plot f(x), g(x), h(x), 0`

O item (d) altera o domínio dos gráficos para o intervalo  $[0, 6.3] \approx [0, 2\pi]$ , e basta rodar (d), (e) não é necessário repetir os outros. O que você agora vê uma onda completa (a do seno), uma onda que se repete integralmente (a do  $\text{sen}(2x)$ ), e uma onda que se repete duas vezes (a do  $\text{sen}(3x)$ ).

Durante muito tempo se pensou que todos os fenômenos ondulatórios fossem descritos "perfeitamente" pelas ondas

$$f_n(x) = \text{sen}(nx); g_n(x) = \text{cos}(nx)$$

até os anos 50 isto era um sentimento quase generalizado. Entre os anos 50 e 80 descobriu-se que outros tipos de ondas poderiam ser usadas o que terminou na construção de uma teoria chamada de wavelets. Isto aqui é um tremendo resumo....

Vamos ver agora o caso genérico  $\int_a^b f(\alpha x) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\alpha x) dx &= \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(\alpha x) \alpha dx \\ \int_a^b f(\alpha x) dx &= \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(\alpha x) d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(u) du \end{aligned}$$

Observe que nas integrais de  $\text{sen}(nx)$  um dos limites é zero e por isto parece que não foi dividido....

Uma expressão mais genérica ainda pode ser obtida usando-se uma função  $g$  em lugar de  $x \mapsto \alpha x = g(x)$  que é o caso nas contas que fizemos acima. Quando se aplica mudança de variável numa integral é porque se descobriu que  $f(g(x)) = h(x)$  é uma função mais simples no cálculo de integrais (está na tabela de integração). A sequência de equações é:

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(g(x)) dx = \int_a^b f(g(x)) \frac{1}{g'(x)} dg(x)$$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(u) \frac{1}{u'} du$$

$$\int_{[a,b]} h(x)dx = \int_{[a,b]} f(g(x))dx = \int_{g^1([a,b])} f(u)du ; u = g(x)$$

Observe que  $\frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{u'}$  está fazendo o papel de  $\frac{1}{\alpha}$  nas contas anteriores e não pode sair da integral porque depende de  $x$ .

## 5.5 Complementos sobre Geometria e Derivada

**Exercícios 10** 1. Use Gnuplot<sup>8</sup> com os comandos seguintes para ver o uso da derivada na construção da reta tangente

```
## este um comentario que Gnuplot vai ignorar
set title "Graficos de f e de f' "
f(x) = sin(x)
df(x) = cos(x)
## equacao de uma reta tangente ao grafico de f
reta(x) = f(a) + df(a)*(x-a)
set xrange[0:6.3]; set yrange[-4:4]
plot f(x), df(x), 0
pause -2
## grafico f da reta tangente ao grafico de f
set title "grafico da equacao a reta tangente em (-3 , f(-3))"
a = -3
plot f(x), reta(x), 0
pause -2
```

- (a)  $f(x) = \sin(x)$  para definir a função  $f$ ;
- (b)  $df(x) = \cos(x)$  para definir uma função chamada  $df(x)$ ;
- (c) `set xrange[-6.3 : 6.3]; set yrange[-4 : 4]` para definir a janela do gráfico. Experimente rodar sem estes comandos para ver a diferença; Troque os valores nos intervalos para ver o que acontece.
- (d) `plot f(x), df(x), 0` pede ao Gnuplot que faça os gráficos simultâneos de  $f, df, 0$ . O zero representa a função constante zero e no gráfico vai representar o eixo  $OX$ .
- (e) Veja que o valor de  $a$  é pode ser dado em diversos locais sem ser preciso alterar a equação da reta.

<sup>8</sup>Gnuplot é um programa para fazer gráfico de funções, de domínio público, com versões para Linux, DOS, e outros sistemas operacionais.

- (f) *pause -2* força Gnuplot a esperar por um enter antes de continuar.
- (g) Repita o bloco que se inicia com o comentário  
*grafico f da reta tangente ao grafico de f*  
*trocando apenas o valor de  $\underline{a}$  para ver novos gráficos da reta tangente em outros pontos do gráfico.*
- (h) Troque a equação de  $f$  e de sua derivada para ver outros gráficos. Possivelmente você deverá também ter que alterar a janela gráfica com os comandos  
`set xrange[-6.3 : 6.3]; set yrange[-4 : 4]`  
 Se o arquivo `gnuplot.data` estiver no diretório corrente, você poderá rodar  
`gnuplot gnuplot.data`  
 para ver um exemplo funcionando. Leia o arquivo `gnuplot.data` e o altere a seu gosto, mesmo que você cometa erros...

Analise, geometricamente, o significado de  $f(x) = \sin(x)$ ,  $df(x) = f'(x) = \cos(x)$ .

## 2. Vetores

- (a) Ilustre com desenhos a comutatividade e associatividade da soma de vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Mostre com uma interpretação geométrica que as diagonais de um paralelograma representam a soma e diferença de dois vetores indicando quem representa quem.
- (c) Resolva geometricamente a equação

$$\vec{A} + \vec{X} = \vec{C}$$

para dois vetores  $\vec{A}, \vec{C}$  que você desenhar inicialmente.

- (d) Resolva geometricamente a equação

$$\vec{X} - \vec{A} = \vec{C}$$

para dois vetores  $\vec{A}, \vec{C}$  que você desenhar inicialmente.

- (e) Lei de Chasles

i. Desenhe os vetores  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  no plano tal que

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$$

ii. Desenhe os vetores  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  no plano tal que

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = 0$$

- iii. Enuncie a Lei de Chasles que associa "vetores" e polígona fechada, e esta sendo usada nos itens anteriores.

**Lei de Chasles .**

Dados  $n$  vetores

$$\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$$

se a soma deles é zero, significa que um deles é a resultante dos demais, logo eles formam uma polígona fechada.

- (f) Dados dois vetores  $\vec{A}, \vec{B}$  não colineares, determine o lugar geométrico (faça gráficos ilustrativos) do espaço descrito por

i.  $\vec{A} + t\vec{B}$  ;  $t \in \mathbb{R}$

**Solução:** É a reta paralela ao vetor  $\vec{B}$  passando pelo ponto  $A$ . Esta expressão depende de um único parâmetro o que lhe dá dimensão 1, (uma variedade de dimensão 1).

ii.  $t\vec{A} + s\vec{B}$  ;  $t, s \in \mathbb{R}$  ;  $s + t = 1$

**Solução:** A relação  $s + t = 1$  liga "linearmente" os parâmetros  $s, t$  de modo que existe um parâmetro dependente e outro independente. Isto significa que esta expressão depende de um único parâmetro (daquele que for considerado "livre"). O resultado é uma variedade de dimensão 1: uma reta. Se  $s = 0$  então  $t = 1$  e a reta passa pelo ponto  $A$ , reciprocamente, se  $s = 1$  vemos que a reta passa pelo ponto  $B$ .

iii.  $t\vec{A} + s\vec{B}$  ;  $t, s \geq 0$  ;  $s + t = 1$

**Solução:** Semelhante ao anterior, uma variedade de dimensão 1, entretanto agora a condição  $t, s \geq 0$  restringe a variação dos parâmetros a um domínio restrito, resultando num segmento de reta:  $s \in [0, 1]$ , por exemplo.

Uma outra forma de ver: a condição

$$t, s \geq 0 ; s + t = 1$$

faz dos parâmetros  $s, t$  pesos e

$$t\vec{A} + s\vec{B}$$

é a média aritmética ponderada dos vetores  $\vec{A}, \vec{B}$  portanto um ponto qualquer do segmento de reta que liga os dois vetores.

iv.  $t\vec{A} + s\vec{B}$  ;  $t, s \geq 0$

**Solução:** Precisamos de um pouco mais de sofisticação para determinar que figura geométrica é esta. Primeiro observe que a condição  $t, s \geq 0$  descreve o primeiro quadrante, portanto  $t\vec{A} + s\vec{B}$  tem que ser a imagem do primeiro quadrante pela função

$$f(s, t) = t\vec{A} + s\vec{B}.$$

Como  $f$  é linear, as fronteiras lineares do domínio serão preservadas logo a imagem vai ser um cone (uma folha de um cone).

Como o par de valores  $(s, t) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$  é admissível, então os pontos  $A, B$  pertencem a esta cone e um raciocínio semelhante mostra que as retas determinadas por  $\vec{A}, \vec{B}$  são as fronteiras do cone-imagem.

v.  $t\vec{A} + s\vec{B}$  ;  $t, s \in \mathbb{R}$

**Solução:** O plano porque é uma variedade de dimensão 2 uma vez que não restrição sobre as variáveis, são duas variáveis livres.

(g) Dependência linear

i. Prove que dados  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^n$  se houver  $s, t \in \mathbb{R} - 0$  tal que  $s\vec{A} + t\vec{B} = 0$  então  $\vec{A}, \vec{B}$  são paralelos.

**Solução:** Como os escalares não podem ser nulos então podemos resolver a equação explicitando um dos vetores:

$$\vec{A} = \frac{t\vec{B}}{s}$$

quer dizer que  $\vec{A}$  está na reta determinada por  $\vec{B}$  logo são colineares (paralelos). Os dois vetores determinam um espaço de dimensão 1 obtido com a variação arbitrária dos parâmetros. Dizemos que eles são linearmente dependentes porque sendo dois vetores geram um espaço de dimensão menor do que dois.

ii. Prove que dados  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^n$  se houver  $s, t, r \in \mathbb{R} - 0$  tal que  $s\vec{A} + t\vec{B} + r\vec{C} = 0$  então  $s\vec{A}, t\vec{B}, r\vec{C}$  formam uma poligonal fechada.

**Solução:** Mesmo raciocínio anterior, podemos calcular um vetor em função dos outros dois o que o torna a resultante da soma dos outros dois para uma escolha adequada de escalares, logo um uma poligonal fechada. Os tres vetores determinam um espaço de dimensão 2 obtido com a variação arbitrária dos parâmetros. Dizemos que eles são linearmente dependentes porque sendo tres vetores geram um espaço de dimensão menor do que tres.

iii. Como você descreveria uma situação semelhante às anteriores com 4 vetores. Junte as peças e enuncie uma lei geral usando as palavras “dimensão” e “dependência linear”, que nos liberam dos limites estreitos da geometria.

**Solução:** Como nos outros casos, podemos explicitar um dos vetores como combinação linear dos demais: resultante da soma dos outros para uma seleção adequada de escalares. Os quatro vetores determinam um espaço de dimensão 3 obtido com a variação arbitrária dos parâmetros. Dizemos que eles são linearmente dependentes porque sendo quatro vetores geram um espaço de dimensão menor do que quatro.

(h) baricentro Se  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$  forem dados, e se os números

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

também forem dados, qual é o significado de

$$B = \frac{p_1 \vec{A}_1 + p_2 \vec{A}_2 + \cdots + p_n \vec{A}_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}; p_1 + p_2 + \cdots + p_n \neq 0$$

**Solução:** A expressão representa uma média aritmética ponderada, portanto o significado é este. O nome “baricentro” (centro de massa) significa que cada um dos vetores de uma determinada região é associado com a massa específica da região que ele representa. Desta forma  $B$  representa uma média aritmética ponderada de uma amostragem de pontos  $\vec{A}_i$  de um corpo com sua massa específica  $p_i$  e portanto uma aproximação do centro de massa do corpo.

3. Produto Escalar Sejam  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^n$ .

(a) Decida se o que é verdadeiro e justifique

a)  $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$  é um número    b)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  é um vetor    c)  $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \vec{B}$  é um vetor.

**Solução:** (a) e (c) são verdadeiros.

(b) qual o significado de  $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \vec{B}$  ?

**Solução:** O quociente por  $|\vec{B}|$  torna o vetor  $\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$  unitário. Então temos o produto escalar de  $\vec{A}$  por um vetor unitário, logo a projeção de  $\vec{A}$  na direção de  $\vec{B}$ , um número. Este número multiplicado pelo unitário na direção de  $\vec{B}$  produz um vetor nesta direção, com o comprimento calculado por  $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$ .

4. Escreva as equações paramétricas da reta que passa nos pontos

$$(0, 1, 2), (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3.$$

**Solução 4** Para encontrar a equação paramétrica da reta que passa por dois pontos, calculamos a diferença entre os vetores posição o que dá a “diagonal-diferença” do paralelograma. Os múltiplos deste vetor por um parâmetro arbitrário representam a equação paramétrica da reta:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (0, 1, 2) - (1, 2, 3) = (-1, -1, -1) \\ (x, y, z) &= (0, 1, 2) + t\vec{R} = (0, 1, 2) + t(-1, -1, -1) \\ (x, y, z) &= (-t, 1 - t, 2 - t) \end{aligned}$$

5. Calcule o vetor normal ao plano  $3x + 7y + z = 5$

**Solução 5** O vetor normal é unitário na direção do vetor ortogonal. Há dois. Vetor ortogonal ao plano pode ser  $(3, 7, 1)$  se dividido pelo módulo produz um vetor unitário:

$$u = \frac{(3, 7, 1)}{|(3, 7, 1)|} = \frac{(3, 7, 1)}{\sqrt{3^2 + 7^2 + 1}}$$

---

6. Considerando o plano  $3x + 7y + z = 5$  como uma função  $z = f(x, y)$  decida se  $f$  cresce ou decresce ao longo do eixo  $OX$

**Solução 6**

$$z = f(x, y) = 5 - 3x - 7y$$

É a derivada parcial, relativamente a  $OX$  quem vai responder isto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3 < 0$$

logo  $f$  é decrescente na direção de  $OX$ .

---

7. Considere a superfície  $f(x, y) = x^2 + y$ . Verifique se  $z = f(x, y)$  cresce ou decresce no ponto  $(1, 0, 1)$  na direção de  $OX$ .

**Solução 7** É a derivada parcial relativamente a  $OX$  (ou relativamente a  $x$ ) quem vai falar do crescimento de  $f$  ao longo da direção  $OX$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

calculada no ponto  $(1, 0, 1)$  vale  $2x|_{x=1} = 2$  portanto  $f$  é crescente neste ponto.

---

8. Verifique que as retas tangentes à curva  $x^2 + y^2 = 1$  são perpendiculares ao vetor posição  $(x, y)$ .

**Solução 8** Derivando implicitamente temos

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$\text{a equação da reta tangente: } 2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

O vetor  $(2a, 2b) = 2(a, b)$  o dobro do vetor posição  $(a, b)$  é perpendicular à reta tangente, logo o vetor posição  $(a, b)$  é também perpendicular à reta tangente em qualquer ponto.

---

9. derivabilidade e continuidade Verifique que a função definida por

$$\begin{cases} 9 & \text{se } x < 0 \\ 9 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

é contínua, derivável em todos os pontos do domínio, mas sua segunda derivada é descontínua na origem. Calcule  $f''(0+)$ ,  $f''(0-)$ . Faça os gráficos das três funções  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  num único sistema de eixos.

**Solução 9** Estas funções estão definidas por um sistema de duas equações conforme  $x \in (-\infty, 0)$  ou  $x \in [0, \infty)$ . em cada um destes sub-domínios, elas são definidas por polinômios portanto tem derivadas de qualquer ordem (e antes são contínuas). O problema se encontra (se houver) no ponto 0 que é a fronteira comum aos dois domínios. Como

- $f(0+) = 9 = f(0-)$  então  $f$  é contínua.
- $f'(0+) = 0 = f'(0-)$  então  $f'$  é contínua.
- $f''(0+) = 0 \neq f''(0-) = -2$  então  $f''$  não é contínua.

Os gráficos destas funções podem ser obtidas com Gnuplot. A sintaxe, no Gnuplot para definir expressões condicionais é:

$$f(x) = (x < 0)?9 : 9 - x * x$$

Ou mais geralmente:

$$\text{condicao1?comando1 : comando2}$$

se *condicao1* for verdadeira, *comando1* será executado, se *condicao1* for falsa, *comando2* será então executado.

Desta forma, a função fica definida pela expressão que se encontra à direita da igualdade.

---

10. Redefina, com a sintaxe do Gnuplot, e faça o gráfico da função assim definida:

$$\begin{cases} x < -4 & \Rightarrow f(x) = 2(x + 4) \\ x \in [-4, -4] & \Rightarrow f(x) = g(x) = \frac{16-x^2}{4} \\ x > 4 & \Rightarrow f(x) = -g(x - 8) \end{cases} \quad (5.55)$$

Prove que  $f$  é de classe  $C^1$  mas não é de classe  $C^2$  e calcule os saltos da segunda derivada.

**Solução 10** Para o gráfico rode  
gnuplot integral.multipla.00.02.01.data

Como  $f$  está definida por polinômios, em cada uma das componentes conexas do domínio, então  $f$  é de classe  $C^\infty$  em cada uma dessas componentes. Temos que analisar o que ocorre nos pontos-fronteira comuns a cada uma dessas componentes:

$$x \in \{-4, 4\}$$

No ponto  $x = -4$  os limites laterais de  $f$  coincidem assim como em  $x = 4$ . Faça as contas para verificá-lo. Consequentemente  $f$  é contínua na reta.

A derivada, também tem os mesmo valores à direita e à esquerda destes pontos, portanto  $f'$  é contínua na reta e assim  $f$  é contínua e tem derivada contínua, o que a faz pertencer à classe  $C^1$ .

Mas a segunda derivada tem um salto de amplitude  $-0.5$  no ponto  $x = -4$  e um salto de amplitude  $1$  no ponto  $x = 4$ . A segunda derivada é descontínua, portanto  $f \notin C^2$ .

---

11. Construção de uma função  $f \notin C^2$

Considere  $f_2$  definida pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned}x < -2 &\Rightarrow f_2(x) = -2 \\x \in [-2, 2] &\Rightarrow f_2(x) = -x \\x > 2 &\Rightarrow f_2(x) = 2\end{aligned}$$

(a) Calcule a amplitude dos saltos de  $f_2$ .

(b) Defina

$$f_1(x) = \int_{-4}^x f_2(t) dt$$

Verifique que  $f_1$  é contínua e que

$$f_1' = f_2$$

(c) Defina

$$f(x) = \int_{-4}^x f_1(t) dt$$

Verifique que  $f$  é contínua, que sua derivada é  $f_1$ , e sua segunda derivada é a função descontínua  $f_2$ .

**Solução 11** (a) amplitude dos saltos de  $f_2$

$$f_2(-2^+) = 2; f_2(-2^-) = -2$$

então o salto no ponto  $-2$  tem amplitude  $2 - (-2) = 4$ .

$$f_2(2^+) = -2; f_2(2^-) = 2$$

então o salto no ponto  $2$  tem amplitude  $|-2 - (2)| = |-4| = 4$ . A amplitude é um número positivo, é o módulo da diferença entre os limites laterais.

(b)

$$f_1(x) = \int_{-4}^x f_2(t)dt \quad (5.56)$$

$$f_1(-2^+) = \int_{-4}^{-2^+} f_2(t)dt \quad (5.57)$$

$$f_1(-2^-) = \int_{-4}^{-2^-} f_2(t)dt \quad (5.58)$$

$$f_1(-2^+) = f_1(-2^-) \quad (5.59)$$

O valor da duas integrais

$$\int_{[a,b]} f_2(t)dt \quad \int_{(a,b)} f_2(t)dt$$

porque as somas de Riemann com que se calculam aproximações para elas são todas iguais. Um ponto retirado do domínio, não altera o valor de uma integral. O mesmo vai ocorrer no ponto  $2$  e assim  $f_1$  é uma função contínua, mas sua derivada é descontínua.

(c) Pelo raciocínio anterior,  $f$  é contínua e tem uma derivada contínua, logo é de classe  $C^1$  mas sua segunda derivada sendo descontínua,  $f \notin C^2$ .

-----  
12. Considere  $f$  definida pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} x < -2 &\Rightarrow f(x) = -2 \\ x \in [-2, 2] &\Rightarrow f(x) = -x \\ x > 2 &\Rightarrow f(x) = 2 \end{aligned}$$

e defina as duas primitivas de  $f$

$$f_1(x) = \int_{-4}^x f(t)dt$$

$$f_2(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$$

Faça os gráficos com **gnuplot** para ambas estas funções verificando que você vai ter duas curvas paralelas. Calcule a diferença  $|f_1(x) - f_2(x)|$  para um ponto arbitrário  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solução 12** As duas primitivas de  $f$

$$f_1(x) = \int_{-4}^x f(t)dt$$

$$x < -2 \Rightarrow f_1(x) = \int_{-4}^x f(t)dt = -2(x+4)$$

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow f_1(x) = \int_{-4}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^x -tdt$$

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow f_1(x) = 2f(-2) - \frac{x^2}{2} + 2 =$$

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow f_1(x) = -4 - \frac{x^2}{2} + 2 = -\frac{x^2}{2} - 2$$

$$x > 2 \Rightarrow f_1(x) = \int_{-4}^2 -2dt + \int_{-2}^2 -tdt + \int_2^x 2dt =$$

$$x > 2 \Rightarrow f_1(x) = -4 + 0 + 2(x-2) = 2x - 8$$

$$x < -2 \Rightarrow f_2(x) = \int_{-2}^x f(t)dt = -2(x+2)$$

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow f_2(x) = \int_{-2}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^x -tdt =$$

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow f_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 2 =$$

$$x > 2 \Rightarrow f_2(x) = \int_{-2}^2 -2dt + \int_{-2}^2 -tdt + \int_2^x 2dt =$$

$$x > 2 \Rightarrow f_2(x) = 0 + 0 + 2x - 4$$

Para ver o gráfico rode

`gnuplot integral.multipla.00.02.03.data`

A diferença, ponto a ponto das duas curvas é

$$|f_2(x) - f_1(x)| = f_2(x) - f_1(x) = -\int_{-4}^{-2} f(t)dt = 4$$


---



# Capítulo 6

## Somas múltiplas de Riemann

### 6.1 Integral múltipla - Solução

**Exercícios 11** *Cálculo aproximado de volume - Solução*

1. Solução Veja a figura (fig. ??) página ??, a ilustração da norma de uma partição.
2. (a) Resposta:

$$\text{Area}(\Omega) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta y_j \Delta x_i$$

- (b) Solução: A malha de retângulos, ver (fig. ??) página ?? cobre a base do prisma com retângulos. Se considerarmos os volumes dos prismas que tem cada um destes retângulos como base, teremos o número  $k\Delta x_i \Delta y_j$  para medir o volume de cada “sub-prisma”. A soma destes volumes

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k\Delta y_j \Delta x_i$$

é uma aproximação por excesso, considerando a figura (fig. ??) do volume desejado.

- (c) Solução:  
Se cobrirmos o círculo com uma malha uniforme de norma 0.1 como na figura (fig. 6.1) página 166,

A soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \Delta x_k \Delta y_j =$$

# Círculo de raio 1

coberto por

uma

malha

de

norma

0.2

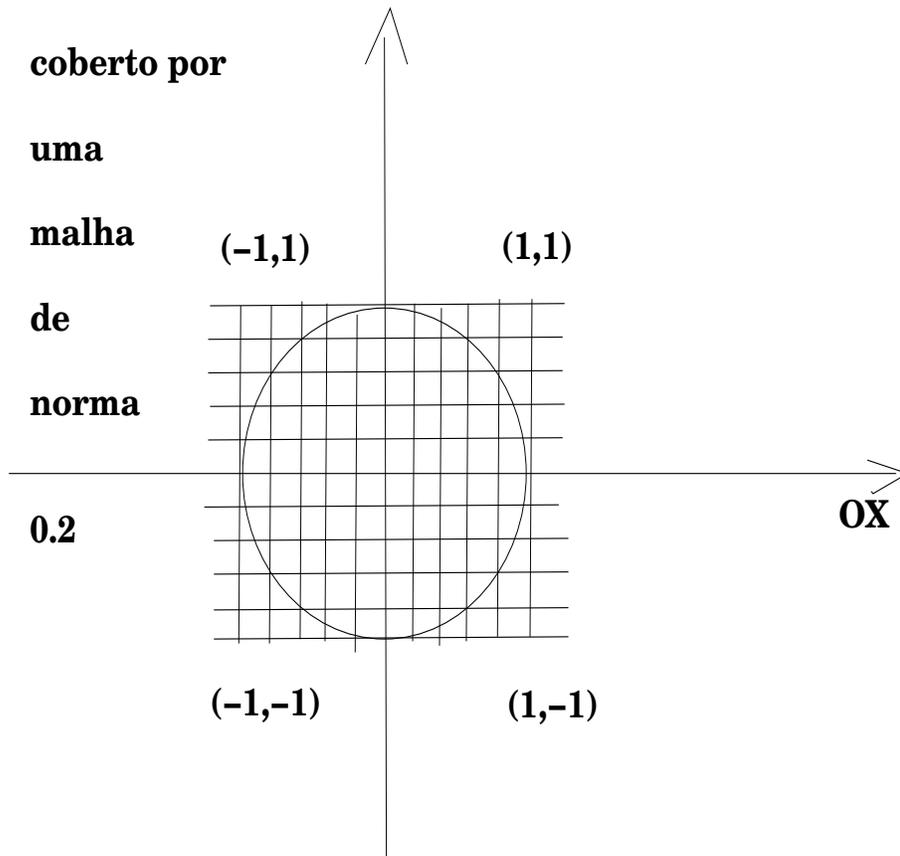


Figura 6.1: Círculo de centro na origem coberto por uma malha uniforme

$$\sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} 0.2 \times 0.2 = \sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} 0.04 = 0.04 \times 100 = 4$$

Observe que na última linha estamos somando parcelas constantes cada uma delas valendo 0.04.

Calculamos, na verdade a área do retângulo de lado 1 que contém o círculo, logo uma aproximação por excesso da área do círculo. Podemos, visivelmente, tirar alguns retângulos, 12, exatamente, melhorando a aproximação:

$$4 - 12 * 0.04 = 4 - 0.48 = 3.52$$

Ainda é visível que se pode tirar mais 12 “metades de retângulo” chegando a aproximação por excesso:

$$4 - 12 * 0.04 = 4 - 0.48 - 0.24 = 3.28$$

Com um programa de computador poderíamos algebrisar a soma de Riemann escrevendo:

$$\sum_{x_k \in \mathbb{S}^1} \sum_{y_j \in \mathbb{S}^1} \Delta x_k \Delta y_j$$

A condição  $x_k \in \mathbb{S}^1$  e  $y_j \in \mathbb{S}^1$  se traduzindo por

$$x_k^2 + y_j^2 < 1,$$

em que  $\mathbb{S}^1$  é o círculo unitário.

Um programa para fazer esta cálculo pode ser:

```
def f(x,y):
```

```
    return x**2 + y**2
```

```
#om umero de divisões.
```

```
# a,b,c,d são os extremos dos intervalos.
```

```
def area(n,a,b,c,d):
```

```
    deltax = float((b-a))/n
```

```
    deltay = float((d-c))/n
```

```
    iniciox = a
```

```
    soma # Programa acumula o valor em 'soma'
```

```
    while iniciox < b:
```

```
        inicioy = c
```

```
        while inicioy < d:
```

```
            if f(iniciox,inicioy) < 1:
```

```
                soma = soma + deltax * deltay
```

```
            inicioy = inicioy + deltay
```

```
        iniciox = iniciox + deltax
```

```
    return soma
```

```
n = input(" Numero de divisoes ")
```

```
print area(n,-1,1,-1,1)
```

O resultado, ao rodar este programa com  $n \in \{10, 50, 100, 500, 1500\}$

é:

```
delta:~/tex/calculo\}python int_dupla.py
```

```
Numero de divisoes 10
```

```
2.76
```

```
delta:~/tex/calculo\}python int_dupla.py
```

```
Numero de divisoes 50
```

```
3.112
```

```
delta:~/tex/calculo\}python int_dupla.py
```

```
Numero de divisoes 100
3.1316
tarcisio:~/tex/calculo\}python int_dupla.py
Numero de divisoes 500
3.140784
Numero de divisoes: 1500
3.14153422234
105.137173057 segundos
```

No último resultado já podemos identificar um valor bem aproximado para  $\pi$  que é o valor exato correspondente à área do círculo de raio 1. Ao fazermos o cálculo com 1500 divisões (quer dizer  $1500 \times 1500 = 2.250.000$  quadradinhos, fizemos que o programa registrasse o tempo de processamento tendo sido gasto menos de 2 minutos, numa máquina relativamente lenta, (Pentium 200), mas rodando Linux, claro.

(d) Solução:

Basta multiplicar por 3 os termos da soma de Riemann no caso anterior.

(e) Solução:

A descrição correta é: “É volume limitado pelo gráfico de  $f$  sobre a região  $\Omega$ .”.

A primeira e a segunda afirmações estão erradas porque o símbolo de integral faz referência a um valor exato e não a uma aproximação.

A quarta faz referência a uma aproximação, mas a integral representa o valor exato (que podemos ou não saber calcular. . . , é apenas um símbolo, como  $\sqrt{2}$ , que também é um símbolo representando um número “exato”).

3. Considere  $\Omega \subset [a, b] \times [c, d]$ , um retângulo com lados paralelos aos eixos  $OX, OY$ .

(a) Solução:

Se considerarmos partições uniformes dos lados do retângulo, poderemos chamar  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$   $\Delta y = \frac{d-c}{m}$  em que  $n, m$  são os números de divisões feitas na horizontal e na vertical. Ver o programa citado acima no texto e analise a figura (fig. 6.1) página 166.

O número  $\underline{a}$  em  $a + i\Delta x$  é o ponto inicial do intervalo na horizontal, e o  $\underline{c}$  em  $c + j\Delta y$  é o ponto inicial do intervalo na vertical.

A variação do índice nas somas poderia ter sido mantido a mesma, em princípio:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m c + j\Delta y \right) (a + i\Delta x)$$

(b) Solução:

A diferença entre as expressões, nesta questão, e na anterior, se devem a comutatividade do produto e propriedade distributiva do produto relativamente à soma, elas são, portanto, equivalentes.

(c) Como “somadas de Riemann são aproximações de integrais”, qual, das integrais seguintes,

$$a) \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \quad b) \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \quad c) \int_c^d \int_a^b dx dy \quad d) \int_a^b \int_c^d dy dx$$

corresponde a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a + k\Delta x \right) (b + j\Delta y)$$

Solução:

É a integral do item (c). Porque, as duas primeiras contem uma altura variável  $f(x,y)$  portanto ficam descartadas. Nos dois últimos casos, a ordem em que aparecem os diferenciais indicam a ordem de integração. Mais exatamente, o item (c) significa:

$$\int_c^d \int_a^b dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b dx \right) dy$$

querendo dizer que primeiro calculamos a integral “relativamente” a  $x$  e depois “relativamente” a  $y$  que é o que está expresso na soma de Riemann. No (d) a ordem das somas se encontra invertida. Fica portanto o item (c) como a alternativa correta (e única possível).

Você verá em algum momento que isto não é verdadeiro, porque

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$$

e que a ordem de integração não altera o resultado. Aliás isto é consequência de que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta x_i \Delta y_j &= \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta y_j \Delta x_i & \end{aligned}$$

pelas propriedades comutativa do produto e distributiva do produto relativamente à soma, como já vimos anteriormente.

(d) Solução:

É o item (d) porque os dois primeiros itens se referem a uma qualificação no tipo de aproximação, que não podemos fazer a priori. O item (c) se refere a um valor exato, não é o caso. Tudo que podemos dizer da “soma de Riemann” é que ela é uma aproximação do volume.

(e) Solução:

É o volume do rombo cuja base é o retângulo  $[a, b] \times [c, d]$  obtido do prisma com esta mesma base mas cortado pela superfície  $z = f(x, y)$ . Veja no vocabulário que estamos usando a palavra “rombo” com um sentido generalizado, aliás, como também o estamos fazendo com a palavra “prisma”.

4. Calcule, aproximadamente, os volumes abaixo indicados e tente um esboço gráfico dos mesmos.

•  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 dy dx$

Solução:

A soma de Riemann uniforme que aproxima esta integral é:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 dy dx &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (x_i^2 + y_j^2) \Delta x \Delta y = \\ &= \sum_{i=0}^n \Delta x \sum_{j=0}^n (x_i^2 + y_j^2) \Delta y \end{aligned}$$

Podemos identificar na última linha uma integral, observe que no segundo somatório,  $x_i$  é uma “constante”, veja como isto fica na conversão da “soma de Riemann” em integral:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^n \Delta x \sum_{j=0}^n (x_i^2 + y_j^2) \Delta y \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^n \Delta x \int_0^1 (x_i^2 + y^2) dy = \sum_{i=0}^n \Delta x (x_i^2 y + \frac{y^3}{3}) \Big|_0^1 = \\ &= \sum_{i=0}^n \Delta x (x_i^2 + \frac{1}{3}) = \sum_{i=0}^n (x_i^2 + \frac{1}{3}) \Delta x \end{aligned}$$

Novamente podemos identificar nova integral na soma de Riemann da última linha o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^n (x_i^2 + \frac{1}{3}) \Delta x = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3}) dx = \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Interpretação Geométrica

A função cuja integral calculamos é positiva se anulando num único ponto,  $(0,0)$ . É um parabolóide. O volume calculado é menor do que uma pirâmide de base quadrada  $[0,1] \times [0,1]$  e altura 1, (porque ?) e este volume vale  $\frac{4}{3} \times \text{área da base} = \frac{4}{3}$ .

A seguinte função, em Python, calcula esta integral aproximadamente:

```
## soma de Riemann dupla sobre um retangulo
def int_dupla(n,a,b,c,d):
    deltax = float((b-a))/n
    deltay = float((d-c))/n
    iniciox = a
    soma = 0
    while iniciox < b:
        inicioy = c
        while inicioy < d:
            soma = soma + f(iniciox,inicioy)
            inicioy = inicioy + deltay
        iniciox = iniciox + deltax
    return soma*deltax*deltay
n = input("Numero de divisoes: ")
print int_dupla(n,0,1,0,1)
```

Rodando este programa, temos:

```
Numero de divisoes: 1000
0.665667
```

Observe que o método das somas de Riemann nos levou ao cálculo de uma integral dupla por sucessivas integrais simples. É preciso ter cuidado que há alterações a serem feitas no método até que o possamos usar livremente. Este método vale, mas com alterações, quando o domínio de integração não for retangular. Entretanto, quando a integral for calculada sobre um domínio retangular,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$

permitindo que calculemos uma integral múltipla por iteração de integrais simples, como é o caso das que se encontram abaixo.

Podemos livremente reutilizar as contas acima.

- $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dy dx$      Solução:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xydydx = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 xydy =$$

$$\int_{-1}^1 dx x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 = 0$$

Usando o programa acima, com  $f(x, y) = xy$  temos:

- Número de divisões 1000 Valor da integral: 3.9999999999e-06 Observe que o resultado do programa significa:

$$3.9999999999e - 06 = 0.0000039999999999$$

um número bem próximo de zero. O programa não conseguiu encontrar zero, que nós conseguimos com integração formal. É preciso, portanto, mais do que saber usar programas, saber interpretar corretamente o resultado obtido. Tempo de cálculo: 0.007248660326 segundos

- Número de divisões: 10000 Valor da integral: 0.0 Tempo de calculo: 0.7248660326 segundos

•  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 x^2 + y^2 dx dy$  Solução:

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 x^2 + y^2 dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-1}^0 x^2 + y^2 dx = \int_{-1}^0 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_{-1}^0 =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{-1}{3} - y^2\right) dy = \left(\frac{-1}{3} y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^0 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Não precisamos fazer nenhum experimento numérico para concluir que o resultado está correto, a interpretação geométrica nos ajuda a decidir. A função na integral,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , é um parabolóide de revolução, logo simétrica em torno da origem.

O domínio de integração é simétrico ao que usamos no cálculo anterior. Assim

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 x^2 + y^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 dx dy$$

que já calculamos anteriormente.

•  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 xy dx dy$  Solução:

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 xy \, dy \, dx = \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^0 xy \, dy =$$

$$\int_{-1}^0 dx \left. x \left( \frac{y^2}{2} \right) \right|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 dx \, x \left( -\frac{1}{2} \right) = - \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx = - \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4} = 0.25$$

Rodando o programa em Python vamos encontrar

```
n = input('Numero de divisoes: ')
print int_dupla(n,-1,0,-1,0)
```

```
Numero de divisoes: 500
0.251001
```

### 5. Cálculo iterativo das integrais múltiplas

(a) Deduza, de uma questão anterior (cite a questão), que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

e que, conseqüentemente, podemos calcular

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b (F(x, d) - F(x, c)) dx = \mathcal{F} \Big|_a^b$$

Solução:

A integral  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$  representa o volume limitado pelo gráfico de  $f$  sobre o domínio retangular  $[a, b] \times [c, d]$  e já vimos que neste caso se tem a igualdade entre as integrais duplas alternando os intervalos de integração. Frequentemente se escreve

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

querendo, como isto, significar que podemos primeiro calcular a integral de  $f$  relativamente a  $y$ , usando o Teorema Fundamental do Cálculo e escrevendo  $F(x, d)$  para representar uma primitiva de  $f$  e  $F(x, c)$  para representar uma outra primitiva relativamente às condições de fronteira  $y = c, y = d$ .

Feito isto temos agora duas funções (uma diferença de funções) que dependem exclusivamente de  $x$  nos levando, definitivamente, de volta ao cálculo univariado e à busca de uma primitiva de  $F(x, d), F(x, c)$  relativamente à variável  $x$  que é o que se encontra expresso no último termo da igualdade.

- (b) Use o método iterativo descrito no item anterior para calcular as integrais

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 dy dx \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dy dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 + y^2 dx dy \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dx dy$$

Solução:

## 6.2 O caso da fronteira curva

**Exercícios 12** Domínios de integração com fronteira curva

1. Escreva uma soma de Riemann para calcular aproximadamente

$$\int \int_{\Omega} xy dx dy$$

sendo  $\Omega$  o círculo unitário de centro na origem.

Solução: Vamos usar a expressão  $f(x, y)$

$$f(x, y) = xy$$

para tornar a escrita mais fácil, (e na verdade aproveitar as contas feitas acima).

Podemos calcular esta integral, usando a expressão que usamos anteriormente, para o cálculo da área do círculo, agora modificando incluindo o valor  $f(x_k, y_j)$  porque agora a altura dos prismas é variável e dada por  $f$ :

$$\sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} f(x_k, y_j) \Delta x_k \Delta y_j$$

Entretanto estamos integrando sobre o retângulo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  e não sobre o círculo. Ao melhorarmos a aproximação, no caso da área do círculo, “omitimos” sub-quadrados. O ideal era que começássemos a calcular sobre a fronteira “inferior” do círculo e terminássemos na fronteira superior. Veja a figura (fig. 6.2) página 175, começamos a contar os sub-retângulos desde a fronteira inferior e até a fronteira superior.

Num programa de computador é mais fácil excluir o que não interessa colocando um “if” para selecionar quando se aceita a contagem:

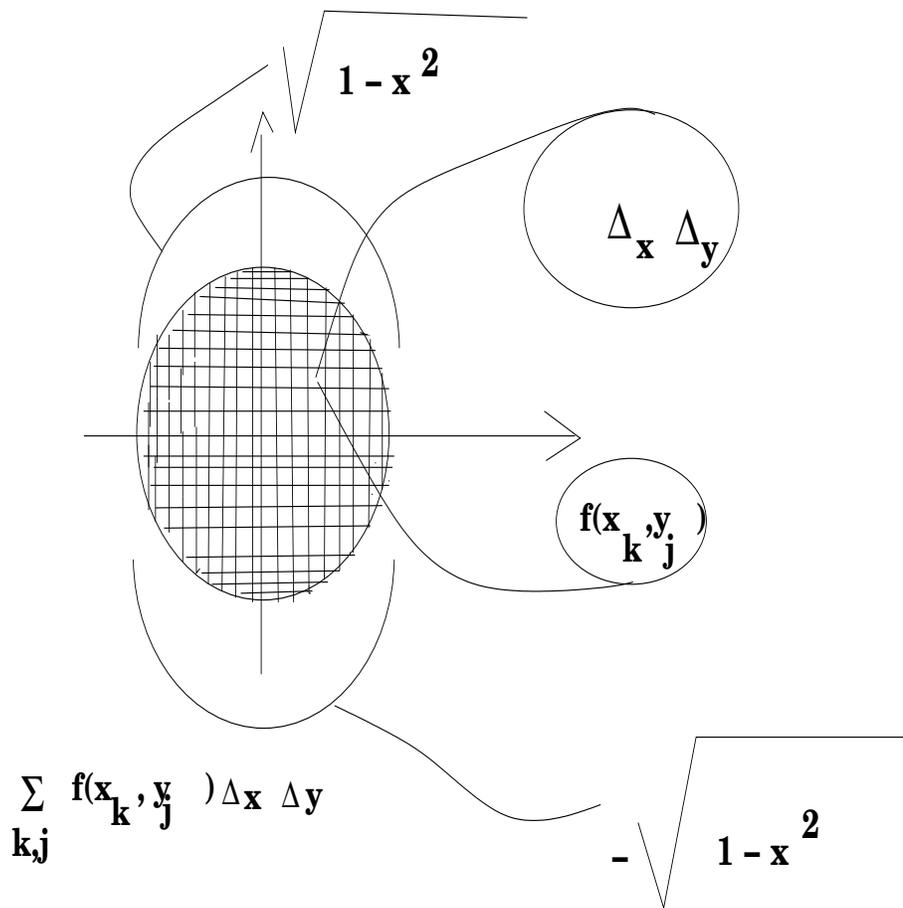


Figura 6.2: O círculo como domínio de integração.

```

if x2 + y2 < 1:
    soma = soma + f(x, y)
y = y + delta

```

*Este pedaço de código está percorrendo o círculo no sentido do eixo OY o programa todo ficaria assim:*

```

## soma de Riemann dupla sobre um círculo de centro na origem
def int_dupla(n):
    delta = float((2))/n
    x = -1
    soma = 0 # inicia o valor de soma

```

```

while x < 1:
    y = -1 # y começa novamente
    while y < 1:
        if x * *2 + y * *2 < 1:
            # acumula em soma apenas dentro do círculo
            soma = soma + f(x,y)
            y = y + delta # atualiza o valor de y
        x = x + delta # atualiza x fora do loop interno
    return soma*delta*delta

```

Na última linha do programa a valor acumulado em soma é multiplicado por  $\text{delta} * \text{delta}$  o que equivale a dizer que usamos a distributividade no somatório, primeiro somamos todas as parcelas, depois multiplicamos a soma por  $\Delta x^2$ .

Entretanto nós sabemos fazer melhor do que os programas de computador... Vamos traduzir a soma dupla de Riemann contida neste programa. Vamos fazer isto passo a passo numa sucessão de equações:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x_k=-1}^1 \sum_{(x_k, y_j) \in \mathbb{S}^1} f(x_k, y_j) \Delta x_k \Delta y_j \\
 & \sum_{x_k=-1}^1 \sum_{y_j = \text{fronteira inferior de } \mathbb{S}^1}^{y_j = \text{fronteira superior de } \mathbb{S}^1} f(x_k, y_j) \Delta x_k \Delta y_j \\
 & \sum_{x_k=-1}^1 \Delta x_k \sum_{y_j = \text{fronteira inferior de } \mathbb{S}^1}^{y_j = \text{fronteira superior de } \mathbb{S}^1} f(x_k, y_j) \Delta y_j \\
 & \sum_{x_k=-1}^1 \Delta x_k \sum_{y_j = -\sqrt{1-x_k^2}}^{y_j = \sqrt{1-x_k^2}} f(x_k, y_j) \Delta y_j
 \end{aligned}$$

Quer dizer que somamos sobre todos os valores possíveis de  $x_k$ , sem restrição, mas, com  $y$  nos limitamos a ir de

$$-\sqrt{1-x_k^2} \text{ até } \sqrt{1-x_k^2}$$

que são as duas equações dos semi-círculos inferior e superior que limitam o disco unitário. Observe o desenho na figura (fig. 6.2) página 175 em que os dois semi-círculos se encontram destacados.

Na última linha podemos ver uma “soma de Riemann” simples, correspondente a integral

$$\sum_{y_j = -\sqrt{1-x_k^2}}^{y_j = \sqrt{1-x_k^2}} f(x_k, y_j) \Delta y_j \approx \int_{-\sqrt{1-x_k^2}}^{\sqrt{1-x_k^2}} f(x_k, y) dy$$

que vamos logo calcular:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-x_k^2}}^{\sqrt{1-x_k^2}} f(x_k, y) dy &= \int_{-\sqrt{1-x_k^2}}^{\sqrt{1-x_k^2}} x_k y dy = x_k \int_{-\sqrt{1-x_k^2}}^{\sqrt{1-x_k^2}} y dy = \\ &= x_k \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{1-x_k^2}}^{\sqrt{1-x_k^2}} = x_k \left( \frac{1-x_k^2}{2} - \frac{1-x_k^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

e concluindo

$$\int_{\Omega} xy dx dy = 0$$

em que  $\Omega$  é o disco unitário. Resultado que era de esperar porque

$$f(x, y) = xy$$

troca de sinal em cada quadrante sendo positiva em dois quadrantes e negativa em dois outros.

2. Escreva a soma de Riemann (dupla) uniforme que representa a integral

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

supondo que a região  $\Omega$  é limitada inferiormente pela função  $y = g_1(x)$  e superiormente pela função  $y = g_2(x)$ .

Solução: É semelhante ao exercício acima, a soma de Riemann uniforme (quando as subdivisões são todas iguais) quer dizer:

$$\Omega \subset [a, b] \times [c, d]; \Delta x = \frac{b-a}{n}; \Delta y = \frac{c-d}{n}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} &\sum_{x_k=a}^b \sum_{(x_k, y_j) \in \Omega} f(x_k, y_j) \Delta x_k \Delta y_j \\ &\sum_{x_k=a}^b \sum_{y_j = \text{fronteira inferior de } \Omega}^{y_j = \text{fronteira superior de } \Omega} f(x_k, y_j) \Delta x_k \Delta y_j \\ &\sum_{x_k=a}^b \Delta x_k \sum_{y_j = g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y_j) \Delta y_j \end{aligned}$$

e podemos identificar uma soma de Riemann que aproxima uma integral na última linha:

$$\sum_{y_j=g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y_j) \Delta y_j \approx \int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y) dy =$$

$$F(x_k, y) \Big|_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} = F(x_k, g_2(x_k)) - F(x_k, g_1(x_k))$$

em que  $F$  é uma primitiva de  $f$  relativamente à “variável”  $y$ , ou, em outras palavras, considerando  $x_k$  constante.

Substituindo este resultado na última linha da seqüência anterior de equações, temos:

$$\sum_{x_k=a}^b (F(x_k, g_2(x_k)) - F(x_k, g_1(x_k))) \Delta x_k \approx$$

$$\int_a^b (F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x))) dx$$

que é uma integral simples relativamente a única variável  $x$  que se soubermos calcular, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, vai nos dar o valor do volume

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

3. Considere  $\Omega$  a região do plano delimitada pelo círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

e calcule

$$\iint_{\Omega} y dx dy$$

Solução: Como a fronteira de  $\Omega$  é um círculo, podemos explicitar as duas funções que limitam superior e inferiormente a região:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow$$

$$y - 1 = \pm \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$g_1(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}; \quad g_2(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$$

Então

$$I = \iint_{\Omega} y dx dy = \int_{-1}^1 \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y dx dy$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y dy = \int_{-1}^1 dx \frac{y^2}{2} \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)}$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \frac{g_2(x)^2 - g_1(x)^2}{2} = \int_{-1}^1 \frac{g_2(x)^2 - g_1(x)^2}{2} dx$$

$$g_2(x)^2 - g_1(x)^2 = 4\sqrt{1-x^2}$$

$$I = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Podemos fazer uma mudança de variável na integral

$$J = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

considerando

$$x = \cos(t) \Rightarrow dx = -\text{sen}(t) dt$$

$$-1 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right); 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \text{sen}(t); dx = -\text{sen}(t) dt$$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\text{sen}^2(t) dt$$

$$J = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) dt$$

$$Q = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$$

$$J + Q = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) + \text{sen}^2(t) dt$$

$$J + Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \pi \quad J = \frac{\pi}{2} = \int_{\Omega} \int y dx dy$$

4. Calcule o volume de uma esfera de raio 1.

*Solução:* Como todas as esferas de raio 1 tem o mesmo volume, vamos considerar aquela de centro na origem. Um método para este cálculo, consiste em subtrair dois volumes:

$$\int_{\Omega} \int (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy$$

em que  $f_1, f_2$  são as duas fronteiras, a inferior e a superior da esfera, e  $\Omega$  é o domínio comum, o disco unitário centrado na origem.

O disco unitário é limitado por duas curvas  $g_1, g_2$  de equações:

$$g_1(x) = -\sqrt{1-x^2}, g_2(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

As duas fronteiras  $f_1, f_2$  superior e inferior da esfera tem por equações:

$$f_1(x, y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}, f_2(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

e assim temos:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{g_1}^{g_2} (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy \\ V &= \int_{-1}^1 \int_{g_1}^{g_2} (\sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\ V &= \int_{-1}^1 \int_{g_1}^{g_2} 2\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ V &= 2 \int_{-1}^1 \int_{g_1}^{g_2} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ V &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{g_1}^{g_2} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \\ V &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{g_1}^{g_2} \sqrt{g_2^2(x) - y^2} dy = 2 \int_{-1}^1 I(x) dx \end{aligned}$$

Na última linha temos a integral na qual podemos fazer algumas simplificações que nos vão ajudar no cálculo. Por exemplo, para todo  $x$ ,  $g_1(x) = -g_2(x)$ . E como  $x$  é constante, nós podemos escrever

$$I(x) = \int_{-g_2}^{g_2} \sqrt{g_2^2(x) - y^2} dy = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy.$$

Agora podemos aplicar os itens 28 e 30 da tabela de integrais de Hughes-Hallet

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} dy) \Big|_{-a}^a \\ I &= 0 + a^2 \arcsin(1) = a^2 \frac{\pi}{2} \\ I(x) &= \frac{\pi}{2} g_2^2(x) \end{aligned}$$

Podemos calcular a integral externa:

$$V = 2 \int_{-1}^1 (x) dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} g_2^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 g_2^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$$

$$V = \pi(x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-1}^1 = 2\pi(1 - \frac{1}{3}) = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

e podemos ver o resultado esperado, o volume da esfera de raio  $r$  é

$$\frac{4\pi r^3}{3}$$

aqui  $r = 1$ .

5. Calcule o volume de uma esfera de raio  $r$      Resposta:  $\frac{4\pi r^3}{3}$

Abaixo alguns exemplos do cálculo do volume da esfera usando o programa apresentado neste texto em outro lugar.

**Exemplo 34**     • Número de divisões: 100     valor da integral: 4.18523276903  
Tempo de cálculo: 0.502177000046 segundos

- Número de divisões: 1000     valor da integral: 4.18868946737     Tempo de cálculo: 49.3769460917 segundos
- Número de divisões: 2000     valor da integral: 4.18875585914     Tempo de cálculo: 196.770419002 segundos

6. Cálculo do volume de uma pirâmide ortogonal, de altura  $r$  tendo base o retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ .     Solução:

Seja  $P$  a pirâmide em consideração.

Queremos calcular

$$Vol(P) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

em que  $f(x, y)$  é a função que descreve o teto da pirâmide.

Por “pirâmide ortogonal” se entende aquela que tem uma das arestas perpendicular à base. Quer dizer que  $P$  tem quatro faces, uma é um retângulo, a base, uma das faces é perpendicular à base, e duas faces que se encontram sobre uma das diagonais do cubo que teria o retângulo  $[a, b] \times [c, d]$  por base e de altura  $r$ .

Acompanhe o raciocínio com um desenho.

Não há nenhuma particularização do resultado se trasladarmos a pirâmide de modo que o vértice sobre o qual a altura cai verticalmente coincida com a origem, quer dizer:

$$A = b - a ; B = d - c ; Q = [0, A] \times [0, B]$$

$P' =$  Pirâmide ortogonal de base  $Q$

$$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(P')$$

e nós vamos calcular  $\text{Vol}(P')$ .

Lembrando, a equação de um plano  $\pi$  é

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) ; (a, b, c) \in \pi$$

e no presente caso temos dois planos passando pelo ponto  $(0, 0, r)$  cujas equações vão representar as duas funções

$$z = f_1(x, y) ; z = f_2(x, y)$$

que formam o tampo da pirâmide. Também vale a pena lembrar que

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} ; B = \frac{\partial f}{\partial y}$$

os coeficientes angulares parciais do plano nas direções dos eixos.

As equações:

$$f_1(x, y) = r + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x - 0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - 0)$$

$$f_1(x, y) = r - \frac{r}{A}x$$

$$f_2(x, y) = r + \frac{\partial f_2}{\partial x}x + \frac{\partial f_2}{\partial y}y$$

$$f_2(x, y) = r - \frac{r}{B}y$$

$$\text{porque } \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\text{Vol}(P') = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_0^A \int_0^{\frac{B}{A}x} f_1(x, y) dx dy + \int_0^A \int_{\frac{B}{A}x}^B f_2(x, y) dx dy$$

Acompanhe com um desenho. O domínio de integração é o retângulo

$$[0, A] \times [0, B]$$

divido ao meio pela reta de equação  $y = \frac{B}{A}x$  portanto as duas integrais tem esta reta como limite superior ou inferior, como aparece na última equação acima.

Vamos calcular cada uma destas integrais separadamente:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^A \int_0^{\frac{B}{A}x} f_1(x, y) dy dx = \\
 &= \int_0^A dx \int_0^{\frac{B}{A}x} (r - \frac{r}{A}x) dy = \int_0^A dx (ry - \frac{r}{A}xy) \Big|_0^{\frac{B}{A}x} = \\
 &= \int_0^A dx (r\frac{B}{A}x - \frac{r}{A}x\frac{B}{A}x) = \int_0^A (\frac{rBx}{A} - \frac{rBx^2}{A^2}) dx = \\
 &= \frac{rBx^2}{2A} - \frac{rBx^3}{3A^2} \Big|_0^A = \frac{rBA}{2} - \frac{rBA}{3} = \frac{rBA}{6}
 \end{aligned}$$

Se invertermos a ordem de integração, a segunda integral ficará mais fácil de ser calculada. Analise, no desenho que você deve ter feito, a mudança nos limites de integração. A seqüência de equações é:

$$\begin{aligned}
 \int_0^A \int_{\frac{B}{A}x}^B f_2(x, y) dy dx &= \int_0^B \int_0^{\frac{A}{B}y} f_2(x, y) dx dy = \\
 &= \int_0^B dy \int_0^{\frac{A}{B}y} r - \frac{r}{B}y dx = \int_0^B dy (rx - \frac{r}{B}xy) \Big|_0^{\frac{A}{B}y} = \\
 &= \int_0^B (r\frac{A}{B}y - \frac{rA}{B^2}y^2) dy \\
 &= r\frac{A}{2B}y^2 - \frac{rA}{3B^2}y^3 \Big|_0^B = r\frac{A}{2B}B^2 - \frac{rA}{3B^2}B^3 = \frac{rAB}{2} - \frac{rAB}{3} = \frac{rAB}{6}
 \end{aligned}$$

Soma os resultados das duas integrais temos:

$$Vol(P') = Vol(P) = 2\frac{rAB}{6} = \frac{rAB}{3}$$

que é o resultado conhecido:

O volume da pirâmide é  $\frac{1}{3}$  área da base vezes a altura.

**Observação 26** Volume da pirâmide e o volume da esfera Há uma “coincidência” que iremos explorar na próxima lista de exercícios. Começemos por discutir a “coisa” desde uma experiência simples.

Lembre-se daqueles suportes feitos de tiras circulares para colocarmos panelas quentes à mesa. Se cortarmos um desses suportes radialmente (ao

longo do raio), o resultado será um triângulo, e podemos assim calcular a área do círculo, experimentalmente: “base vezes altura dividido por dois”:

$$\text{Area}(S^1) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$

Isto é, a área de um círculo se calcula usando a fórmula para o cálculo da área de triângulo.

Se tentarmos fazer o mesmo com uma esfera a “coisa” fica um tanto mais complicada, e é normal. Os teoremas assumem aspectos “aparentemente estranhos” quando subimos a dimensão. É preciso nos acostumarmos com novas situações em dimensão maior...

Mas tentando, se tentarmos abrir a esfera, a semelhança do que fizemos com o círculo, vamos encontrar quatro “coisas” que se parecem com pirâmides (quem já abriu uma melância ?) então o volume da esfera é o volume de quatro pirâmides:

$$\text{Vol}(S^2) = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}(4\pi r^2)r.$$

A sugestão que temos é que a área da superfície da esfera de raio  $r$  é

$$\text{Area}(S^2) = 4\pi r^2$$

que vai ser assunto de próxima lista: área de superfícies, quando tiremos esta hipótese a limpo: será que

uma esfera está para quatro pirâmides, assim como um círculo está para quatro triângulos ?

## 7. O caso de um açude

Este é um caso típico de em que a fronteira não é formada por segmentos de reta e nem conhecemos uma fórmula algébrica para as curvas envolvidas. A saída é calcular usando somas de Riemann.

### (a) Área do espelho d’água

**Solução 13** O espelho do açude é uma região  $\Omega$  do plano cuja área queremos calcular. Ver a figura (fig. ??) página ?? que você pode perfeitamente tomar pelo espelho de um açude visto numa foto aérea. Uma boa foto aérea produziria uma figura em escala cuja área poderia ser calculada por contagem de retângulos num papel milimetrado. Isto é “soma de Riemann”.

Se uma foto aérea for difícil, um passeio à volta da margem permitiria fazer marcas uniformemente espaçadas e depois com duas linhas,

uma fixa entre duas marcas em margens opostas, e outra estendida paralelamente, se poderia medir as distâncias entre estes pontos opostos para calcular a área entre as duas linhas e assim calcular a área total do espelho. Isto também é “soma de Riemann”.

Veja a solução do volume, o uso de um barco.

(b) O caso do volume

**Solução 14** Tudo que tem de ser feito é colocar a bordo de um barco um sonar acoplado num computador para determinar a profundidade do lago sobre os nós de um malha. O barco teria que “varrer” a superfície do lago preso a um cabo esticado entre dois pontos nas margens opostas. O sinal do sonar vai fornecer a profundidade do lago nos nós da malha que assim se estabelecer. E o computador irá logo fazendo a soma. Terminado o passeio sobre o lago se terá imediatamente o volume calculado. O mesmo programa, substituindo o valor fornecido pelo sonar por 1 produz a área do espelho.

A escala registrada em uma das paredes da barragem, determina um fatiamento do “sólido” formado pela água. Uma forma precisa da determinação do volume d’água associado a cada um destes níveis soemnte poderia ser feito quando este nível fosse atingido. Uma aproximação grosseira poderia ser feita considerando o prisma de base  $\Omega$ , o espelho do lago, cuja área foi calculada no item anterior, para assim calcular o volume de cada uma das fatias.

8. Calcule o volume limitado

- pelo plano  $XOY$ ,
- pelo semi-plano  $XOZ$  ;  $x \geq 0$
- e pela superfície gerada pelo segmento

$$AB ; A = (at \cos(t), at \sin(t), 0) ; B = (0, 0, at) \\ t \in [0, 2\pi]$$

**Solução 15** Suponhamos que seja possível encontrar a expressão  $z = F(x, y)$  da superfície gerada pelo movimento do segmento  $AB$ . Nesta caso as integrais a serem calculadas seriam:

$$I_1 = \int_0^{t_0} \int_{y_0}^{y_1} F(x, y) dx dy \\ I_2 = \int_0^{t_1} \int_{y_2}^{y_3} F(x, y) dx dy \\ I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{y_4}^0 F(x, y) dx dy$$

- $I_1$  no primeiro quadrante, sendo  $t_0$  o ponto em que derivada da curva (at  $\cos(t)$ , at  $\sin(t)$ ) for um vetor paralelo ao eixo  $OY$  (equação nada fácil de resolver), e  $y_0(t), y_1(t)$  as duas curvas que limitam acima e abaixo a região  $\Omega$  do plano onde a integral está sendo calculada;
- $I_2$  nos quadrantes dois e tres, sendo  $t_1$  o ponto em que derivada da curva (at  $\cos(t)$ , at  $\sin(t)$ ) for um vetor paralelo ao eixo  $OY$  (equação nada fácil de resolver) e  $y_2(t), y_3(t)$  as duas curvas que limitam acima e abaixo a região  $\Omega$  do plano onde a integral está sendo calculada;
- $I_3$  no quarto quadrante, sendo  $y_4(t)$  a curva que limita inferiormente a região  $\Omega$  do plano onde a integral está sendo calculada;

Entretanto este método supõe que poderíamos encontrar facilmente a equação  $z = F(x, y)$  o que não é verdade, fora as duas equações trigonométricas que teríamos que resolver. Vamos aproveitar a expressão acima como suporte para uma mudança de variável e encontrar outro meio para calcular a integral sem que tenhamos de encontrar a expressão de  $F(x, y)$ .

Para isto vamos parametrizar a superfície.

Um ponto qualquer sobre  $z = F(x, y)$  é dado pela média aritmética ponderada, usando os pesos  $r, r - 1$ ;  $r \in [0, 1]$  dos pontos extremos do intervalo  $AB$ .

$$\gamma(r, t) = (at \cos(t), at \sin(t), (1 - r)at) = (x(t), y(t), z(t))$$

e podemos escrever os vetores derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= (at \cos(t), at \sin(t), -at) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= (-at \sin(t), at \cos(t), 0) \\ \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y) dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} z(x, y) dx dy = \int_{\alpha'}^{\beta'} z(r, t) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} dr dt \end{aligned}$$

A melhor forma de entender o que significa “ $dx dy$ ”, isto é uma teoria, a teoria das formas diferenciáveis, é considerando este produto como um produto exterior em que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial r} dr \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial r} dr \\ dx dy &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} \\ dx dy &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial t} dr dt \end{aligned}$$

O determinante calculado na última linha é  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)}$  que representa o coeficiente de deformação na mudança de variável.

O determinante

$$\det(J(T)) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)}$$

é o determinante da matriz de mudança de variáveis.

Calculando a integral temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z(r, t)(a^2 t^2 r \cos^2(t) + a^2 t^2 r \sin^2(t)) dr dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)at(a^2 t^2 r \cos^2(t) + a^2 t^2 r \sin^2(t)) dr dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)at(2a^2 t^2 r) dr dt = 2a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)(t^3 r) dr dt = 2a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2)t^3 dr dt \\ &= 2a^3 \int_0^{2\pi} t^3 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right) \Big|_0^1 dt = 2a^3 \int_0^{2\pi} t^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) dt = \frac{2a^3}{6} \int_0^{2\pi} t^3 dt = \frac{a^3}{3} \frac{t^4}{4} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^3}{12} t^4 \Big|_0^{2\pi} = \frac{16a^3}{12} \pi^4 = \frac{4a^3}{3} \pi^4 \end{aligned}$$

---

9. Calcule o volume da esfera de raio  $r$  do  $\mathbb{R}^4$ .

**Solução 16** O volume procurado é dado pela integral múltipla

$$\int_D dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

em que  $D$  é a esfera do  $\mathbb{R}^3$ .

A ideia é semelhante ao do cálculo de uma área de uma região  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^2$  que é pela integral

$$\int_{\Omega} dx dy.$$

O cálculo eventualmente fica mais simples se mudarmos as coordenadas (passar para coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \\ x_2 &= \rho \sin(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \\ x_3 &= \rho \sin(t_2) \cos(t_3) \\ x_4 &= \rho \sin(t_3) \end{aligned}$$

A jacobiana desta transformação

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(t_1, t_2, t_3), r}$$

é

$$\begin{pmatrix} -\rho \sin(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) & -\rho \cos(t_1) \sin(t_2) \cos(t_3) & -\rho \cos(t_1) \cos(t_2) \sin(t_3) & \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \\ \rho \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) & -\rho \sin(t_1) \sin(t_2) \cos(t_3) & -\rho \sin(t_1) \cos(t_2) \sin(t_3) & \sin(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \\ 0 & \rho \cos(t_2) \cos(t_3) & -\rho \sin(t_2) \sin(t_3) & \sin(t_2) \cos(t_3) \\ 0 & 0 & \rho \cos(t_3) & \sin(t_3) \end{pmatrix}$$

Usando MuPAD para calcular o determinante desta matriz temos

$$f(\rho, t_1, t_2, t_3) = -\rho^3 \left( \frac{\cos(t_2)}{2} + \frac{\cos(t_2 - 2t_3)}{4} + \frac{\cos(t_2 + 2t_3)}{4} \right)$$

A integral relativamente a  $\rho$  no intervalo  $[0, r]$  nos dá

$$f_1(t_1, t_2, t_3) = \frac{-r^4}{4} \left( \frac{\cos(t_2)}{2} + \frac{\cos(t_2 - 2t_3)}{4} + \frac{\cos(t_2 + 2t_3)}{4} \right)$$

A integral desta função relativamente à  $t_3$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  nos dá, ainda usando MuPAD,

$$f_2(t_2) = 0.25\pi \cos(t_2) - 0.125 \sin(t_2 - \pi) + 0.125 \sin(\pi + t_2)$$

e ainda usando MuPAD para calcular a integral da função acima, no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(t) dt = \frac{\pi}{4}$$

portanto o valor da integral, o volume de  $\mathbf{S}^3$ , é

$$8 \frac{r^4 \pi}{16} = \frac{\pi r^4}{2}$$

Hocqenghem e Jaffard, em *Mathématiques Tome II*, encontraram o valor

$$\frac{\pi^2 r^4}{2}$$

que deixamos para o leitor analisar e decidir qual o valor correto.

---

# Capítulo 7

## A integral de linha

### 7.1 Integral de linha

**Exercícios 13** *Integral sobre curvas.*

1. Considere uma curva  $\gamma$  parametrizada sobre o intervalo  $[a, b]$

$$[a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) = \gamma(t) \in \mathbb{R}^2.$$

Escreva uma soma de Riemann para  $\gamma$  e dê uma interpretação ao resultado: “a possível integral de quem esta soma de Riemann é uma aproximação”.

**Solução 17** Para escrever uma soma de Riemann para  $\gamma$  temos que fazer uma partição do intervalo  $[a, b]$  o que resulta em

$$\begin{aligned} \{a = t_0, \dots, t_k, \dots, t_n = b\} &\subset [a, b] \\ \Delta t_k &= t_k - t_{k-1} \\ \sum_{k=0}^{n-1} (x(t_k), y(t_k)) \Delta t_k \end{aligned}$$

Como  $(x(t_k), y(t_k))$  são vetores do plano, então esta soma representa uma soma de vetores, portanto, um vetor do plano. Como qualquer soma de Riemann será um vetor do plano, se a integral existir ela também representa um vetor do plano.

- 
2. Interpretação da integral

(a) Integral de linha Calcule as integrais  $\int_a^b \gamma(t) dt$  com os dados abaixo:

$\gamma(t)$	$[a, b]$
a) $(\cos(t), \text{sen}(t))$	$[0, \pi]$
b) $(\cos(2t), \text{sen}(2t))$	$[0, \pi]$
c) $(\cos(3t), \text{sen}(3t))$	$[0, \pi]$
d) $(\cos(4t), \text{sen}(4t))$	$[0, \pi]$

(b) Algumas das integrais acima são nulas, procure uma interpretação de porque umas são nulas e outras não.

3. Qual das seguintes interpretações é a adequada para a integral

$$\int_a^b (x(t), y(t)) dt$$

- É a distância percorrida por uma partícula ao longo da curva  $\gamma$ .
- É a curva velocidade de uma partícula.
- É um vetor.
- É o trabalho da força  $((x(t), y(t)))$  ao longo do intervalo  $[a, b]$

4. A integral

$$\int_a^b (x(t), y(t)) dt$$

é o vetor posição médio de uma partícula que percorreu a trajetória  $\gamma$  se  $m([a, b]) = 1$ . Justifique. Sugestão, escreva uma soma de Riemann.

5. Comprimento de arco

(a) Desenhe um arco de curva

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

e verifique que há uma associação entre qualquer poligonal obtida por uma seleção de pontos sobre  $\gamma$  e uma partição do intervalo  $[a, b]$ . Ver figura (fig. 7.1) página 191.

- (b) Use uma partição de  $[a, b]$  para construir uma soma que permita o cálculo aproximado do comprimento de  $\gamma$ .
- (c) Introduzindo uma divisão e uma multiplicação adequada por  $\Delta t_k$  deduza a integral que calcula o comprimento de  $\gamma$ .

**Solução 18** (a) Veja na figura (fig. 7.1) página 191, uma curva e uma aproximação poligonal para a mesma.

Se a curva for bijetiva, então a cada ponto da poligonal corresponde um e somente um ponto no intervalo  $[a, b]$ , cada um deles podendo ser obtido com a função inversa.

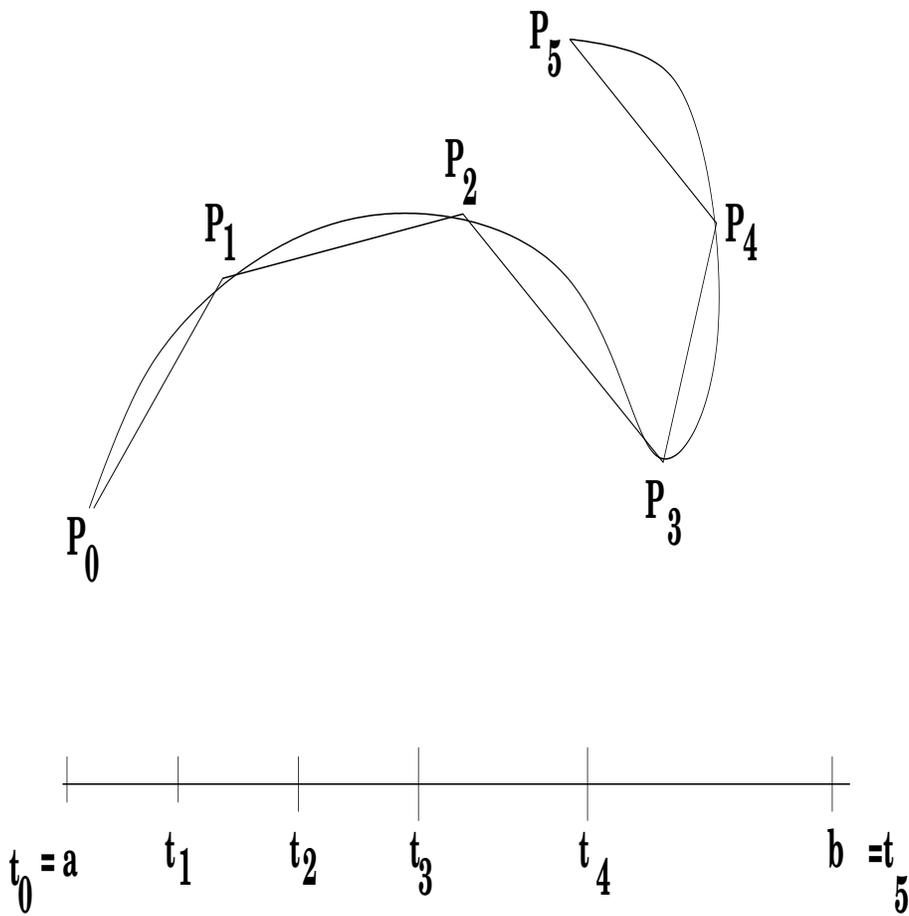


Figura 7.1: Uma curva e sua aproximação poligonal

*Aparentemente haveria problema se a curva não fosse bijetiva, quer dizer, houvesse dois valores do tempo  $t_1, t_2$  tal que  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ . Basta, neste caso, sub-dividir o intervalo de parametrização de formas que em cada sub-intervalo a curva seja bijetiva e aplicar o raciocínio anterior. Isto, aliás, mostra que não há problema se a função não for bijetiva.*

- (b) Comprimento da poligonal Agora queremos o cálculo do comprimento da poligonal. Vamos somar os comprimentos de cada um segmentos de reta desta poligonal:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k P_{k+1}| =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} d((x(t_k), y(t_k)), (x(t_{k+1}), y(t_{k+1}))) = \\ & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k+1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k+1}))^2} \\ & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \end{aligned}$$

(c) comprimento de arco - integral ~~integral~~ comprimento de arco

Se dividirmos e multiplicarmos a última expressão na soma anterior por  $\Delta t_k$ , teremos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \\ & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{\Delta x_k^2}{\Delta t_k^2} + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta t_k^2}} \Delta t_k = \end{aligned}$$

podemos reconhecer os quocientes de diferenciais que definem as derivadas das coordenadas de  $\gamma$ , elevados ao quadrado, e uma soma de Riemann que define a integral:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

que é a fórmula integral para o cálculo do comprimento de arco de uma curva parametrizada sobre o intervalo  $[a, b]$ .

Observe a natural “coincidência” desta fórmula, o comprimento do arco de uma curva é a integral da velocidade (de uma partícula) percorrendo a curva, logo é a distância percorrida (pela partícula) ao longo da curva no sentido que a Física dá a integral da velocidade.

6. Comprimento do círculo Calcule o comprimento do círculo de raio  $r$ .

**Solução 19** Começamos por escrever uma parametrização do círculo de raio  $r$  e centro na origem e calculando a derivada do vetor posição:

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \ni t & \mapsto \gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \\ [0, 2\pi] \ni t & \mapsto \gamma'(t) = r(-\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2 \\ [0, 2\pi] \ni t & \mapsto |\gamma'(t)| = r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto o comprimento do círculo será a integral da última função:

$$\int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

7. Em cada caso abaixo você tem a velocidade com que uma partícula percorre uma determinada trajetória. Em todos os caso o intervalo de parametrização é  $[0, 1]$ . Calcule a “distância” percorrida. Observe que distância é número!

$v(t)$	$v(t)$	$v(t)$
a) $(t, t^2)$	b) $(\sin(t), \cos(t))$	c) $(\cos(t), 1)$
d) $(t, 2t)$	e) $(t, 3t)$	f) $(\cos(2t), \sin(2t))$

8. Em cada caso abaixo você tem a equação do vetor posição de uma partícula percorrendo uma determinada trajetória. Em todos os caso o intervalo de parametrização é  $[0, 1]$ . Calcule a “distância” percorrida. Observe que distância é número!

$\gamma(t)$	$\gamma(t)$	$\gamma(t)$
a) $(t, t^2)$	b) $(\sin(3t), \cos(3t))$	c) $(\cos(4t), \sin(4t))$
d) $(\cos(t), \sin(2t))$	e) $(t, 3t)$	f) $(\cos(2t), \sin(2t))$

9. Comprimento de arco - outra fórmula

Altere a expressão da soma de Riemann obtida para o cálculo aproximado do comprimento de arco de uma curva sob a hipótese de que sabemos explicitar  $y = f(x)$  e que a função  $f$  seja diferenciável.

**Solução 20** Considere a expressão que encontramos anteriormente para o cálculo aproximado do comprimento de arco do círculo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

que agora vamos dividir por  $\Delta x_k$  sob a hipótese de que sabemos explicitar  $y = f(x)$  e que esta função é diferenciável:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \\ & \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}} \Delta x_k \end{aligned}$$

e podemos então reconhecer o quociente de diferenciais que define a derivada de  $f$  e uma soma de Riemann:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta f_k^2}{\Delta x_k^2}} \Delta x_k$$

que define a integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Observe que os limites desta nova integral não podem ser mais  $\{a, b\}$  pois

$$\begin{aligned} [a, b] \ni t &\mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \\ [\alpha, \beta] \ni x &\mapsto f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

em que  $[\alpha, \beta]$  é o intervalo de variação de  $x$ , é a projeção “horizontal” da curva  $\gamma$ . Tente completar você mesmo a figura (fig. 7.1) página 191 em que aparece apenas o intervalo de parametrização, o intervalo do tempo, para visualizar a projeção acima referida.

10. Calcule o comprimento do arco percorrido pelas partículas em cada um dos casos abaixo:

- $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t)) ; t \in [0, 2\pi]$
- $\gamma(t) = e^{2\pi it} ; t \in [0, 1]$
- $\gamma(t) = e^{it} ; t \in [0, 2\pi]$
- $\gamma(t) = \cos^2(t)\vec{i} + \sin^2(t)\vec{j}$
- $\gamma(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

11. Uma curva tem por equação  $y^2 = x^3$ , Verifique em que pontos ela passa quando  $x = 2$  e calcule o comprimento da trajetória percorrida entre estes dois pontos.

12. Dois pontos  $P, Q$  sobre um círculo de raio 1 determinam um setor circular  $POQ$  em que  $O$  é a origem, (centro do círculo). Prove que o comprimento do arco  $AB$  é o dobro da área do setor  $POQ$ .

13. Mostre que o comprimento de arco de  $y = e^x ; x \in [0, 1]$  é  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  o comprimento de arco da curva  $(t + \log(t), t - \log(t)) ; t \in [1, e]$ .

## 7.2 Derivadas Parciais

Há dois conceitos próximos, *jacobiana*, *gradiente*. A *jacobiana* é a matriz das derivadas parciais, e o *gradiente* é a jacobiana de uma função real de  $n$  variáveis. Isto é o *gradiente* é uma *jacobiana* que tem apenas uma linha.

Quer dizer que, se  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  então  $\text{grad}(F) = J(F)$ . O gradiente tem um nome especial porque ele está associado a determinação de máximos e mínimos de funções de duas variáveis como veremos em um dos exercícios abaixo.

### Definição 21 Gradiente

Seja  $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , um campo escalar. Então a jacobiana de  $F$  é uma matriz linha e se chama gradiente.

Em suma, o gradiente de  $F$  é a jacobiana quando a função  $F$  for um campo escalar.

De forma semelhante ao que acontece com as funções univariadas, em que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente, no caso das funções multivariadas a matriz das derivadas parciais, a jacobiana, é o *coeficiente angular múltiplo* e existe uma *variedade linear tangente* de dimensão apropriada.

No caso das funções univariadas a *variedade linear tangente* é uma variedade linear de dimensão 1, uma reta.

As variedades lineares são caracterizadas (o seu coeficiente angular) pelo vetor normal. Veja a figura (fig. 7.2) página 196, uma reta e um vetor normal à mesma.

No caso de um plano, que já tem dois coeficientes angulares, o vetor normal ao plano simplifica as coisas porque ele “determina” o plano se for dado um ponto por onde passe o plano, de forma semelhante com o que acontece com uma reta. Relembrando a Geometria Analítica, uma expressão do tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

representa no  $\mathbb{R}^3$  um plano “caracterizado” pelo vetor normal  $(A, B, C)$ .

Na mesma proporção, uma expressão do tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

representa, no  $\mathbb{R}^3$  uma superfície e diferenciando implicitamente esta expressão vamos ter

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

que contém o molde da variedade linear tangente (desde que calculemos as derivadas parciais num ponto  $(a, b, c)$  ;  $F(a, b, c) = 0$ ). O resultado é

$$\frac{\partial F}{\partial x} |_{(a, b, c)}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y} |_{(a, b, c)}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z} |_{(a, b, c)}(z - c) = 0$$

onde podemos ver o vetor normal

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} |_{(a, b, c)}, \frac{\partial F}{\partial y} |_{(a, b, c)}, \frac{\partial F}{\partial z} |_{(a, b, c)} \right)$$

Os cálculos que fizemos logo acima lembram um dos teoremas mais importantes da matemática mas que tem pouca presença direta. Também é um desses teoremas *difíceis* porque apenas garantem a existência.

Escrevemos a equação de *plano tangente* a uma superfície

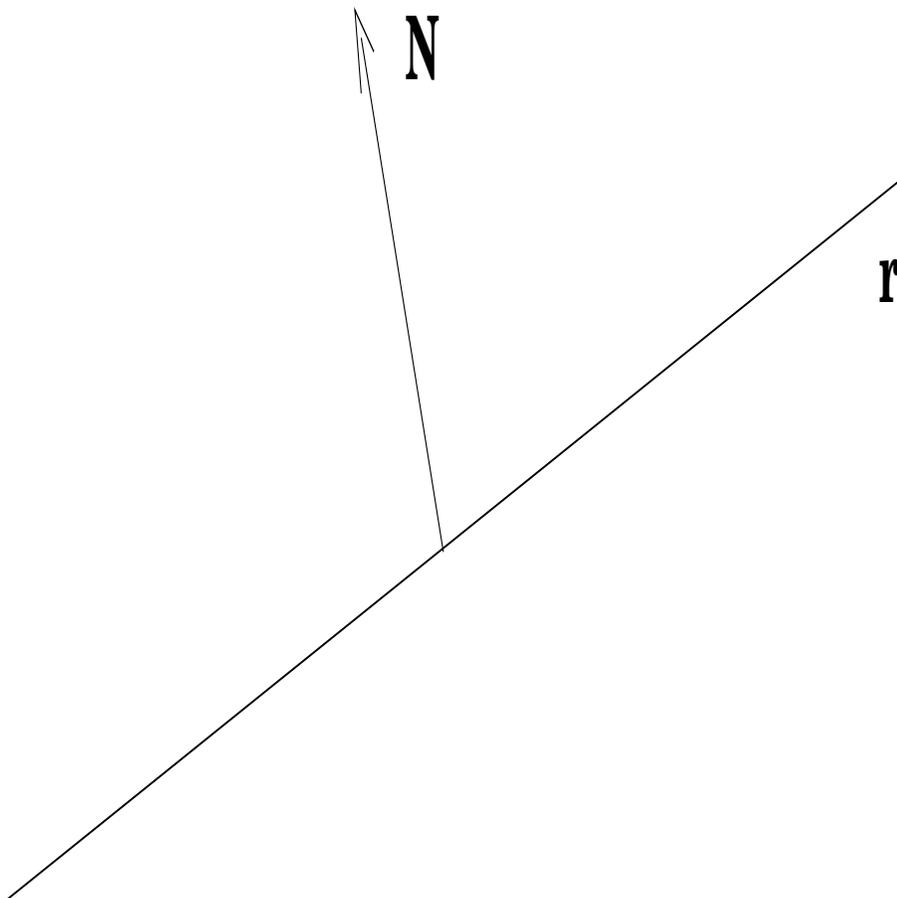


Figura 7.2: Uma variedade linear e seu vetor normal

$$\frac{\partial F}{\partial x}|(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}|(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}|(a, b, c)(z - c) = 0 \quad (7.1)$$

e conseqüentemente podemos nela *explicitar* qualquer uma das variáveis, desde que o correspondente coeficiente (derivada parcial) seja diferente de zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}|(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}|(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}|(a, b, c)(z - c) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}|(a, b, c)(z - c) &= -\frac{\partial F}{\partial x}|(a, b, c)(x - a) - \frac{\partial F}{\partial y}|(a, b, c)(y - b) \\ (z - c) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x - a) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(y - b) \\ z &= c - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x - a) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(y - b) \end{aligned}$$

Agora escrevemos  $z = f(x, y)$ , uma função do primeiro grau, cujo gráfico continua tangente ao gráfico de  $F(x, y, z) = 0$  e portanto isto significa que numa vizinhança do ponto  $(a, b, c)$  é possível explicitar  $z$  na equação  $F(x, y, z) = 0$  para conseguir a função  $z = g(x, y)$  cujas derivadas parciais acabamos de calcular:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (7.3)$$

desde que

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad (7.4)$$

De forma idêntica podemos explicitar  $x, y$  sempre que a correspondente derivada parcial em  $F(x, y, z)$  for diferente de zero. O conteúdo do que acabamos de descrever é o teorema

**Teorema 25** *Teorema da Função implícita*

Se  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  e a função  $F$  tiver derivadas contínuas numa vizinhança de um ponto  $(a_1, a_2, a_3)$ ;  $F(a_1, a_2, a_3) = 0$  e se a derivada parcial

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \neq 0$$

neste ponto, então podemos encontrar, numa vizinhança do ponto,  $(a_1, a_2, a_3)$  uma função  $g$  expressando a variável  $x_i$  como função das outras duas

$$x_i = g(x_j)_{j=1,2,3 ; j \neq i}$$

e tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \quad (7.5)$$

Quer dizer que a função  $g$  expressa uma variável em função das outras no Teorema da Função implícita, tem um valor local apenas. Um exemplo para compreender isto é o círculo em que  $y$  em

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

pode ser explicitado como função de  $x$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

porém esta equação somente vale em cada uma das metades do círculo como função

$$y = g(x).$$

**Exercícios 14** *Diferencial e derivadas parciais*

1. Escreva a equação diferencial da reta, (genérica mas faça uma exceção para os casos  $x=A$ ).

(a) Derive implicitamente  $y = x^2 + 3x - 4$ .

- (b) Escreva a equação da reta tangente á parábola

$$y = f(x) = x^2 + 3x - 4$$

no ponto  $(1, 0)$ .

2. Escreva equação da reta tangente à curva

$$F(x, y) = x^2 + y\cos(x) + 3x = 4$$

no ponto<sup>1</sup>  $(0, 4)$ .

**Solução 21** Derivando implicitamente a expressão:

$$2xdx - y\sin(x)dx + \cos(x)dy + 3dx = 0$$

$$(2x - y\sin(x) + 3)dx + \cos(x)dy = 0$$

$$(2a - b\sin(a) + 3)(x - a) + \cos(a)(y - b) = 0$$

encontramos, na última equação, a expressão da reta tangente num ponto qualquer  $(a, b)$  em que a curva passa.

Tomando agora  $(a, b) = (0, 4)$  temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{(0,4)} = 3 \frac{\partial F}{\partial y}|_{(0,4)} = 1$$

temos portanto a equação da reta:

$$3x + (y - 4) = 0 \equiv y = -3x + 4$$

Com um programa em Python podemos iterar este processo traçando pequenos segmentos de reta e usando as extremidades destes novos segmentos de reta como nova condição inicial  $(a, b)$  para encontrar outro segmento de reta e assim encontrar uma aproximação para o gráfico da curva  $F(x, y) = 4$  numa vizinhança do ponto  $(0, 4)$ .

Veja na figura (fig. 7.3) página 199, o pedaço de curva obtido aproximadamente com um programa que traça várias retas a partir da reta obtida com a condição inicial do problema.

---

<sup>1</sup>Curiosidade, como podemos saber se a expressão acima define uma curva?

$$x^2 + y \cos(x) + 3x = 4$$

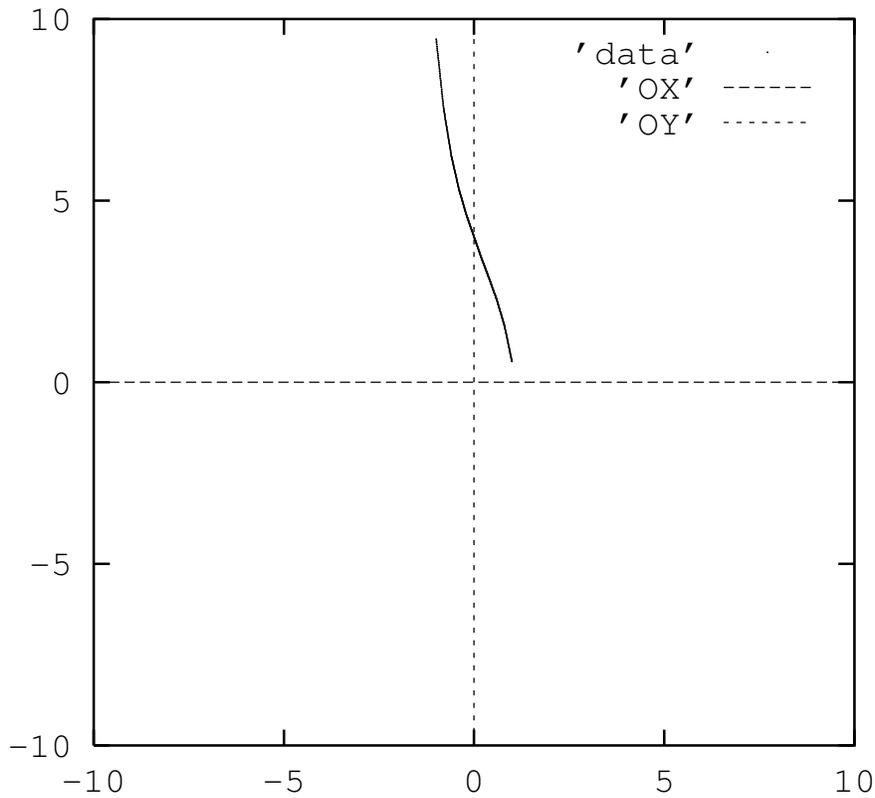


Figura 7.3: Gráfico aproximado da curva plana

3. Derivadas Parciais Calcule as derivadas parciais das funções:

$$\frac{F(x, y) = G(x, y) = H(x, y) =}{a) e^{xy} \quad b) e^{\sin(x)\sin(y)} \quad c) e^{\sin(xy)}}$$

4. Gradiente  $\text{grad}(F) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$  Calcule os gradientes das funções:

$$\frac{F(x, y) = G(x, y) = H(x, y) =}{a) e^{xy} \quad b) e^{\sin(x)\sin(y)} \quad c) e^{\sin(xy)}}$$

5. Escreva a equação do plano tangente à superfície

$$z = F(x, y) = x^2 + y \cos(x) + 3x$$

no ponto  $(1, 1, 8)$

6. Derive implicitamente  $z = F(x, y) = e^{xy}$  e calcule

$$\int_{-1}^1 P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

em que  $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$  e a partícula  $(x, y)$  percorre o círculo unitário parametrizado sobre o intervalo  $[-1, 1]$

**Solução 22** Chamamos o círculo trigonométrico de  $\mathbb{S}^1$  e vamos escrever sua parametrização relativamente ao intervalo  $[-1, 1]$

$$\mathbb{S}^1 = (x(t), y(t)) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))_{t \in [-1, 1]}$$

$$P(x, y) = ye^{xy} ; Q(x, y) = xe^{xy}$$

$$I = \int_{-1}^1 P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{-1}^1 ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$$

$$I = \int_{-1}^1 (-\pi \sin^2(\pi t) e^{\cos(\pi t) \sin(\pi t)} + \pi \cos^2(\pi t) e^{\cos(\pi t) \sin(\pi t)}) dt$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2(t) e^{\cos(t) \sin(t)} + \cos^2(t) e^{\cos(t) \sin(t)}) dt$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(t) - \sin^2(t)) e^{\cos(t) \sin(t)} dt$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t) e^{\frac{1}{2} \sin(2t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{2} \sin(2t)} \cos(2t) dt =$$

$$= \int_0^0 e^u du = 0$$

7. Derive implicitamente  $z = F(x, y) = e^{xy}$  e calcule

$$\int_{-1}^1 P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

em que  $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$  e a partícula  $(x, y)$  percorre a fronteira do retângulo de lado 2, de centro na origem, e lados paralelos aos eixos, parametrizada no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Solução 23** O seguinte conjunto de equações é uma parametrização do retângulo:

$$t \in [-1, 1] ; (x(t), y(t)) = (t, -1)$$

$$t \in [-1, 1] ; (x(t), y(t)) = (1, t)$$

$$t \in [-1, 1] ; (x(t), y(t)) = (-t, 1)$$

$$t \in [-1, 1] ; (x(t), y(t)) = (-1, -t)$$

e se fizermos uma transformação de coordenadas podemos re-escrever esta parametrização em único intervalo:

$$\begin{aligned}
 t \in [-1, -1/2] ; (x(t), y(t)) &= (4t + 3, -1) ; dx = 4dt; dy = 0 \\
 t \in [-1/2, 0] ; (x(t), y(t)) &= (1, 4t + 1) ; dx = 0; dy = 4dt \\
 t \in [0, 1/2] ; (x(t), y(t)) &= (-4t + 1, 1) ; dx = -4dt; dy = 0 \\
 t \in [1/2, 1] ; (x(t), y(t)) &= (-1, -4t + 3) ; dx = 0; dy = -4dt
 \end{aligned}$$

Podemos agora substituir na integral que desejamos calcular:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\
 &= \int_{-1}^{-1/2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{-1/2}^0 P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \\
 &\quad \int_0^{1/2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{1/2}^1 P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\
 &= \int_{-1}^{-1/2} -e^{4t+3}4dt + \int_{-1/2}^0 e^{4t+1}4dt + \int_0^{1/2} -e^{-4t+1}4dt + \int_{1/2}^1 e^{-4t+3}4tdt = \\
 &= -e^1 + e^{-1} + e^1 - e^{-1} - e^{-1} + e^1 + e^{-1} - e^1 = 0
 \end{aligned}$$

8. Uma partícula percorre um caminho no espaço sobre uma superfície  $z = F(x, y)$  parametrizado sobre o intervalo  $[-1, 1]$ , quer dizer que

$$(x(t), y(t), F(x(t), y(t))) ; t \in [-1, 1]$$

é o caminho percorrido pela partícula.

Qual das afirmações abaixo melhor descreve a integral

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

- (a) É um volume determinado por  $z = F(x, y)$
- (b) É o trabalho da força  $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$  ao longo do caminho percorrido pela partícula.
- (c) É um vetor do  $\mathbb{R}^3$

9. Gradiente

- (a) Derive implicitamente a expressão  $z = F(x, y)$ , encontre a equação do plano tangente à esta superfície num ponto arbitrário  $(a, b, F(a, b))$ , deduza qual é a expressão de um vetor ortogonal à superfície no ponto  $(a, b, F(a, b))$ .

(b) Verifique que  $\text{grad}(F)$  é um vetor do plano, é a projeção de um vetor normal à superfície no domínio, e ele se encontra sobre a direção de maior crescimento ou decréscimo na superfície  $z = F(x, y)$ .

10. usando o Teorema da Função implícita Se  $F(x, y, z) = 0$  for uma superfície fechada<sup>2</sup> então localmente podemos explicitar  $z = f(x, y)$ . Verifique que o gradiente de  $f$  é a projeção sobre  $XOY$  do vetor normal que aponta para o exterior de  $F(x, y, z) = 0$ .

## 7.3 Aplicações das derivadas

### Exercícios 15 Mudança de variável

1. Faça os gráficos das funções definidas abaixo e calcule as suas integrais sobre  $\mathbb{R}$ .

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; x \in [-1, 0] \\ x & ; x \in [0, 1] \\ 0 & ; x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (7.6)$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 2x & ; x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & ; x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (7.7)$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -4x & ; x \in [-\frac{1}{4}, 0] \\ 4x & ; x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0 & ; x \notin [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \end{cases} \quad (7.8)$$

2. Verifique que em todos os casos da questão anterior, vale:

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} ax dx = \int_{-1}^1 x dx$$

3. Verifique que os exemplos acima sugerem a fórmula:

$$\int_{\Omega} f(z) dz = \int_{g^{-1}(\Omega)} f(g(w)) g'(w) dw$$

---

<sup>2</sup>Que divide o  $\mathbb{R}^3$  em duas regiões, uma limitada, chamada interior e a outra ilimitada, o exterior.

Demonstre esta fórmula com auxílio de somas de Riemann aplicadas em ambas as integrais.

Este resultado merece ser formalizado sob o nome de Teorema:

**Teorema** 26 Mudança de variável

**Princípio do telhado**

Se os dois domínios  $W, \Omega$  estiverem em correspondência bi-únivoca pela transformação  $T$ , isto é,

$$T(W) = \Omega ; W, \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

e se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  for integrável, então

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\omega = \int_W f(T(w)) \det(J(T^{-1})) dw = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(T(w)) \det(J(T^{-1})) dw$$

**Dem**:

Vamos fazer a demonstração num caso particular que rapidamente irá colocar a fórmula em evidência. Vamos supor que  $\Omega$  seja um hipercubo do  $\mathbb{R}^{n+1}$  quer dizer um conjunto da forma

$$\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] ; a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

$\Omega$  é um produto cartesiano de intervalos.

Então

$$V = \int_{\Omega} f(\omega) d\omega = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \approx \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_n=0}^{m-1} f(x_{1,k_1}, \dots, x_{n,k_n}) \Delta x_{1,k_1} \dots \Delta x_{n,k_n}$$

Em que temos, na última linha,  $n$  somas ( $n$  variáveis) e cada uma destas somas tem  $m$  parcelas, portanto um total de  $n \times m$  parcelas. Em cada parcela há um produto de  $n$  elementos básicos

$$\Delta x_{1,k_1} \dots \Delta x_{n,k_n}$$

que é a medida de um hiper paralelepipedo do  $\mathbb{R}^{n+1}$  que nós podemos supor de lados iguais a

$$\Delta x_{j,k_j} = \frac{b_j - a_j}{m}$$

e temos, assim, uma soma de Riemann múltipla, uniforme.

É a Jacobiana de  $T$ ,  $J(T)$  que faz a transformação local da medida entre os dois domínios e vamos ver como isto se dá.

$$W \xrightarrow{T} \Omega$$

$$W \ni (dw_1, \dots, dw_n) \xrightarrow{J(T)} (d\omega_1, \dots, d\omega_n) \in \Omega$$

$$\Delta w_{k_1, \dots, k_n} \approx \det(J(T)) \Delta x_{1,k_1} \dots \Delta x_{n,k_n}$$

quer dizer,

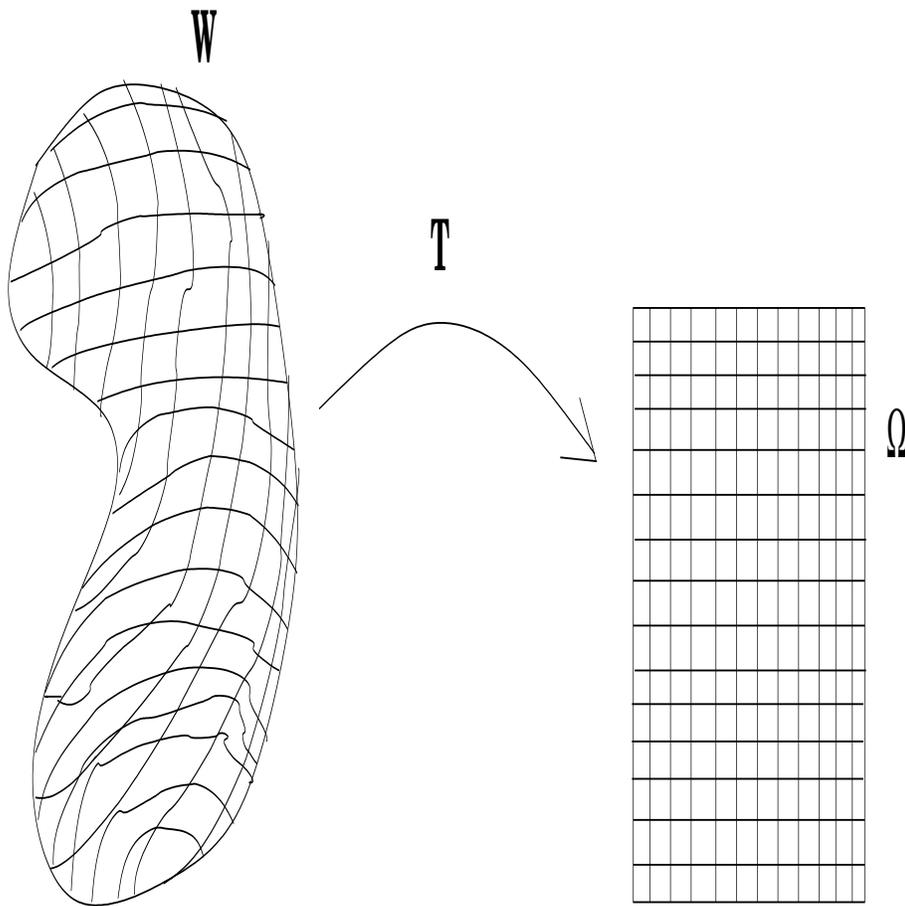


Figura 7.4: Uma malha retangular em  $\Omega$  induz uma partição no conjunto de saída  $W$

- a subdivisão de  $\Omega$  em  $n \times m$  pedaços induz via  $T^{-1}$  uma divisão de  $W$  em  $n \times m$  pedaços, porque a correspondência  $T$  é bi-únivoca. São estes pedaços que estamos chamando de  $m$ -células de  $W$ ; Ver na figura (fig. 7.4) página 204, a representação no caso bidimensional da imagem inversa da malha de  $\Omega$  induzindo uma subdivisão em  $W$ . Em  $W$  temos  $n \times m$   $m$ -células.

- a medida de cada uma dessas  $m$ -células é aproximadamente

$$(M) \Delta w_{k_1, \dots, k_n} = \det(J(T)) \Delta x_{1, k_1} \cdots \Delta x_{n, k_n}$$

porque são os determinantes que generalizam a multiplicação: de um lado temos uma multiplicação “deformada” pelo determinante da transformação  $T$  que dá a medida das  $m$ -células (aproximadamente), no conjunto de saída.

Este é o princípio do telhado (como calcular a área de um telhado, sabendo a área ocupada pela casa) ou ainda chamado de princípio do coseno. Nós veremos este princípio mais a frente, ver no índice remissivo.

- cada hiper  $\Delta$ -paralelepípedo de  $\Omega$  é a imagem de uma  $m$ -célula de  $W$ ;

- $\det(J(T^{-1})) = \frac{1}{\det(J(T))} = \det(J(T))^{-1}$
- $\Delta x_{1,k_1} \cdots \Delta x_{n,k_n} \approx \det(J(T^{-1})) \Delta w_{k_1, \dots, k_n}$  invertendo a equação (M).
- A soma de Riemann fica, então, transformada em:

$$V = \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m-1} f(x_{1,k_1}, \dots, x_{n,k_n}) \Delta x_{1,k_1} \cdots \Delta x_{n,k_n}$$

$$V = \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m-1} f(T(w_{k_1, \dots, k_n})) \det(J(T^{-1})) \Delta w_{k_1, \dots, k_n} \approx$$

$$\approx \int_W f(T(w)) \det(J(T^{-1})) dw$$

e podemos identificar a nova expressão da integral a partir da soma de Riemann, como queríamos demonstrar. **q.e.d.**

Uma referência para o resultado sobre a inversa de determinantes, veja Lang, *S - Algebra*, pag. 334.

#### 4. Mudança de Variáveis

(a) Coordenadas polares Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

(b) Verifique que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

e daí deduza o valor de  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

**Solução 24** (a) Seja  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ . Com a mudança de variáveis de coordenadas cartesianas para coordenadas polares (ou vice-versa) podemos identificar um disco e um retângulo no plano, entretanto agora temos uma integral cujo domínio é o plano todo e isto não corresponde a nenhum disco (a não ser que consideremos o plano imprópriamente como um disco). O que temos que fazer aqui é provar que a integral existe e escrever a sua reformulação com as novas coordenadas, uma vez que não uma transição algébrica simples entre as duas formulações.

$f$  é constante sobre os círculo de raio  $R$  e centro em  $(0,0)$  com o valor  $e^{-R^2}$ .

A desigualdade que vai responder a questão da existência é:

$$\int_W \int f(x,y) dx dy \leq \sup_{(x,y) \in W} f(x,y) m(W)$$

Vamos considerar os domínios formados de aneis centrados na origem  $A_{r,R}$  quer dizer

$$A_{r,R} = \{(x,y) ; r < |(x,y)| < R ; 0 < r < R\}$$

para dois números reais  $r, R$  arbitrários, então

$$\begin{aligned} I_{r,R} &= \int_{A_{r,R}} \int f(x,y) dx dy \leq \sup_{(x,y) \in A_{r,R}} f(x,y) m(A_{r,R}) \\ &\sup_{(x,y) \in A_{r,R}} f(x,y) = e^{-R^2} \\ m(A_{r,R}) &= \pi(R^2 - r^2) < \pi R^2 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2} R^2 &= 0 \end{aligned}$$

o que significa que o resto da integral fora de um círculo de raio  $R$  é desprezível e portanto a função  $f$  é integrável no plano.

Podemos agora simplesmente aplicar a fórmula de mudança de variáveis.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{pmatrix} ; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quer dizer que a jacobiana da transformação é o determinante da matriz das derivadas parciais acima:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho.$$

Os limites de integração nas coordenadas polares passam a ser

$$\rho \in [0, \infty) ; \theta \in [0, 2\pi]$$

e temos a igualdade:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} d\rho d\theta = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \\ &2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi \end{aligned}$$

(b) Como  $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}e^{-y^2}$  e como a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

existe<sup>3</sup> então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

ou ainda, escrevendo uma fórmula clássica, da probabilidade normal

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \quad (7.9)$$

5. Considere a região  $\Omega$  limitada pelo sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y & \leq x \\ x & \leq 2 \\ y + x^2 & \geq 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Calcule a área de  $\Omega$ .

**Solução 25**

---

<sup>3</sup>a existência desta integral se prova usando argumentos semelhantes ao que usamos para demonstrar a existência da integral de  $f(x, y)$ .

### 7.3.1 Vetor normal e gradiente

#### Exercícios 16 Vetor normal e gradiente

1. Prove que o vetor  $(A, B, C)$  é perpendicular ao plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**Solução 26** O plano  $Ax + By + Cz = 0$  é paralelo ao plano cuja equação temos acima, porque a interseção entre eles é vazia, se  $D \neq 0$ .

Para provar isto, resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ Ax + By + Cz = -D \end{cases} \quad (7.11)$$

e sua conclusão deve ser: “o sistema é impossível se  $D \neq 0$ .”

A equação  $Ax + By + Cz = 0$  pode ser escrita com o produto escalar:

$$Ax + By + Cz = 0 \equiv \langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle = 0$$

denunciando que o vetor qualquer  $(x, y, z)$  no plano é perpendicular ao vetor dado  $(A, B, C)$ . Em outras palavras, “o conjunto dos pontos que satisfazem a equação

$$Ax + By + Cz = 0$$

é o lugar geométrico dos vetores do espaço que são perpendiculares ao vetor  $(A, B, C)$ .”

Como o plano  $Ax + By + Cz = 0$  é paralelo ao plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  então, qualquer vetor perpendicular ao primeiro, é também perpendicular ao segundo.

- 
2. Considere uma função derivável

$$z = F(x, y)$$

definida num domínio  $\Omega$  do plano.

- (a) Derive implicitamente a função

$$z = F(x, y)$$

e deduza da expressão a equação do plano tangente no ponto  $(a, b, F(a, b))$ .

Escreva um vetor perpendicular á superfície  $\text{graf}(F)$  no ponto  $(a, b, F(a, b))$ .

- (b) Verifique que o  $\text{grad}(F)$  é proporcional à projeção de um vetor normal no domínio  $\Omega$ .

**Solução 27** (a) Derivando implicitamente  $z = F(x, y)$  temos

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Podemos entender os símbolos “ $dz, dx, dy$ ” como novas variáveis escritas sob forma de diferenças:

$$z - c, x - a, y - a$$

em que  $(a, b, c)$  é um ponto do espaço e com as derivadas parciais  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  calculadas no ponto  $(a, b)$  temos a variação da função  $F$  nas direções básicas calculadas no ponto  $(a, b, c)$ ;  $c = F(a, b)$  que nos permite escrever a equação do plano:

$$z - c = \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b)$$

que é a equação de  $m$  plano, que passa no ponto  $(a, b, F(a, b))$  e cujos coeficientes angulares, nas direções básicas  $OX, OY$  coincidem com as taxas de variação instantâneas de  $F$  neste ponto.

**Observação 27** Existência da derivada

A derivação implícita cria uma “expressão diferencial” que alguns autores chamam de “forma diferencial”.

Se  $F$  tiver algum plano tangente ele tem que ser sugerido pela forma diferencial obtida pela primeira derivação implícita (porque podemos seguir derivando implicitamente).

A existência das derivadas parciais não garante a existência de um plano tangente, em outras palavras  $F$  tendo derivadas parciais, não quer dizer que  $F$  seja derivável, e isto acontece até mesmo com funções univariadas.

Para que isto fique claro, imagine o gráfico de uma função  $f$  derivável que você parta num ponto,  $\underline{x = a}$ , o seu gráfico e desloque um dos “ramos” verticalmente. Você criou uma função  $g$  com salto que tem a mesma derivada à direita e à esquerda, no ponto  $\underline{x = a}$  que a função  $f$  mas que não tem derivada neste ponto e que por isto mesmo diremos que não é derivável.

Podemos dizer que este exemplo é artificial. No caso de funções multivariadas há exemplos naturais em que acontecem situações como esta, Veja na figura (fig. 7.5) página 211. A visualização estática do que acontece é muito pobre, mas você pode solicitar este gráfico a um programa como Scilab, veja abaixo o código fonte para produzir o gráfico, e usar a capacidade do programa de fazer rotação e zoom até que você consiga entender o que acontece.

No ponto  $(0, 0)$  a função

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

tem todos os valores entre  $-1,1$  como limite, dependendo da reta sobre a qual este limite seja calculado:

$$y = ax \quad (7.12)$$

$$z_a = f(x, y) = f(x, ax) = \frac{x^2 - a^2 x^2}{x^2 + a^2 x^2} \quad (7.13)$$

$$z_a = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad (7.14)$$

$$a = 0 \Rightarrow z_a(0, 0) = 1 \quad (7.15)$$

$$a = 2 \Rightarrow z_a(0, 0) = \frac{-3}{5} \quad (7.16)$$

O ínfimo de  $z_a$  é  $-1$  o que fica expresso no gráfico pela abertura que ali se pode ver. Esta função tem derivadas parciais em todos os pontos e inclusive na origem (se calculada a partir da expressão  $z_a$ ) mostrando a tendência da superfície ao se aproximar de um ponto sobre o eixo  $OZ$ .

O programa abaixo pode ser rodado no Scilab (e provavelmente) também roda em MatLab com alguma pequena modificação.

```
function [x,y,z]=superficie(f,inicio,fim)
x=[inicio:0.1:fim];lx=length(x)
y=[inicio:0.1:fim];ly=length(y)
// deff('y=f(x)', 'y=x^2 +2*x -5')
// deff('z=g(x,y)', 'z=sqrt(abs(f(x)^2 -y^2))')
for k=[1:lx]
for j=[1:ly]
z(k,j)=f(x(k),y(j));
end;end
plot3d(x,y,z,45,45,'@ @ @ grafico - Scilab ',[1,2,4])
```

```
function z = h(x,y)
z = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)
```

No Scilab

- use o botão “file”
- e escolha “file operations” que vai abrir outra tela
- primeiro você deve selecionar os arquivos do tipo “\*.data” ao lado do título “filename Mask”.
- Se o arquivo “superficie.data” estiver disponível escolha este arquivo.
- depois escolha a opção “Getf” no pé da página
- Agora você está de volta na página principal do Scilab e pode digitar

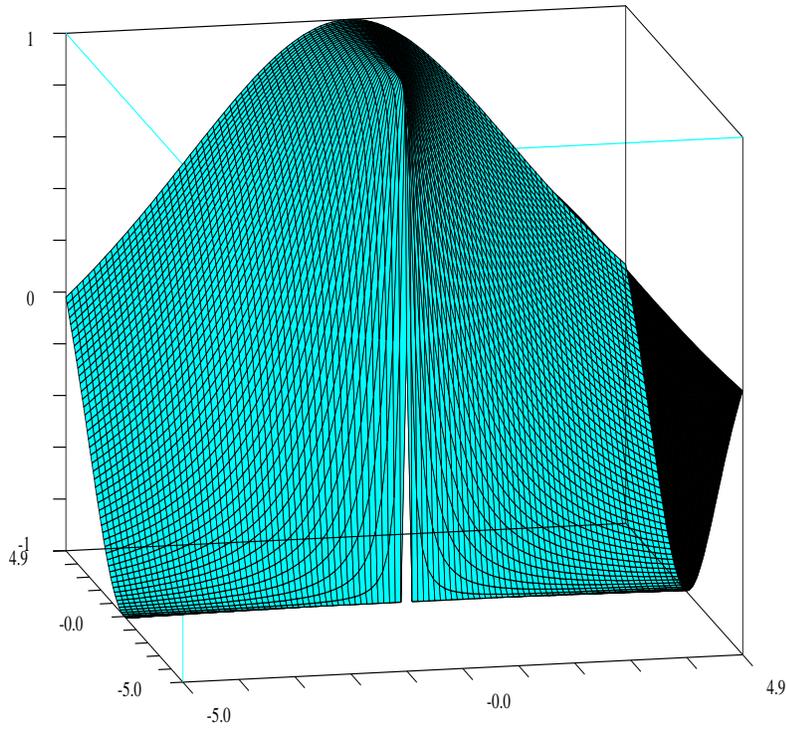


Figura 7.5: Uma superfície com ponto singular

```
superficie(h,-5,5)
```

que vai produzir o gráfico da superfície, em janela própria sobre o domínio  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ . Nesta janela gráfica você tem opções de manipulação da imagem: zoom, rotação, etc... apertando os botões com o ratinho.

O arquivo `superficie.data` deve acompanhar o texto deste livro junto com outros arquivos de programas. Se isto não acontecer, entre em contacto comigo.

Divirta-se e procure entender a superfície, e veja como a existência de derivadas parciais não implica na existência da derivada (jacobiana) no ponto  $(0, 0)$ .

(b) Um vetor perpendicular à superfície  $\text{graf}(f)$  no ponto  $(a, b, F(a, b))$

é

$$\vec{u} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1\right)$$

em que as derivadas parciais foram calculadas no ponto  $(a, b)$ . Se  $F$  tiver um plano tangente neste ponto, (se  $F$  não tiver plano tangente, não pode ter vetor perpendicular tão pouco), então o vetor  $\vec{U}$  sendo perpendicular ao plano tangente é também perpendicular ao gráfico da função no ponto, por definição.

Para projetar  $\vec{u}$  sobre o domínio  $\Omega$  basta zerar a última coordenada:

$$Proj|_{X \circ Y}(\vec{u}) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 0\right)$$

ou simplesmente

$$Proj|_{X \circ Y}(\vec{u}) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

que significa que este vetor, de apenas duas coordenadas, tem todas as demais coordenadas nulas. Este é o vetor das derivadas parciais, o gradiente de  $F$ .

Também consideramos  $\text{grad}(F)$  como um vetor simbólico representando o “vetor” das derivadas parciais de primeira ordem de  $F$  num ponto qualquer.

3. Ache o  $\text{grad}(F)$  em cada caso abaixo e verifique se existe algum ponto  $(a, b)$  do domínio em que ambas as coordenadas de  $\text{grad}(F)$  se anulam. Teste, usando MuPAD ou Maple, a correção dos seus cálculos.

$$\begin{array}{lll} \frac{F(x, y) =}{1) x^2 + y^2 \sin(xy)} & \frac{F(x, y) =}{2) x^2 - 2y^2} & \frac{F(x, y) =}{3) \ln(x^2 + y^2)} \\ 4) x^2 y^3 & 5) x^y & 6) y^{x^2 + y^2} \end{array}$$

### Solução 28

$$\begin{aligned} (1) & (2x + y^3 \cos(xy), 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy)) \\ & x = y ; x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \\ (2) & (2x, -4y) \\ (3) & \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2yx^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right) \\ (4) & (2xy^3, 3x^2y^2) \\ (5) & (yx^{y-1}, x^y \ln(x)) \\ (6) & (y^{x^2 + y^2} 2x \ln(y), y^{x^2 + y^2} \left(\frac{x^2 + y^2 + 2y^2 \ln(y)}{y}\right)) \end{aligned}$$

As equações propostas são muito difíceis de ser resolvidas (não há métodos definidos). Nós limitamos a encontrar soluções óbvias.

Justificativas:

- (a) (1) Imponha  $\cos(xy) = 0 \Rightarrow xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  reutilize este resultado na expressão geral onde se  $x = y$  então  $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \Rightarrow \sin(xy) = 1$  e a conseqüente igualdade final. Este método não garante que todas as soluções foram encontradas, mas mostram que existe solução para

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

- (b)  $2x = -4y = 0 \Rightarrow x = y = 0$

- (c)  $\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2yx^2 + y^2}{x^2+y^2} = 0$  não tem solução.

- (d)  $2xy^3 = 3x^2y^2 = 0 \Rightarrow OX \cup OY$

- (e)  $yx^{y-1} = x^y \ln(x) = 0 \iff (x, y) = (1, 0)$

- (f)  $y^{x^2+y^2+2x \ln(y)} = y^{x^2+y^2} \left( \frac{x^2+y^2+2y^2 \ln(y)}{y} \right) = 0$  impossível porque  $\frac{\partial F}{\partial x}$  é sempre diferente de zero.

-----

4. Considere uma curva de nível  $F(x, y) = 0$  de uma função  $z = F(x, y)$  diferenciável. Prove que o gradiente num ponto  $(a, b)$  na curva de nível é ortogonal à curva.

**Solução 29** Derivando implicitamente a equação da curva de nível, vamos encontrar a equação da reta tangente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) &= 0 \\ \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) &\perp C(a, b) \end{aligned}$$

em que  $C$  representa a curva de nível passando por  $(a, b)$ .

Como o gradiente é perpendicular à reta

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) = 0$$

que é tangente à curva  $C$  então o gradiente é perpendicular à  $C$ .

-----

5. Derivada direcional Qual das frases seguintes descreve o significado da expressão

$$\langle \text{grad}(F), \vec{u} \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\alpha) + \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\alpha)$$

em que  $\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ .

- (a) Trabalho de  $F$  na direção de  $\vec{u}$ .
- (b) Projeção do  $\text{grad}(F)$  na direção do vetor  $\vec{u}$ .
- (c) Projeção do vetor  $\vec{u}$  na direção do gradiente.

**Solução 30** (a) Trabalho é um “valor acumulado”, uma integral por exemplo, a expressão não sugere isto.

- (b) Correta,  $\vec{u}$  é um vetor unitário, o produto escalar produz o módulo da projeção na direção de um vetor unitário.
- (c)  $\text{grad}(F)$  não é, necessariamente um vetor unitário, não podemos deduzir que seja verdade.

6. Considere

$$z = F(x, y) = \frac{8 - (x + 1)^2(y + 1)^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

**Solução 31** Vamos usar uma técnica de derivação algorítmica que torna o cálculo de derivadas mais simples porque quebra as etapas do cálculo. Para isto identificamos as funções “atômicas” que compõem uma equação e depois aplicamos seguidamente a regra da cadeia. Neste caso

As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (x + 1)^2 ; v(x, y) = (y + 1)^2 \\ u_x(x, y) &= 2(x + 1) ; v_y(x, y) = 2(y + 1) \\ u2(x, y) &= (x^2 + 1) ; v2(x, y) = (y^2 + 1) \\ u2_x(x, y) &= 2x ; v2_y(x, y) = 2y \\ F(x, y) &= \frac{8 - uv}{u2v2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{-vu_x u2v2 - u2_x v2(8 - uv)}{(u2v2)^2} = \frac{-2(y+1)^2(x+1)(x^2+1)(y^2+1) - 2x(y^2+1)(8 - (x+1)^2(y+1)^2)}{(x^2+1)^2(y^2+1)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{-v_y u u2v2 - v2_y u2(8 - uv)}{(u2v2)^2} = \frac{-2(y+1)(x+1)^2(x^2+1)(y^2+1) - 2y(x^2+1)(8 - (x+1)^2(y+1)^2)}{(x^2+1)^2(y^2+1)^2} \end{aligned}$$

em que  $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$

Nas duas últimas linhas aparecem as derivadas parciais como seriam calculadas dentro de um programa de computador. Mas até mesmo para representação numa página eletrônica, o uso de derivação algorítmica tem suas vantagens porque podemos “cortar e colar” na expressão final seguindo o modelo proposto pela expressão algorítmica.

Depois de editar as expressões acima num editor de texto, com a sintaxe de MuPAD ou Maple, que são idênticas, temos

```
u := (x,y) -> (x+1)^2
v := (x,y) -> (y+1)^2
```

```

ux := diff(u,x)
vy := diff(v,y)
u2 := (x,y) -> x^2 + 1
v2 := (x,y) -> y^2 + 1
u2x := (x,y) -> 2*x
v2y := (x,y) -> 2*y
fx := (x,y) -> -v(x,y)*ux(x,y)*u2(x,y)*v2(x,y)
- u2x(x,y)*v2(x,y)*(8-u(x,y)*v(x,y))/(u2(x,y)^2*v2(x,y)^2)
fy := (x,y) -> -u(x,y)*vy(x,y)*u2(x,y)*v2(x,y)
- v2y(x,y)*u2(x,y)*(8-u(x,y)*v(x,y))/(u2(x,y)^2*v2(x,y)^2)

```

estas expressões podem ser sucessivamente coladas na área de trabalho do MuPAD e agora poderíamos facilmente calcular a equação do plano tangente no ponto  $(a, b, F(a, b)) = (1, 1, F(1, 0)) = (1, 1, 2)$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = -12 ; B = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = -20$$

sendo a equação do plano:

$$z - 2 = -12(x - 1) - 20(y - 1)$$

Os cálculos foram feitos com<sup>4</sup> MuPAD. Ver em [?, mupad] como obter MuPAD. Observe que  $fx = \frac{\partial f}{\partial x}$  na notação do MuPAD.

7. Encontre o plano tangente a superfície

$$x = u^2 - v^2; y = u + v; z = u^2 + 4v; u, v \in D^1$$

no ponto  $(0, 1, 2)$ .

**Solução 32** A diferencial contém o formato da equação do plano tangente, e observe que a expressão que aparece na primeira linha do conjunto de equações seguinte, é o equivalente a derivação implícita para o caso de funções vetoriais de várias variáveis.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ u + v \\ u^2 + 4v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \\ 2u & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

---

<sup>4</sup>MuPAD é um programa de Computação Algébrica semelhante ao Maple ou Mathematica, com a importante característica de que é distribuído com um preço simbólico.

$$(u, v) = (1/2, 1/2) \Rightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \frac{1}{2} \\ v - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \frac{1}{2} \\ v - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Na última linha temos as equações paramétricas do plano tangente à superfície no ponto indicado.

---

8. Mostre que todas as retas perpendiculares à superfície da esfera de centro na origem, passam também na origem.

**Solução 33** Basta mostrar que “as retas perpendiculares à superfície da esfera tem produto vetorial nulo com o vetor posição do ponto de interseção”.

Precisamos da definição de reta perpendicular:

**Definição 22** Reta perpendicular a uma variedade Uma reta será perpendicular à superfície de uma variedade num ponto  $P$  se for perpendicular à variedade linear tangente naquele ponto.

A equação da esfera  $z^2 + x^2 + y^2 = r^2$

A equação da variedade linear tangente:

$$2zdz + 2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow c(z - c) + a(x - a) + b(y - b) = 0$$

A última equação é a equação cartesiana da variedade linear tangente no ponto  $(a, b, c)$  em que as derivadas parciais que aparecem na derivação implícita foram calculadas, revelando que o vetor posição  $(a, b, c)$  é perpendicular ao plano tangente no ponto  $(a, b, c)$ , como queríamos demonstrar.

---

## 7.4 Derivadas de funções vetoriais

Podemos estender as operações usuais, as quatro operações, produto escalar e produto vetorial, para serem efetuadas com “vetores” formais que representam operadores diferenciais. Vamos apresentar abaixo estas definições que serão

usadas nos exercícios. Para não tornar muito pesada a notação, vamos supor que estamos trabalhando com *espaços de funções* de dois tipos:

$$\mathbb{R}^3 \supset \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad (7.17)$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3 \quad (7.18)$$

$f$  será chamada de *campo escalar*, e  $F$  será chamada de *campo vetorial* e vamos manter este “hábito” nesta seção, letra minúscula para campos escalares e as maiúsculas para campos vetoriais.

### Definição 23 Operadores diferenciais

- grad É o vetor das derivadas parciais  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  O gradiente produz um vetor de dimensão maior do que a função em que ele for aplicado.
- div Produz um campo escalar ao ser aplicado em um campo vetorial  $F$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \langle \text{grad}(F), e_1 \rangle + \langle \text{grad}(F), e_2 \rangle + \langle \text{grad}(F), e_3 \rangle$$

Este campo escalar mede a dispersão entre  $\text{grad}(F)$  e os vetores unitários das direções dos eixos coordenados, daí o seu nome.

- rotacional

### Exercícios 17 Operadores diferenciais

- 1.
- 2.
- 3.

## 7.5 Miscelânea de Exercícios

### Exercícios 18 Integral e Derivada

1. Solução: Calcule  $\int_{\gamma} u(x, y)dx + v(x, y)dy$  em que  $\gamma$  é a fronteira do quadrado de lado 1 com os vértices  $(0, 0), (1, 1)$ , nos seguintes casos

(a)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  ;  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ .

(b)  $u(x, y) = x^3 - xy^2$  ;  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ .

(c)  $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2$  ;  $v(x, y) = 6xy$ .

(d)  $u(x, y) = 3x^2 - 2y^2$  ;  $v(x, y) = 6xy$ .

Veja na figura (fig. 7.6) página 219, o quadrado  $Q$  com as parametrizações dos seus lados.

(a)

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\gamma} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \oint_{\gamma} (x^3 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy \\ &= \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy + \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3xy^2)dt + \int_0^1 (3x^2y - y^3)dt + \\ &\quad - \int_0^1 (x^3 - 3xy^2)dt - \int_0^1 (3x^2y - y^3)dt \\ I &= \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 (3t - t^3)dt - \int_0^1 ((1-t)^3 - 3(1-t))dt + \int_0^1 (1-t)^3 dt \\ &= \int_0^1 3t dt - \int_0^1 -3(1-t)dt = \int_0^1 3t dt - \int_{-1}^0 -3(-t)dt \\ I &= \left. \frac{3t^2}{2} \right|_0^1 - \int_{-1}^0 3t dt = \frac{3}{2} - \left. \frac{3t^2}{2} \right|_{-1}^0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} u(x, y)dx + v(x, y)dy &= \oint_{\gamma} (x^3 - xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy = \\ &= \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy + \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy = \\ &= \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 (3t - t^3)dt - \int_0^1 ((1-t)^3 - (1-t))dt - \int_0^1 -(1-t)^3 dt = \\ &\quad \int_0^1 3t dt + \int_0^1 (1-t)dt = \int_0^1 3t dt + \int_{-1}^0 (-t)dt = \left. \frac{3t^2}{2} \right|_0^1 - \int_{-1}^0 t dt = \\ &= \left. \frac{3t^2}{2} \right|_0^1 - \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} u(x, y)dx + v(x, y)dy &= \oint_{\gamma} (3x^2 - 3y^2)dx + 6xydy = \\ &= \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy + \oint_{\gamma} udx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} vdy = \\ &\quad \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^1 6t dt - \int_0^1 (3(1-t)^2 - 3)dt + 0 = \\ &\quad \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^1 6t dt - \int_{-1}^0 (3(-t)^2 - 3)dt + 0 = \\ &\quad \left. \frac{3t^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{6t^2}{2} \right|_0^1 - 3 \int_{-1}^0 (-t)^2 dt + 3 \int_{-1}^0 dt = \end{aligned}$$

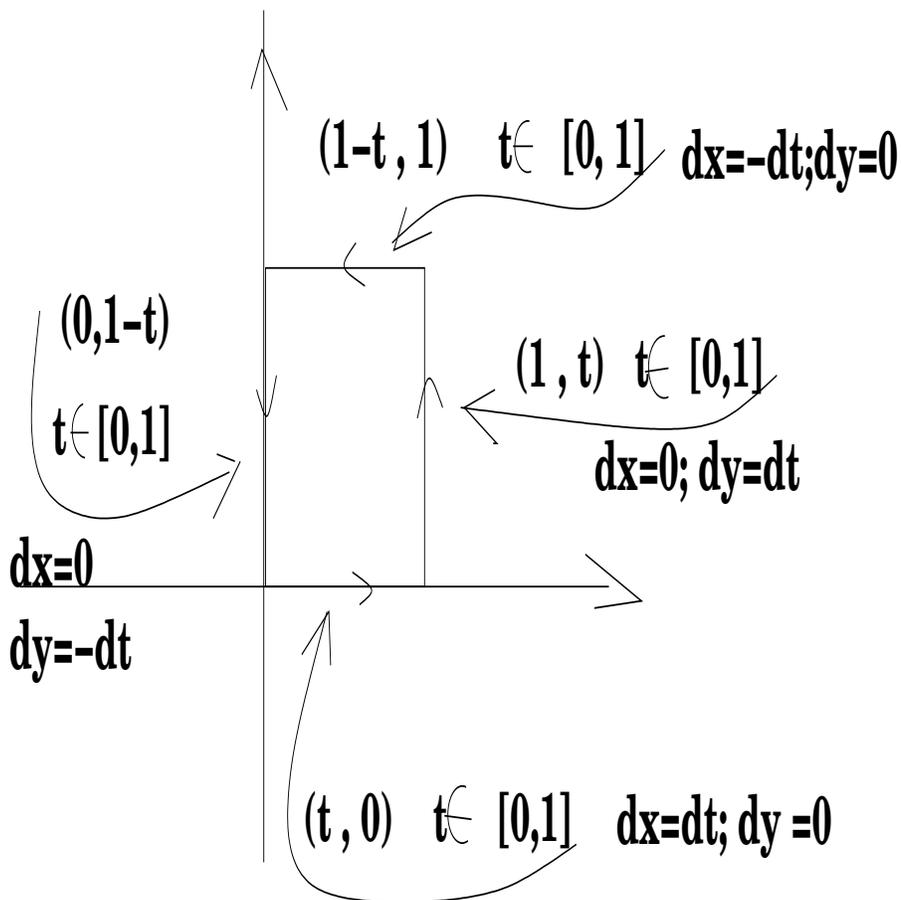


Figura 7.6: Parametrização do quadrado  $Q$  de lado 1, com vértices  $(0, 0), (1, 1)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{3t^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6t^2}{2} \Big|_0^1 - 3 \int_{-1}^0 t^2 dt + 3t \Big|_{-1}^0 = \\ & \frac{3t^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6t^2}{2} \Big|_0^1 - 3 \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 + 3t \Big|_{-1}^0 = \\ & 1 + 3 - 1 - 3 = 0 \end{aligned}$$

(d)  $u(x, y) = 3x^2 - 2y^2$  ;  $v(x, y) = 6xy$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy &= \oint_{\gamma} (3x^2 - 2y^2) dx + 6xy dy = \\ &= \oint_{\gamma} u dx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} v dy + \oint_{\gamma} u dx + 0 + 0 + \oint_{\gamma} v dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^1 6t dt - \int_0^1 (3(1-t)^2 - 2) dt + 0 = \\
& \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^1 6t dt - \int_{-1}^0 (3(-t)^2 - 2) dt + 0 = \\
& \frac{3t^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6t^2}{2} \Big|_0^1 - 3 \int_{-1}^0 (-t)^2 dt + 2 \int_{-1}^0 dt = \\
& \frac{3t^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6t^2}{2} \Big|_0^1 - 3 \int_{-1}^0 t^2 dt + 2t \Big|_{-1}^0 = \\
& \frac{3t^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{6t^2}{2} \Big|_0^1 - 3 \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 + 2t \Big|_{-1}^0 = \\
& 1 + 3 - 1 - 2 = 1
\end{aligned}$$

2. Analise uma “coincidência”: a questão anterior você pode separar em dois pares de itens: no primeiro item, de cada par,

$$\oint_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy = 0$$

e no segundo item

$$\oint_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy \neq 0,$$

obviamente com uma pequena diferença entre  $(u, v)$  de cada par. Calcule  $(x + iy)^3 e 3(x + iy)^2$  ao fazer esta análise e tente descobrir qual a “diferença” envolvida com a “coincidência”.

**Solução 34** No primeiro par temos  $(x + iy)^3$  e uma modificação da terceira potência que deixa de ser uma terceira potência. O mesmo acontece com o segundo par e a segunda potência de  $(x + iy)$ . Não se trata de nenhuma coincidência, como veremos no capítulo 3, independência de caminhos. Veja também o próximo exercício.

3. Troque, nos itens da questão 1 a curva  $\gamma$  pelo círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  e verifique que a “coincidência” não se repete.

**Solução 35** (a) Vamos usar a parametrização

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^1 & \equiv \{(x, y) = (\cos(t), \sin(t))_{t \in [0, 2\pi]}\}. \\
& \oint_{\mathbb{S}^1} u(x, y) dx + v(x, y) dy =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\mathbb{S}^1} (x^3 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy = \\
&= \int_0^{2\pi} (x^3 - 3xy^2)d(\cos(t))dt + \int_0^{2\pi} (3x^2y - y^3)d(\sin(t))dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t))d(\cos(t))dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} (3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t))d(\sin(t))dt = \\
&= - \int_0^{2\pi} (\cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t))\sin(t)dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} (3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t))\cos(t)dt = \\
&= - \int_0^{2\pi} \cos^3(t)\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} 3\cos(t)\sin^3(t)dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} 3\cos^3(t)\sin(t)dt - \int_0^{2\pi} \sin^3(t)\cos(t)dt = \\
&= \int_1^{-1} u^3 du + \int_0^0 3u^3 du - \int_1^1 3u^3 du - \int_0^0 u^3 du = 0
\end{aligned}$$

(b) Vamos usar a parametrização

$$\mathbb{S}^1 \equiv (x, y) = (\cos(t), \sin(t))_{t \in [0, 2\pi]}.$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbb{S}^1} u(x, y)dx + v(x, y)dy &= \oint_{\mathbb{S}^1} (x^3 - xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy = \\
&= \int_0^{2\pi} (x^3 - xy^2)d(\cos(t))dt + (3x^2y - y^3)d(\sin(t))dt = \\
&= - \int_0^{2\pi} (\cos^3(t) - \cos(t)\sin^2(t))\sin(t)dt + (3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t))\cos(t)dt = \\
&= - \int_0^{2\pi} \cos^3(t)\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^3(t)dt + \int_0^{2\pi} 3\cos^3(t)\sin(t)dt - \int_0^{2\pi} \sin^3(t)\cos(t)dt = 0
\end{aligned}$$

porque todas as integrais são da forma

$$\int_a^a u^n du$$

(c) As integrais neste caso se reduzem a expressões da forma

$$\int_a^a u^n du$$

sendo portanto nulas.

(d) As integrais neste caso se reduzem a expressões da forma

$$\int_a^a u^n du$$

sendo portanto nulas.

Este exemplo será útil no capítulo 3 quando estudarmos independência de caminhos e diferencial exata.

---

4. Verifique que, se  $z = (x + iy)$  então

$$\begin{aligned} z^3 &= f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y) \\ 3z^2 &= (3x^2 - 3y^2, 6xy) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = \frac{d}{dz} z^3 \\ 3z^2 &= (3x^2 - 3y^2, 6xy) = -i\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

**Solução 36** Direto, basta fazer as contas e verificar as identidades.

---

5. Considere um campo vetorial  $(u(x, y), v(x, y))$  definido em um domínio  $\Omega$  do plano,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dados dois pontos arbitrário  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \Omega$  dizemos que  $\oint u(x, y)dx + v(x, y)dy$  não depende de caminhos se para quaisquer curvas  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$  ligando  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  tivermos

$$\oint_{\gamma_1} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \oint_{\gamma_2} u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

Prove que  $\oint u(x, y)dx + v(x, y)dy$  ser independente de caminhos equivale a  $\oint_{\partial W} u(x, y)dx + v(x, y)dy = 0$  para todo sub-domínio  $W \subset \Omega$ . em que  $\partial W$  representa a fronteira da região  $W$ .

**Solução 37** Vamos usar uma notação mais curta para

$$dz = udx + vdy$$

que depois veremos que tem um sentido próprio. Agora é apenas uma notação.

Considere  $W$  um sub-domínio de  $\Omega$ . A fronteira de  $W$ ,  $\partial W$ , é então formada por uma ou mais curvas fechadas contidas também em  $\Omega$ , que são as fronteiras das diversas componentes de  $W$ . Basta resolvermos o caso de uma das componentes ou supormos que  $W$  tem uma única componente e portanto que  $\partial W$  é uma curva fechada contida em  $\Omega$ .

- $\Rightarrow$  Suponhamos que  $dz = udx + vdy$  seja independente de caminhos e consideremos em  $\gamma = \partial W$  dois pontos arbitrários  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  em  $\gamma$ . Como  $dz$  é independente de caminhos, então

$$\oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz = \oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz$$

em que as integrais acima são consideradas em cada um dos dois caminhos que os pontos  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  determinam sobre  $\gamma$ . Se observarmos que

$$\oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz = - \oint_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{P}} dz$$

porque de uma integral pode apenas haver uma mudança de sinal nas parametrizações, e obviamente, vamos escolher este caso para as parametrizações, então

$$\oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz = - \oint_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{P}} dz = \oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz + \oint_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{P}} dz = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} dz = 0$$

porque a última integral apenas resume que na penúltima a curva  $\gamma$  foi percorrida de  $\mathcal{P}$  até  $\mathcal{P}$ .

- $\Leftarrow$  Suponhamos agora que para qualquer sub-domínio  $W$  de  $\Omega$ ,

$$\oint_{\partial W} dz = 0.$$

Consideremos agora dois pontos  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \Omega$  e dois caminhos  $\gamma_1, \gamma_2$  ligando estes dois pontos. Observando que podemos designar por  $-\gamma_2$  o caminho que liga  $\mathcal{Q}$  a  $\mathcal{P}$  se  $\gamma_2$  ligar  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{Q}$  nesta ordem, porque há uma parametrização dos dois caminhos que diferem apenas por uma troca de sinal, então  $\gamma_2 \cup -\gamma_2$  é uma curva fechada que limita (um ou mais) sub-domínios de  $\Omega$ . Mais de um, eventualmente, porque estas curvas podem se cortar, mas a hipótese vale para todas as componentes assim obtidas e basta considerarmos o caso em que as curvas não se cortam e que temos apenas uma componente. Seja  $W$  esta única componente com

$$\partial W = \gamma_2 \cup -\gamma_2$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz &= \int_{\gamma_1} dz ; \oint_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} dz = \int_{-\gamma_2} dz \\ I &= \int_{\gamma_1} dz - \int_{\gamma_2} dz ; I = \int_{\gamma_1} dz + \int_{-\gamma_2} dz ; I = \int_{\gamma_1 \cup -\gamma_2} dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \int_{\partial W} dz = 0 \Rightarrow ; \Rightarrow \int_{\gamma_1} dz = \int_{\gamma_2} dz \end{aligned}$$

mostra que é independente a escolha do caminho que liga os dois pontos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ .

6. Verifique que  $(u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$  não é independente de caminhos em um domínio qualquer do plano contendo a origem.

**Solução 38** Vamos seguir usando a notação introduzida anteriormente:

$$dz = udx + vdy.$$

O leitor deve meditar sobre os dois resultados, este e o do exercício 6. Para mostrarmos que  $dz$  não é independente de caminhos, temos que encontrar uma curva fechada  $\gamma$  tal que

$$\oint_{\gamma} dz = 0$$

devido ao exercício 5. Ao mesmo tempo os exercícios 6 e 3 mostram que isto pode não ser fácil... No exercício 6 temos dois diferenciais  $dz$  e uma curva fechada tal que

$$\oint_{\gamma} dz = 0$$

quando sabemos, a partir do exercício 3 que a segunda e a quarta expressão diferencial dependem do caminho. Isto apenas significa que existe alguma curva fechada  $\alpha$  sobre a qual

$$\oint_{\alpha} dz \neq 0.$$

Em outras palavras,  $dz$  mesmo sendo dependente do caminho pode haver uma curva fechada  $\gamma$  tal que

$$\oint_{\gamma} dz = 0.$$

Esta situação, que parece caótica, vai ficar inteiramente clarificada no capítulo 3. Aqui ela representa apenas “exercícios de integral de linha”, e, obviamente, uma antecipação de conceitos, apesar de que estes pareçam pouco interessantes. Consulte o capítulo 3 para entender a diferença.

Vamos experimentar o cálculo de  $dz$  sobre  $\mathbb{S}^1$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbb{S}^1} dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} u(\cos(t), \sin(t))d(\cos(t)) + v(\cos(t), \sin(t))d(\sin(t)) = \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t)dt - \sin(t)\cos(t)dt = 0 \end{aligned}$$

*Somente com variáveis complexas é que poderemos entender bem o que está acontecendo aqui, os reais são deficientes. Observe que  $dz$  não está definida na origem  $(0,0)$  que se encontra dentro de  $\mathbb{S}^1$ , e  $\mathbb{S}^1$  não é uma curva fechada se considerarmos  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , tem um salto de  $2\pi i$  quando se percorre a curva completamente. Isto fica invisível aqui.*

---



# Capítulo 8

## O teorema de Green

### 8.1 Teorema de Green

Existem vários tipos de *integral de linha*, numéricas ou vetoriais depende do tipo de operação que aparecer no integrando. Por exemplo, a Física define **trabalho**

$$\int_{\gamma} F(\vec{s}) \cdot ds$$

onde temos o produto escalar de uma *força*  $F$  aplicada a uma partícula que percorre uma curva  $\gamma$  no espaço. Vamos discutir este tipo de integral aqui como preparação para integral de superfícies.

Na linguagem habitual deste contexto as funções vetoriais são chamadas de *campos vetoriais*.

Vamos dar um sentido matemático à noção física de *campo vetorial conservativo* ou, em oposição a este conceito, o de *campo vetorial não conservativo* e por este caminho enunciar o Teorema de Green e fazer algumas aplicações dele.

#### 8.1.1 Campos vetoriais conservativos ou não

As funções univariadas tem uma derivada. As funções multivariadas e as funções vetoriais (campos vetoriais) têm várias derivadas parciais que formam sua matriz jacobiana que é a *derivada* destas funções.

A *matriz jacobiana*, ou simplesmente a *jacobiana* é uma matriz de funções. Nem sempre uma matriz de funções é uma jacobiana.

**Exercícios 19** *Derivadas parciais*

1. Derivadas

(a) Calcule as derivadas (jacobianas) das funções

$$\begin{array}{lll} F(x, y) = & F(x, y) = & F(x, y, z) = \\ 1) \ x \cos(y) & 2) \ (x \cos(y), y \cos(x)) & 3) \ (xy, yz, zx) \\ 4) \ (1, xy, xy) & 5) \ (y, xy, x) & 6) \ (y, z, x) \end{array}$$

(b) Justifique porque as matrizes abaixo não são derivadas:

$$\begin{array}{lll} f(x, y) & f(x, y, z) & f(x) \\ 1) \ xy & 2) \ (x, y, xy, z) & 3) \ (x, 2y) \end{array}$$

**Solução 39** (a) Cálculo das derivadas.

$$F(x, y) = x \cos(y) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = (x \cos(y), y \cos(x)) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \\ -y \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = (xy, yz, zx) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = (1, xy, xy) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = (y, xy, x) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x, y, z) = (y, z, x) \mapsto J(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) i.  $f(x, y) = xy$  é bivariada, para ser uma derivada teria que ter duas coordenadas, só tem uma, não pode ser uma derivada.  
 ii.  $f(x, y, z) = (x, y, xy, z)$  tem tres variáveis uma função de tres variáveis, para ser uma derivada, tem que ter tres coordenadas.  $f$  tem quatro coordenadas, não pode ser uma derivada.  
 iii.  $f(x) = (x, 2y)$  está mal definida, tem uma variável  $y$  que é impossível de ser usada. Nem função é.

2. Seja uma função diferenciável  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Escolha e justifique como será sua derivada:

- 1)  $J(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$     2)  $J(F) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 3)  $J(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$     4)  $J(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$

**Solução 40**  $F$  tem como conjunto de saída o  $\mathbb{R}^n$  então tem  $n$  variáveis.

O conjunto de chegada é o  $\mathbb{R}^m$  então  $F$  tem  $m$  funções coordenadas. Isto significa que  $F$  vai ter  $nm$  derivadas parciais, cada função coordenada vai ter  $n$  derivadas, e a derivada vai ter  $nm$  funções coordenadas.

O conjunto de chegada da derivada é  $\mathbb{R}^{nm}$ . A opção correta é a (4), a derivada tem o mesmo número de variáveis que a função original, e tem  $nm$  coordenadas. Vai ser uma matriz  $m \times n$ , em cada uma das  $m$  linhas (coordenadas) de  $J(F)$  vamos escrever as  $n$  derivadas parciais relativas às  $n$  variáveis (colunas).

3. Escreva a expressão diferencial (o diferencial) da função

$$F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

**Solução 41** O diferencial é uma expressão linear cujos coeficientes são as derivadas (parciais) e as variáveis são os diferenciais das variáveis:

$$dF = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)dr - r \sin(\theta)d\theta \\ \sin(\theta)dr + r \cos(\theta)d\theta \end{pmatrix}$$

Quando uma função tiver uma única coordenada, o seu diferencial é frequentemente chamado de diferencial total. Cada linha da última matriz é um diferencial total. Esta denominação reflete a confusão que ainda hoje se tem do conceito de diferencial ainda eivado de mitos. Quando se deriva implicitamente se chega, naturalmente, ao diferencial total que é um produto de matrizes. Veja que as linhas da última matriz, são diferenciais totais das coordenadas de  $F$ .

4. Descubra uma função cuja derivada seja

$$1) \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 2y & 2xy \\ -2xyy & 2y \end{pmatrix} \qquad (8.1)$$

**Solução 42** (a) A função tem duas coordenadas que estão sendo designadas por  $x, y$  e é uma matriz  $2 \times 2$  portanto  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e temos

$$J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \implies F = (2xy, 2xy^2)$$

(b)

5. Derive implicitamente

$$\frac{z = \quad z = \quad z =}{1) xy \quad 2) 2xz + xy \quad 3) x^2 + 2xyz + y^2}$$

### 8.1.2 Forma trivial do Teorema de Green

Vamos descobrir, nesta seção, um dos teoremas mais intrigantes e envolventes da análise matemática. Ele representa uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo Integral e serve para associar integrais cujos domínios tem uma diferença na dimensão de uma unidade: uma região  $\Omega$  e sua fronteira  $\partial\Omega$

A formulação pela qual vamos passar aqui serve para determinar quando um campo vetorial é conservativo.

Precisamos do conceito de *curva fechada*  $\gamma$ , é aquela que em qualquer parametrização

$$[a, b] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n ; \gamma(a) = \gamma(b)$$

quer dizer que a extremidade final coincide com a inicial.

Se  $F$  for uma função diferenciável, então *naturalmente*  $dF$  é uma *diferencial exata*. Definimos assim uma **diferencial exata**, uma expressão obtida pela derivação de uma função. Esta definição não é boa porque ela não oferece um método para verificar explicitamente quando uma expressão é uma *diferencial exata*, em breve estaremos em posição de fazer uma definição acompanhada um método de verificação da mesma.

A forma típica com que escrevemos diferenciais é:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy ; P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \dots$$

e, por exemplo, se  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  for uma diferencial exata, então existe uma função bivariada, de classe  $C^\infty$  em um aberto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$ , tal que (quando  $n = 2$ )

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} ; Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Vamos escrever a teoria aqui para  $\mathbb{R}^2$  uma extensão para  $n > 2$  é relativamente simples e isto será feito em capítulo próximo.

#### Exercícios 20 Teorema de Green

1. Verifique quais das expressões abaixo é uma diferencial exata:

$$\frac{dF}{1) 3xdx} \quad \frac{dF}{2) ydx + xdy} \quad \frac{dF}{3) y^2dx + 2xydy}$$

$$4) y^2dx + 2ydy \quad 5) yzdx + xzdy + xydz \quad 6) e^{-x^2} dx$$

2. Para cada uma das expressões  $Pdx + Qdy$  da questão anterior, calcule  $\oint_\gamma Pdx + Qdy$  em que  $\gamma$  é o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$

$\gamma$

Ver na figura (fig. 8.2), página 237, o significado da orientação das curvas,  $\oint$  indica que a integral deve ser calculada no sentido positivo (contrário aos dos ponteiros do relógio) sobre a curva.

3. Prove que se  $\gamma$  for uma curva fechada e  $Pdx + Qdy$  for uma diferencial exata, então

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$$

4. Calcule as derivadas mistas de ordem 2 das seguintes funções

$$\begin{array}{lll} \frac{F(x,y)}{1) x^2 y \cos(xy)} & \frac{F(x,y,z)}{2) xyz \sin(xy)} & \frac{F(x,y,z,w)}{3) x^2 \cos(xz)y} \\ 4) \cos^2(xy)x^2 y^3 & 5) x^2 y z^2 e^{xy} & 6) e^{xyz^2} z^3 \end{array}$$

5. Teorema de Schwarz Expanda os quocientes de diferenças que, respectivamente, definem  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$  e verifique que, se cada uma das derivadas de primeira ordem for contínua, então

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Identifique exatamente onde é necessário a continuidade de cada uma das derivadas de primeira ordem.

**Solução 43** Desenvolvendo  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \lim_{\Delta x=0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a+\Delta x, b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}{\Delta x} = \\ & \lim_{\Delta x=0} \lim_{\Delta y=0} \frac{\frac{F(a+\Delta x, b+\Delta y) - F(a+\Delta x, b)}{\Delta y} - \frac{F(a, b+\Delta y) - F(a, b)}{\Delta y}}{\Delta x} \\ & \lim_{\Delta y=0} \lim_{\Delta x=0} \frac{F(a+\Delta x, b+\Delta y) - F(a+\Delta x, b) - F(a, b+\Delta y) + F(a, b)}{\Delta x \Delta y} = I \end{aligned}$$

Desenvolvendo agora  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y \partial x} &= \lim_{\Delta y=0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b+\Delta y) - \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\Delta y} = \\ & \lim_{\Delta y=0} \lim_{\Delta x=0} \frac{\frac{F(a+\Delta x, b+\Delta y) - F(a, b+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F(a+\Delta x, b) - F(a, b)}{\Delta x}}{\Delta y} \\ & \lim_{\Delta y=0} \lim_{\Delta x=0} \frac{F(a+\Delta x, b+\Delta y) - F(a, b+\Delta y) - F(a+\Delta x, b) + F(a, b)}{\Delta y \Delta x} \end{aligned}$$

Vemos assim que, independente de como calcularmos as derivadas segundas mistas, chegaremos ao mesmo quociente de diferenças de segunda ordem, portanto, se o limite existir, elas têm que ser iguais.

Os cálculos feitos acima somente serão válidos se cada uma das derivadas de primeira ordem for contínua, numa vizinhança do ponto  $(a, b)$ , caso contrário não poderemos calcular a outra derivada, iteradamente. O teorema fica assim:

**Teorema 27** Teorema de Schwarz

Se uma função multivariada tiver suas derivadas de primeira ordem contínuas e deriváveis então

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}$$

as derivadas mistas de segunda ordem, e consequentemente de ordem superior, nas mesmas condições, são iguais.

## 6. independência da parametrização

(a) Considere a parametrização

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))_{t \in [0,1]} = \mathbb{S}^1$$

para o círculo trigonométrico. Calcule o comprimento de arco considerando esta parametrização.

(b) Considere a parametrização

$$(\cos(t), \sin(t))_{t \in [-\pi, \pi]} = \mathbb{S}^1$$

para o círculo trigonométrico. Calcule o comprimento de arco considerando esta parametrização.

(c) Verifique que

$$\int_0^\pi dt + \int_0^\pi dt$$

também é o comprimento de arco de  $\mathbb{S}^1$  e descreva qual foi a parametrização usada.

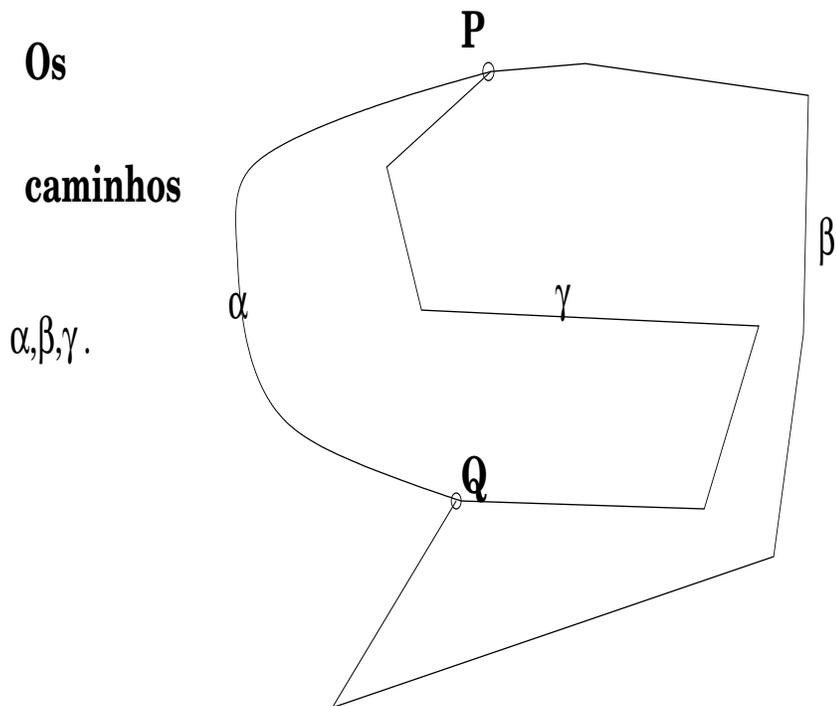
## Observação 28 A independência de caminho

Trocar a parametrização força uma troca na escala, sem dúvida, isto não impede que falemos em **independência de parametrização**.

Outra coisa é **independência de caminho**. As funções multivariadas oferecem uma nova visão. Veja a figura (fig. 8.1) página 233,

Vamos dizer que uma expressão diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$



## Distintos caminhos entre os pontos P,Q

Figura 8.1: Os distintos caminhos entre  $P, Q$  no domínio  $\Omega$ , ;  $\alpha, \beta, \gamma$

é independente de caminhos, se se dados dois pontos  $M, N$  e dados dois quaisquer caminhos que liguem estes dois pontos,  $\gamma, \alpha$  então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\alpha} Pdx + Qdy$$

Se uma expressão diferencial for independente de caminhos, nos a chamaremos de diferencial exata.

7. Mostre que se  $Pdx + Qdy$  for uma diferencial exata, então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$$

para qualquer curva fechada.

8. Mostre que a equação

$$F(X) = \oint_M^X Pdx + Qdy$$

define uma função no plano se  $Pdx + Qdy$  for uma diferencial exata.

9. Considere uma diferencial exata  $dF = Pdx + Qdy$  e um ponto  $M$  no domínio  $\Omega$  em que  $dF$  está definida. Chame  $F$  a única função definida por

$$F(X) = \oint_M^X Pdx + Qdy$$

e calcule  $\frac{\partial F}{\partial x}$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}$ . Sugestão, como  $dF$  não depende de caminhos, use caminhos paralelos aos eixos ao calcular os quocientes de diferenças.

10. Calcule  $\oint_E (y + 3x)dx + (y - x)dy$  em que  $E$  é a curva  $x^2 + 4y^2 = 4$

**Solução 44** Temos que começar escolhendo uma parametrização para a curva  $E$  que é uma elipse, logo uma deformação adequada de uma parametrização do círculo trigonométrico funciona: Como  $x = 0 \implies y = 1$  e  $y = 0 \implies x = 2$  vemos que a distorção adequada é

$$E = (x(t), y(t)) = (2 \cos(t), \sin(t))_{t \in [0, 2\pi]}$$

$$\begin{aligned} \oint_E (y + 3x)dx + (y - x)dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} -2(\sin(t) + 6 \cos(t)) \sin(t) dt + \int_0^{2\pi} (\sin(t) - 2 \cos(t)) \cos(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2(t) - 12 \cos(t) \sin(t)) dt + \int_0^{2\pi} (\sin(t) \cos(t) - 2 \cos^2(t)) dt = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt - 12 \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt + \int_0^{2\pi} (\sin(t) \cos(t) - dt) = \\ &\quad -4\pi \end{aligned}$$

11. Qual das frases abaixo descreve o significado de

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$$

- É o comprimento de arco de  $\gamma$ .

- É o trabalho exercido pela força  $(P, Q)$  ao longo da trajetória  $\gamma$ .
- É nulo.
- É a área de uma região.

**Solução 45** • Como o comprimento de arco é integral da velocidade e o campo vetorial não é derivada de uma função vetorial de variável escalar (tempo) então a primeira frase não serve.

- A terceira não tem consistência.
- A quarta poderia ser verdadeira, mas é preciso de mais hipóteses portanto é incompleta.
- A segunda corresponde a integral, é o produto escalar de um campo vetorial  $(P, Q)$  com o diferencial da curva, corresponde à definição de trabalho da força  $(P, Q)$  ao longo da trajetória  $\gamma$ .

12. Considere a expressão diferencial  $Pdx + Qdy$  em que  $P, Q$  são funções integráveis nas variáveis  $x, y$ . Verifique que

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Omega} \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy \\ \bullet \int_{\Omega} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx \end{aligned}$$

em que  $\Omega$  é uma região do plano limitada e sua fronteira  $\partial\Omega$  tem um comprimento finito.

13. Teorema de Green Verifique que, se

$$Pdx + Qdy$$

for uma diferencial exata, e  $\Omega$  for um domínio do plano limitado por uma curva fechada  $\partial\Omega$ , então

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

**Observação 29** Campo conservativo

Como prometemos na introdução, vamos definir matematicamente o que os físicos chamam campo conservativo.

Os campos conservativos são as funções vetoriais que definem diferenciais exatas, no formato da integral de linha do Teorema de Green

$$Pdx + Qdy$$

ou ainda aqueles que tornam o Teorema de Green trivial, ambas as integrais são nulas para qualquer curva fechada.

Isto quer dizer que o trabalho de um campo conservativo ao longo de uma curva fechada, é zero. Mas o Teorema de Green vale em geral para campos conservativos ou não:

Seja  $(P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial. Então

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Com frequência o Teorema de Green é enunciado assim

$$\int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$$

e esta sutil diferença tem um sentido: a integral de linha, que o símbolo  $\oint$  indica que ela deve ser calculada no sentido positivo da fronteira de  $\Omega$ , mede a variação total do campo vetorial  $(P, Q)$  sobre  $\Omega$  e nestes termos o Teorema de Green é uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo. Veja que ele relaciona os valores de uma parte da derivada do campo diferencial sobre um domínio de dimensão dois e calcula esta variação ao longo de um domínio de dimensão 1 que é a fronteira de  $\Omega$ .

A integral de linha trouxe um novo conceito que era pouco visível nas integrais simples (onde ele já existia), o sentido em que a integral é calculada. Este aspecto agora se reveste de uma outra característica, agora dizemos,

- Calculamos a integral de  $f$  sobre  $\gamma$ .
- A orientação de  $\gamma$  é positiva (ou negativa).
- Antes dizíamos:  $\int_a^b f$  ou  $\int_b^a f$ .

Veja na figura (fig. 8.2) página 237,

É fácil de falar de orientação e até expressar de forma geométrica o que isto significa. A definição formal é mais complicada, e nós a deixaremos de lado por enquanto. Voltaremos a este assunto quando estudarmos as superfícies.

Diremos que uma orientação é a positiva se ela contrariar o sentido em que se movem os ponteiros do relógio. Na (fig. 8.3) você pode ver uma forma geométrica de definir orientação. Veja página 238.

Uma curva, no interior de um domínio pode ter uma orientação incompatível com a orientação da fronteira.

Veja na figura (fig. 8.3) página 238, a curva  $\gamma$ , no interior de  $\Omega$  que não pode ser orientada de forma compatível com a fronteira. Na figura mencionada, há tres curvas fechadas que estão sendo usadas para transferir a orientação. Elas mostram a compatibilidade da orientação da fronteira de  $\Omega$  e se orientarmos a curva  $\gamma$  de forma compatível com alguma das componentes de  $\partial\Omega$  esta orientação fica incompatível com alguma outra componente de  $\partial\Omega$ .

Na mesma figura você pode ver

- as componentes de  $\partial\Omega$  em  $A, B, C$ ,
- observar a compatibilidade da orientação destas componentes,
- e verificar que a orientação da curva  $\gamma$  é incompatível (contrária) com a orientação de  $\partial\Omega$ ,
- Na região  $B$  um “transferidor de orientação” mostra que a orientação de  $\gamma$  é compatível com a orientação da componente de  $\partial\Omega$  em  $B$ .

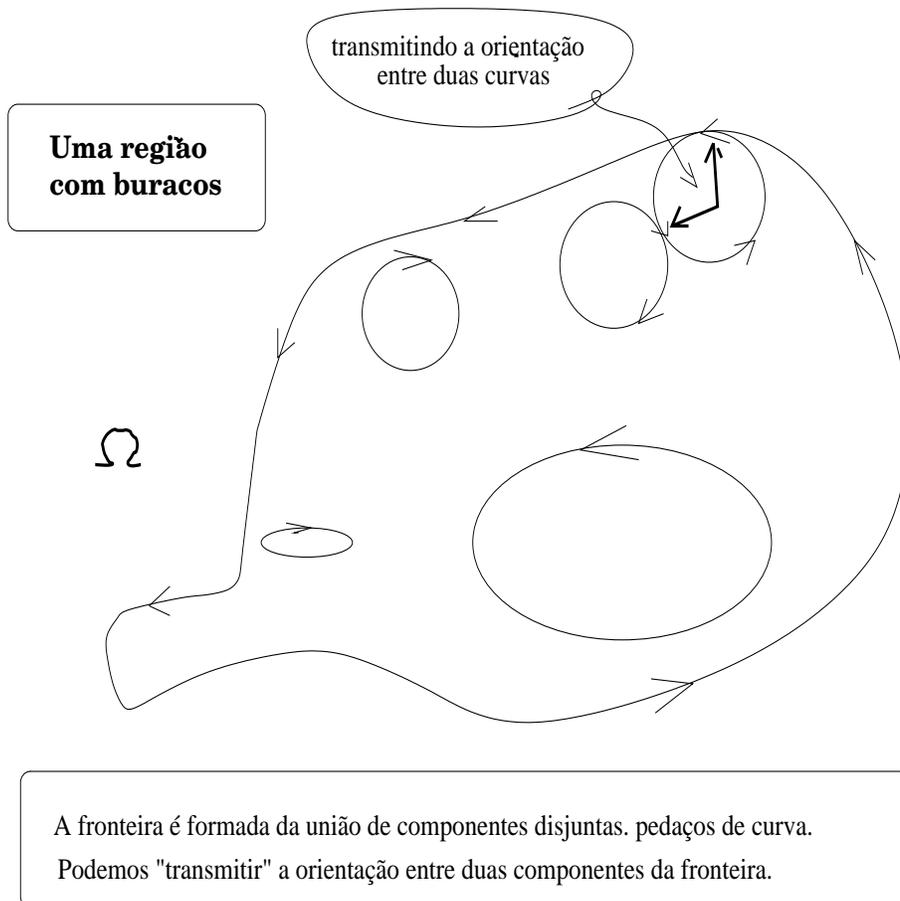


Figura 8.2: A fronteira de um domínio inclui as fronteiras dos seus buracos... a orientação da fronteira pode ser determinada por tangência.

14. Calcule o trabalho do campo vetorial

$$(y + x)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

ao longo da elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

15. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy$$

em que  $\gamma$  é a fronteira do retângulo tendo por vértices

$$(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1).$$

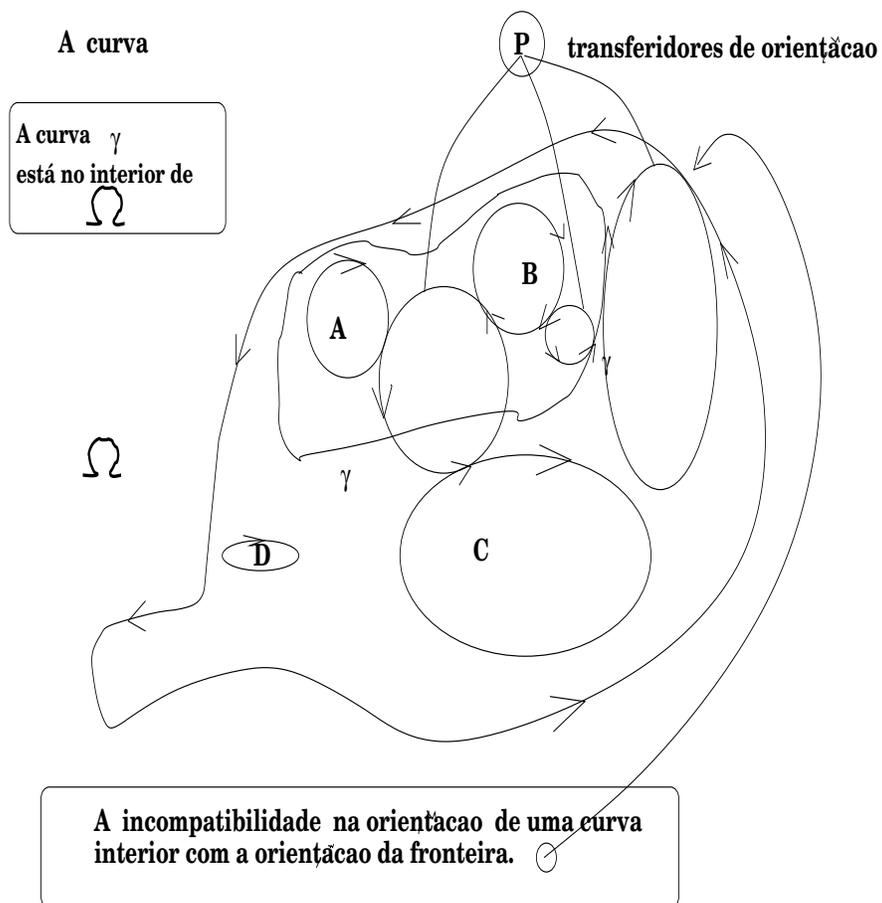


Figura 8.3: A orientação de uma curva pode ser incompatível com a orientação da fronteira.

16. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

em que  $\gamma$  é a fronteira do retângulo tendo por vértices

$$(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1).$$

17. Calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

em que  $\gamma$  é a fronteira do círculo trigonométrico.

18. Verifique que  $\oint_{\partial\Omega} xdy$  é a área de  $\Omega$  sob a suposição de que esta área exista e que sua fronteira tenha comprimento finito. Calcule a área do círculo trigonométrico usando esta fórmula.

19. Analise a figura (fig. 8.4) página 239,

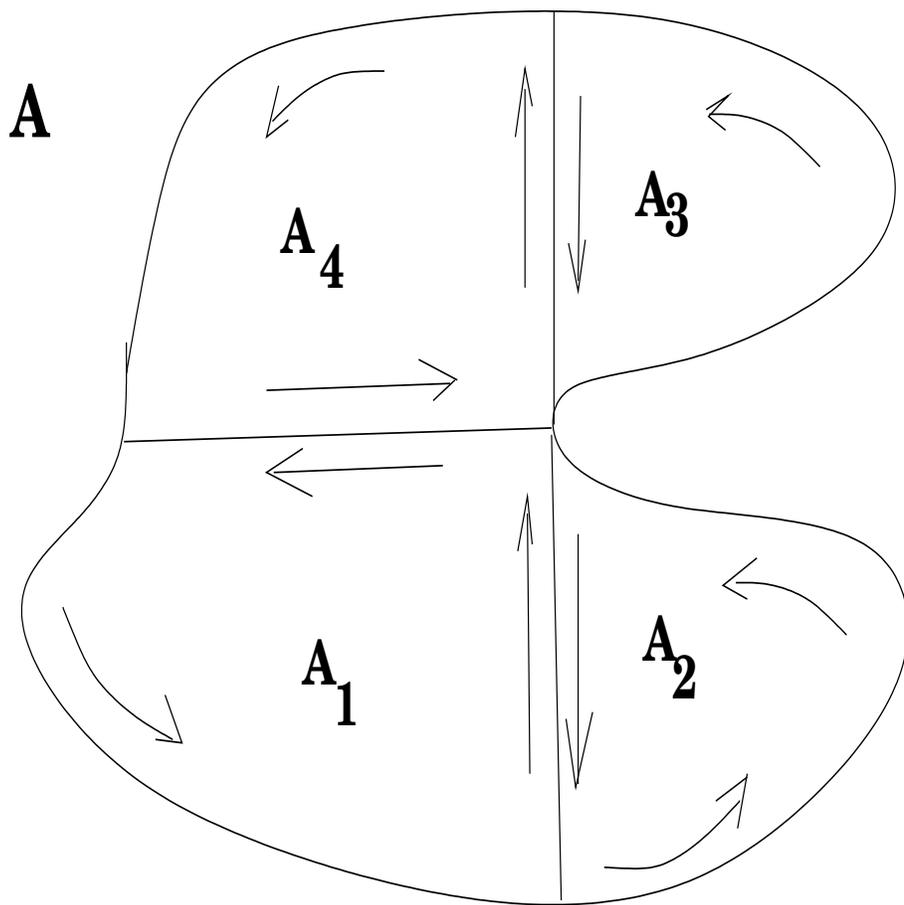


Figura 8.4: A independência de caminhos; as curvas são percorridas de acordo com a indicação das setas.

e mostre que

$$\oint_{\partial A} Pdx + Qdy = \sum_{k=1}^4 \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy$$

desde que nenhuma das curvas que aparecem no desenho passe por um ponto de singularidade de  $P$  ou de  $Q$ .

**Solução 46** Pelo Teorema de Green,

$$\oint_{\partial A} Pdx + Qdy = \int_A \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^4 \int_{A_k} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

porque as regiões são disjuntas e apenas subdividimos a integral dupla na soma das integrais duplas de cada uma das regiões. Se aplicarmos o Teorema de Green em cada uma das sub-regiões, vamos ter:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy &= \int_{A_k} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \sum_{K=1}^4 \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy &= \sum_{K=1}^4 \int_{A_k} \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \sum_{K=1}^4 \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy &= \int_A \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Considerando que as sub regiões  $A_k$ , tomadas duas a duas na sequência,  $(A_3, A_4), (A_4, A_1), (A_1, A_2)$  tem um pedaço da fronteira em comum e que para cada uma delas é percorrido de forma negativa para outra, quer dizer, as integrais de linha sobre as fronteira internas vão se anular duas a duas, ficando somente a integral de linha sobre a fronteira externa, ficamos finalmente na última equação com:

$$\sum_{K=1}^4 \oint_{\partial A_k} Pdx + Qdy = \oint_{\partial A} Pdx + Qdy = \int_A \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

finalizando o que queríamos demonstrar.

20. derivadas mistas Mostre que as derivadas mistas de segunda ordem de

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \Leftarrow (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \Leftarrow (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.2)$$

são iguais. Justifique por que  $f$  tem por derivada  $\text{grad}(f)$  e, consequentemente, é a primitiva de  $\text{grad}(f)$  no sentido em que este termo tem no Cálculo Diferencial e Integral univariado.

**Solução 47** Se as derivadas mistas de segunda ordem forem iguais então

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (8.3)$$

é um diferencial exato. Diferenciais exatos se anulam sobre curvas fechadas (são campos conservativos) o que induz a independência de caminhos no cálculo das integrais de linha e permite a definição de uma primitiva com condição inicial

$$P \in \text{dom}(f)$$

ligada por um caminho arbitrário contido em  $\text{dom}(f)$  a um ponto

$$(x, y) \in \text{dom}(f)$$

exatamente como se faz no cálculo univariado.

Cálculo das derivadas parciais.

$$f(x, y) = \frac{M}{P} = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{M_x P - M P_x}{P^2} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{M_y P - M P_y}{P^2} \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx -2PP_x(M_y P - M P_y) + P^2(M_{xy}P + M_y P_x - M_x P_y - M P_{xy}) \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \approx -2PP_y(M_x P - M P_x) + P^2(M_{yx}P + M_x P_y - M_y P_x - M P_{yx}) \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \quad (8.9)$$

$$(-2P^2 P_x M_y + 2PP_x P_y M) + (M_{xy}P^3 + M_y P^2 P_x - M_x P^2 P_y - 0) \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \approx \quad (8.11)$$

$$(-2P^2 P_y M_x + 2PP_y P_x M) + (M_{yx}P^3 + M_x P^2 P_y - M_y P^2 P_x - 0) \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad (8.13)$$

em que no cálculo das derivadas mistas de segunda ordem escrevemos apenas o "numerador" uma vez que o denominador seria o mesmo.

Consequentemente  $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$  é um diferencial exato e assim é um campo vetorial conservativo .

A integral de linha de  $dz$  sobre qualquer curva fechada contida no  $\text{dom}(f)$  é zero. Portanto

$$f(x, y) = \oint_P^{(x,y)} dz$$

fica bem definida uma vez que a integral não depende do caminho ligando o ponto  $P$  ao ponto  $(x, y)$ .

Veja na figura (fig. 8.5) página 242,

$$\oint_{\eta} dz = \oint_{\gamma} dz$$

o que torna bem definido o valor  $f(x, y)$  como primitiva de  $dz$  com valor inicial  $P$ .

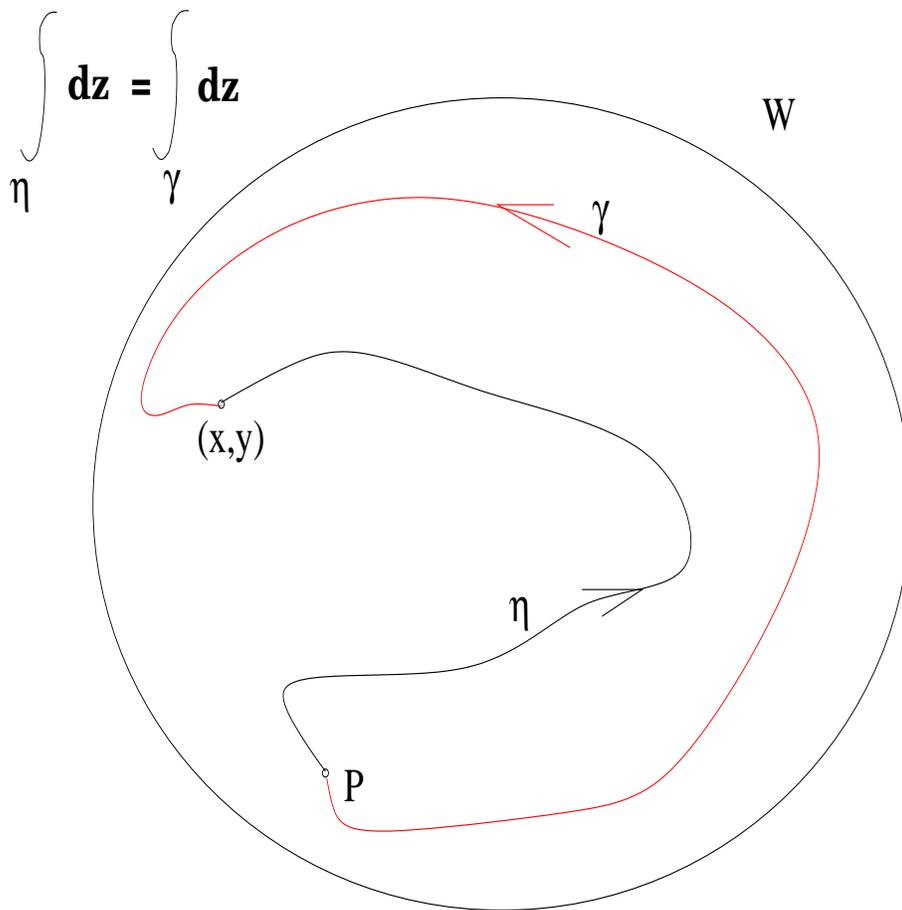


Figura 8.5: A independência de caminhos

Vamos calcular a integral de linha sobre a fronteira do retângulo

$$Q = [0, 1] \times [0, 1]$$

Parametrização de  $\partial Q$  com as equações

$$(t, 0), (1, t), (-t, 1), (0, -t) ; t \in [0, 1] \quad (8.14)$$

observando que  $dx = 0$  em duas destas parametrizações que  $dy = 0$  em outras duas, o que reduz a zero, quatro, das oito integrais que temos para calcular. Chamaremos  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  sucessivamente os lados de  $\partial Q$  em que  $\gamma_1$  coincide com o intervalo  $[0, 1]$  do eixo  $OX$  com sua orientação positiva

habitual, e desta forma estamos também escolhendo a orientação de  $\partial Q$ .

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0 \quad (8.15)$$

$$dx = 0 \text{ em } \gamma_2 \implies \oint_{\gamma_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0 \quad (8.16)$$

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \quad (8.17)$$

$$= - \int_0^1 \frac{(3t^2-1)(t^2+1)+2t(t-t^3)}{t^2+1} dt \quad (8.18)$$

$$= - \int_0^1 \frac{3t^4+2t^2-1+2t^2-2t^4}{t^2+1} dt \quad (8.19)$$

$$= - \int_0^1 \frac{t^4+4t^2-1}{t^2+1} dt \quad (8.20)$$

$$dx = 0 \text{ em } \gamma_4 \implies \oint_{\gamma_4} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0 \quad (8.21)$$

$$dy = 0 \text{ em } \gamma_1 \implies \oint_{\gamma_1} \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (8.22)$$

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_0^1 \frac{-(3t^2-1)(t^2+1)-2t(t-t^3)}{1+t^2} dt = \quad (8.23)$$

$$= \int_0^1 \frac{-3t^4-2t^2+1-2t^2+2t^4}{1+t^2} \quad (8.24)$$

$$= \int_0^1 \frac{-t^4-4t^2+1}{1+t^2} \quad (8.25)$$

$$dy = 0 \text{ em } \gamma_3 \quad (8.26)$$

$$\oint_{\gamma_4} \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (8.27)$$

$$(8.28)$$

Somando as duas integrais não nulas restantes, temos

$$\oint_{\gamma} dz = - \int_0^1 \frac{2t^4+8t^2-2}{(1+t^2)^2} \quad (8.29)$$

$$\oint_{\gamma} dz = 0 \quad (8.30)$$

A última integral foi calculada com máxima.

---

## 8.2 Rotação e fluxo

### Resumo.

Quase toda a teoria de integralção que estamos estudando neste livro foi desenvolvida em função da Física, em particular devido as Teorias da Gravitação e do Campo Magnético. Os nomes empregados são uma consequência disto, como **potencial, fluxo, trabalho**.

Por exemplo,  $z = F(x, y)$ ;  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada um *campo escalar*, sua derivada,  $J(F) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se chama de *campo vetorial*. Dada uma constante,  $c$ ,  $F(x, y) = c$  determina uma curva de nível de  $F$  mas se  $F$  representar “temperatura”, as curvas de nível passam a se chamar *isotérmicas*, quer dizer, as curvas do domínio onde se tem mesma temperatura.

Veja a figura (fig. 8.6) página 245, uma representação gráfica destas idéias.

Em dimensão tres, se  $w = F(x, y, z)$ ;  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  alteramos os nomes, em vez “curvas de nível” passamos a chamar de “superfície de nível”.

**Exercícios 21** 1. *Os Físicos afirmam que a direção por onde flui o calor mais rápido o calor é a na direção do gradiente. Você poderia encontrar uma razão para isto?*

**Solução 48** *É a mesma razão pela qual o caminho mais rápido para se subir uma montanha (não é o mais fácil...) é o da perpendicular às curvas de nível, a direção do gradiente. A Física toma como postulado que todos os fenômenos tendem a acontecer do modo mais rápido possível e pelo caminho mais curto.*

2. *Considere um campo vetorial  $F = (P, Q)$  definido num domínio  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^2$*

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto W \subset \mathbb{R}^2$$

*e uma curva  $\gamma \subset \Omega$  parametrizada por*

$$\vec{r}(t) = (u(t), v(t)) ; t \in [a, b]$$

*calcule a derivada  $F(g(t))$  e verifique que ela é a derivada de  $F$  na direção de  $\gamma$ .*

**Solução 49**

$$\begin{aligned} \omega &= F(\gamma) \\ d\omega &= \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv \\ d\omega &= \langle dF, (du, dv) \rangle = \langle dF, dr \rangle \end{aligned}$$

*O resultado desta derivação é um escalar, é o coeficiente de crescimento do campo escalar  $F$  na direção da curva  $\gamma$  portanto uma derivada direcional.*

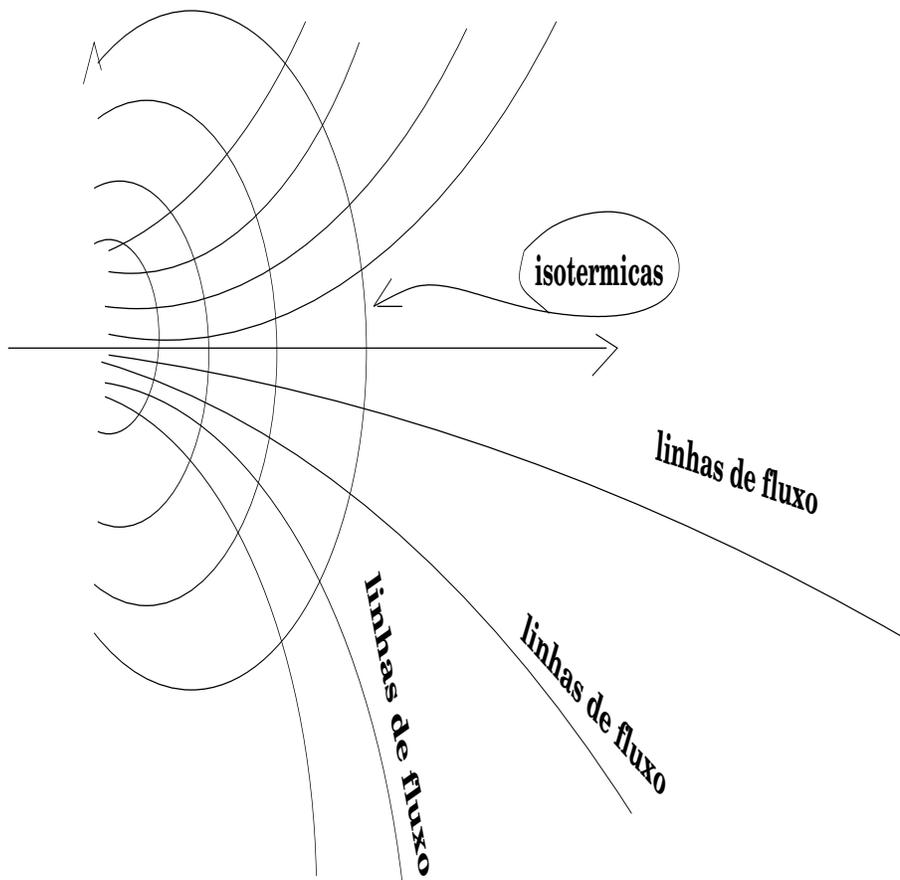


Figura 8.6: Isotérmicas e linhas de fluxo

3. Calcule as derivadas direcionais do campo escalar

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ao longo das retas que passam pela origem e verifique se existe alguma derivada direcional sobre uma reta passando pela origem.

**Solução 50** Temos  $\omega(t) = (t, at)$  a parametrização de uma reta que passa pela origem com coeficiente angular  $a$ . Deixando  $a$  variar vamos atender à condição da questão, teremos todas as retas que passam pela origem e vamos agora derivar  $F$  ao longo de uma dessas retas: derivar

$$r(t) = F(\omega) = F(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned} dr &= \langle dF, d\omega \rangle \\ dr &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ dr &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dt - a \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} dt \\ dr &= -\frac{2t dt}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2at dt}{(x^2+y^2)^2} \\ dr &= -\frac{2t+2at dt}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2t(1+a) dt}{(t^2+a^2 t^2)^2} = -\frac{2t(1+a) dt}{(t^2(1+a^2))^2} \end{aligned}$$

Como não há limite quando  $t = 0$  então nenhuma das derivadas direcionais sobre reta passando pela origem existe em  $(0, 0)$ .

4. Calcule as derivadas direcionais do campo escalar

$$F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ao longo das retas que passam pela origem, e verifique se alguma das derivadas direcionais existe na origem.

**Solução 51** Temos  $\omega(t) = (t, at)$  a parametrização de uma reta que passa pela origem com coeficiente angular  $\underline{a}$ . Deixando  $\underline{a}$  variar vamos atender à condição da questão, teremos todas as retas que passam pela origem e vamos agora derivar  $F$  ao longo de uma dessas retas: derivar  $r(t) = F(\omega) = F(x(t), y(t))$

$$\begin{aligned} dr &= \langle dF, d\omega \rangle \\ dr &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ dr &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} dt + a \frac{x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} dt \\ dr &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dt + a \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2} dt \\ dr &= \frac{a^2 t^2 - t^2}{(t^2+a^2 t^2)^2} dt + a \frac{(t-at)^2}{(t^2+a^2 t^2)^2} dt \\ dr &= \frac{t^2(a^2-1)}{(t^2(a^2+1))^2} dt + \frac{a(t(1-a))^2}{(t^2(a^2+1))^2} dt \\ &= \frac{t^2(a^2-1)}{(t^2(a^2+1))^2} dt \end{aligned}$$

Se  $y = x \equiv a = 1$  a derivada direcional sobre esta reta existe na origem tendo valor zero, isto pode ser visto na segunda linha das equações acima. Isto só tem significado, entretanto, se houver valor no ponto  $(0, 0)$  o que não é o caso com  $F$ .

5. Calcule as derivadas direcionais do campo escalar

$$F(x, y) = \frac{x}{x + y}$$

ao longo das retas que passam pela origem, e verifique se alguma das derivadas direcionais existe na origem.

**Solução 52** Temos  $\omega(t) = (t, at)$  a parametrização de uma reta que passa pela origem com coeficiente angular  $\underline{a}$ . Deixando  $\underline{a}$  variar vamos atender à condição da questão, teremos todas as retas que passam pela origem e vamos agora derivar  $F$  ao longo de uma dessas retas: derivar  $r(t) = F(\omega) = F(x(t), y(t))$

$$\begin{aligned} dr &= \langle dF, d\omega \rangle \\ dr &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ dr &= \frac{x+y-x}{(x+y)^2} dt + a \frac{-x}{(x+y)^2} dt \\ dr &= \frac{y}{(x+y)^2} dt + a \frac{-x}{(x+y)^2} dt \\ dr &= \frac{at}{t^2(1+a)^2} dt + a \frac{-t}{t^2(1+a)^2} dt = \frac{at-t}{t^2(1+a)^2} dt = \frac{t(a-1)}{t^2(1+a)^2} dt \end{aligned}$$

A derivada direcional sobre a reta  $y = x$  é zero. Se calcularmos  $F(\omega(t))$  vamos encontrar:

$$F(\omega(t)) = \frac{t}{t + at} = \frac{1}{1 + a}$$

significando que o limite depende da direção em que é calculado, ou seja, não existe, e tão pouco tem sentido a derivada direcional existir. Apenas podemos concluir que  $\text{graf}(f)$  sofre um violento redemoinho na origem com se o gráfico fosse construído neste ponto com segmentos de reta horizontal que ao se aproximar da origem se ropessem (porque as derivadas direcionais não existem na origem, rodando em torno do zero, porque o valor de  $F$  depende de  $\underline{a}$ , e escorregando para o infinito, porque o limite do denominador é zero quando  $\underline{a} = -1$ ), mas isto é apenas uma imagem física... falando mais simples,  $(0, 0)$  é um ponto de discontinuidade de não reparável de  $F$ .

6. Calcule a derivada direcional de

$$f(x, y, z) = 4x + 4y + 2z$$

na direção da normal exterior a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

no ponto  $(2, 2, 1)$

**Solução 53** A direção da normal exterior é a mesma do vetor posição sobre a esfera,  $(2, 2, 1)$  e a derivada exterior será

$$\frac{\langle (4, 4, 2), (2, 2, 1) \rangle}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

---

7. Calcule a derivada direcional de

$$f(x, y, z) = 4x + 4y + 2z$$

na direção do vetor  $(2a(x-a) + 2y(y-b) + 2z(z-c) = 0$

$$4(x-2) + 4(y-2) + 2(z-1) = 0$$

**Solução 54** A direção da normal exterior é a mesma do vetor posição sobre a esfera,  $(2, 2, 1)$  e a derivada exterior será

$$\frac{\langle (4, 4, 2), (2, 2, 1) \rangle}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

---

# Capítulo 9

## Superfície

### 9.1 Superfície e área

**Exercícios 22** *O princípio do cosseno*

1. *área: o princípio do cosseno* O telhado de uma casa tem uma declividade de 20% ao longo do maior comprimento do terreno da casa, que mede 20m e no sentido perpendicular tem declividade 0. A área da casa é  $100\text{m}^2$ . Qual é a área do telhado?

**Solução 55** *O vetor perpendicular à superfície (telhado) é que “mede” o coeficiente de distorção entre a superfície e o plano horizontal. Com maior precisão, é o ângulo  $\alpha$  entre o vetor perpendicular e a direção vertical (perpendicular ao solo) e  $\cos(\alpha) = 1$  Veja a figura (fig. 9.1) página 250, a representação do ângulo  $\alpha$ .*

*Se  $\alpha = 0$  então o vetor perpendicular à superfície está na direção perpendicular ao plano horizontal, não havendo distorção a área seria igual a de uma região no plano horizontal. Na medida que o ângulo  $\alpha$  aumentar, o cosseno se aproxima de zero e a distorção aumenta, sendo necessário que o  $\cos(\alpha)$  esteja no denominador para medir este aumento de distorção. Então a área do telhado vai ser*

$$\frac{\text{área da região horizontal}}{\cos(\alpha)}$$

*logo, queremos que  $\frac{1}{\cos(\alpha)}$  seja o coeficiente desta distorção. O texto do problema não fornece  $\cos(\alpha)$  e sim  $\tan(\alpha)$ . Temos*

$$\begin{aligned} y &= \sin(\alpha) ; x = \cos(\alpha) ; \frac{y}{x} = \frac{1}{5} \\ x^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow x^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^2 = 26x^2 = 25 \\ x &= \frac{5}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

**Princípio  
do  
coseno**

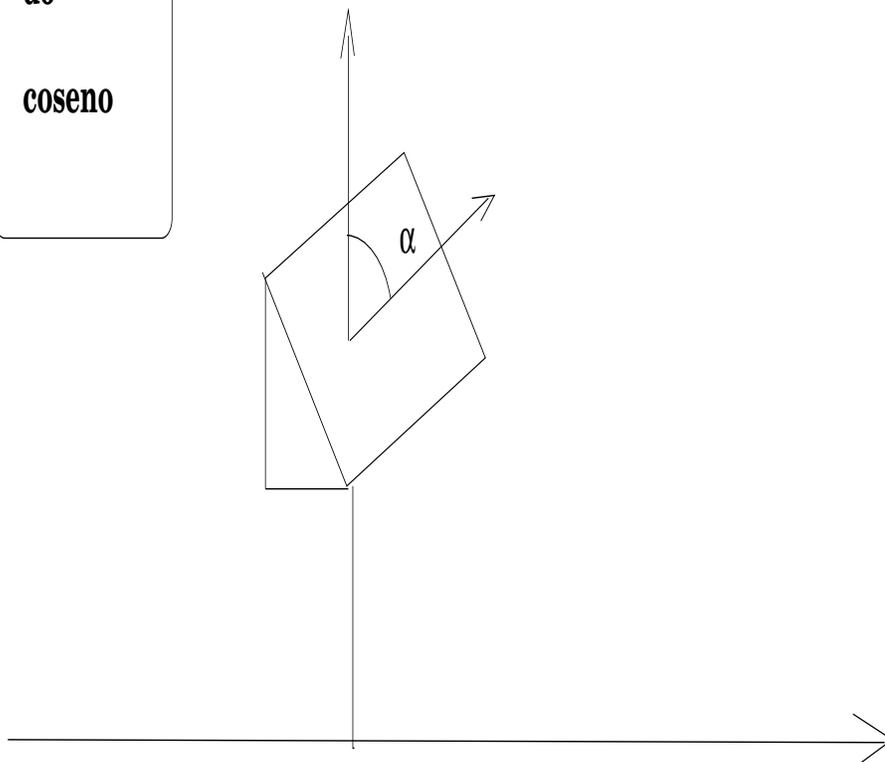


Figura 9.1: O princípio do coseno

A área do telhado é  $\frac{100\sqrt{26}}{5}$

2. princípio do vetor ortogonal

Considere uma função bivariada  $z = f(x, y)$ . Seu gráfico sendo uma superfície  $S$  do  $\mathbb{R}^3$ , calcule a área desta superfície sobre o domínio  $[a, b] \times [c, d]$  considerando que área seja finita.

**Solução 56** Vamos considerar a parametrização  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para esta superfície. Os vetores tangentes fundamentais são as linhas da Jacobiana de  $r$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

O produto vetorial dos vetores fundamentais tangentes produz um vetor ortogonal à superfície num ponto genérico:

$$u = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

$$|u| = \sqrt{1 + |J(r)|^2}$$

$$Area(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + |J(r)|^2} dx dy$$


---

**Observação 30** O princípio do produto vetorial fundamental

O princípio do produto vetorial fundamental estabelece: " é o módulo do vetor ortogonal fundamental o coeficiente de distorção local entre a área da superfície e a área da região de parametrização da superfície.

Veja uma outra forma de chegar a um vetor ortogonal conduzindo a cálculos idênticos com os feitos acima. Dada uma função  $z = f(x, y)$  um plano tangente à superfície  $graf(f)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  tem por equação

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)$$

e conseqüentemente, um vetor ortogonal à  $graf(f)$  no ponto indicado, será

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

que foi obtido na solução anterior usando o produto vetorial fundamental.

É interessante atingir um grau maior de abstração, sofisticar um pouco mais a linguagem, para obter, em troca, uma fórmula mais eficaz. Vamos considerar uma superfície  $S$  parametrizada em uma região  $D$  do plano:

$$S \equiv D \ni (u, v) \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \equiv F(u, v) = 0$$

A jacobiana desta parametrização vai ter 6 derivadas parciais que podemos distribuir numa matriz com duas linhas caracterizando as derivadas parciais relativamente às variáveis  $u, v$  assim distribuídas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Os dois vetores-linha,

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$$

pertencem ao plano tangente à superfície e seu produto escalar vai produzir um vetor perpendicular a este plano (e conseqüentemente também perpendicular à superfície):

$$\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} =$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) =$$

$$\left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

e temos, na última linha, um vetor perpendicular ao plano tangente à superfície, consequentemente também perpendicular à superfície, calculado num ponto arbitrário relativamente ao qual foram calculadas as derivadas parciais, e obtido como **produto vetorial** de dois vetores contidos no plano tangente.

O módulo deste vetor perpendicular é o coeficiente (local) de distorção para o cálculo da área da superfície relativamente ao domínio de parametrização:

$$A(S) = \int \int_D \sqrt{\frac{\partial(y,z)^2}{\partial(u,v)^2} + \frac{\partial(z,x)^2}{\partial(u,v)^2} + \frac{\partial(x,y)^2}{\partial(u,v)^2}} dudv \quad (9.1)$$

Como dissemos acima, o nível de abstração introduzido produziu uma fórmula em que vemos as derivadas calculadas implicitamente definindo o vetor perpendicular à superfície que dá o coeficiente (local) de distorção procurado.

### 3. área de região plano - princípio do telhado

(a) Se  $f(x, y) = 3x + 4y$  qual é a área da região projetada sobre  $z = f(x, y)$  pelo domínio  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ?

**Solução 57** Como se trata de uma plano, então a deformação, relativamente à região de parametrização no plano é uniforme basta encontrar  $\frac{1}{\cos(\alpha)}$ , ver princípio do coseno, para corrigir a área da base que é 4.

$$z = f(x, y) \equiv z - 3x - 4y = 0 ; u = \frac{(-3, -4, 1)}{\sqrt{26}}$$

$$\langle u, (0, 0, 1) \rangle = \cos(\alpha') = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{26}$$

e a área procurada será

$$A = 4\sqrt{26}$$

Outra solução usando o princípio do produto vetorial:

Uma parametrização para a superfície (o plano) é

$$(x, y, f(x, y))$$

e a jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

em que estamos usando a letra  $F$  para manter compatibilidade com os cálculos feitos na observação 30.

O vetor ortogonal procurado coeficiente de distorção (agora global...) é

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Veja que escrevendo a equação do plano tangente a uma superfície  $z = f(x, y)$  se chega ao vetor perpendicular acima também.

Calculando a área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2} \, dudv = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y} + 1} \, dudv = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{32 + 4^2 + 1} \, dudv = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{26} \, dudv = 4\sqrt{26} \end{aligned}$$

(b) Qual das integrais seguintes descreve com precisão a questão anterior, em dúvida compare com os resultados.

i.  $\int_{-1}^1 f(x, y) dx$

ii.  $\int_{-1}^1 f(x(t), y(t)) dt$

iii.  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy$

iv.  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$

**Solução 58** A primeira equação é uma função na variável livre  $y$  **não serve**, a segunda integral é um vetor obtido com um caminho sobre a superfície, **não serve**, a terceira integral é o volume delimitado por  $\text{graf}(f)$  sobre o domínio retangular.

A resposta correta é a quarta onde podemos ver o módulo do vetor ortogonal fundamental como coeficiente de distorção.

4. Considere uma superfície  $S$  parametrizada sobre uma região  $\Omega$  do plano por

$$\Omega \ni (s, t) \mapsto r(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Encontre a expressão dos vetores fundamentais tangentes a  $S$  num ponto arbitrário  $r(s, t)$ .

**Solução 59** Resumidamente porque está explicada na Observacao 30.

A derivada de um vetor é outro “vetor” (uma matriz),  $J(r)$  tem 6 coordenadas e duas “sub-matrizes” que são as derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis, dois vetores, neste caso:

$$J(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial r}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Cada uma das linhas de  $J(r)$  é um dos vetores fundamentais porque os dois juntos determinam o plano tangente.

$$\frac{\partial r}{\partial s} X \frac{\partial r}{\partial t} = \left( \frac{\partial y,z}{\partial s,t}, \frac{\partial z,x}{\partial s,t}, \frac{\partial x,y}{\partial s,t} \right)$$

$$A = \int \int_{\Omega} \sqrt{\frac{\partial y,z^2}{\partial s,t} + \frac{\partial z,x^2}{\partial s,t} + \frac{\partial x,y^2}{\partial s,t}} dsdt$$

5. Verifique que

$$r(s, t) = (\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

é uma parametrização da esfera unitária de centro na origem, de dimensão dois, contida no  $\mathbb{R}^3$ . Determine os vetores fundamentais tangentes a  $\mathbb{S}^2$  num ponto arbitrário. Calcule os módulos dos vetores fundamentais tangentes e prove que eles são ortogonais entre si.

**Solução 60** Calculando o módulo de  $r(s, t)$

$$|r(s, t)| = \sqrt{\cos^2(s) \cos^2(t) + \sin^2(s) \cos^2(t) + \sin^2(t)} =$$

$$= \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

o que significa que  $r(s, t)$  descreve um objeto provavelmente bi-dimensional na esfera de dimensão dois, porque tem dois parâmetros livres no  $\mathbb{R}^3$ . Um verificação geométrica simples mostra que qualquer ponto da esfera é atingido por esta parametrização:

- as duas primeiras coordenadas cobrem o interior do disco unitário porque tem raio  $0 \leq \cos(t) \leq 1$ ;
- como provamos que o módulo de  $r(s, t) = 1$  então qualquer ponto de  $\mathbb{S}^2$  é atingido por esta parametrização.

Provamos assim que se trata de uma parametrização de  $S^2$ .

Calculando a Jacobiana de  $r(s, t)$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = (-\sin(s) \cos(t), \cos(s) \cos(t), 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (-\cos(s) \sin(t), -\sin(s) \sin(t), \cos(t))$$

Um cálculo semelhantes ao feito acima mostra que

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| = |\cos(t)| ; \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| = 1$$

O produto escalar destes vetores é nulo provando que eles são ortogonais entre si.

6. Use o produto vetorial para obter um vetor ortonormal á superfície de  $\mathbb{S}^2$  num ponto arbitrário  $r(s, t)$

**Solução 61** Por definição (geométrica), o produto vetorial de dois vetores  $\vec{v}, \vec{w}$  é um vetor ortogonal ao plano determinado por estes dois vetores, tendo por módulo  $|\vec{v}||\vec{w}|\sin(\alpha)$  em que  $\alpha$  é o menor ângulo determinado pelas direções dos dois vetores.

Os vetores fundamentais tangentes na parametrização

$$r(s, t) = (\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

de  $\mathbb{S}^2$  são ortogonais resultando o seu produto vetorial num vetor perpendicular ao plano tangente:

$$u = \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$$

A definição algébrica usa uma convenção estabelecida pela Física de que os tres vetores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  são os tres vetores básicos ortonormais do espaço tridimensional (sem o tempo) satisfazendo às seguintes equações:

•

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

- anti-comutatividade o produto é anti-comutativo, ou seja

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Esta definição se adapta perfeitamente ao “determinante simbólico”

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right) \quad (9.2)$$

em que a notação

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}$$

nesta ordem, (a ordem é irrelevante, mas ela ajuda a memorização dos cálculos).

Aplicando aos vetores fundamentais tangentes da parametrização de  $\mathbb{S}^2$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s} &= (-\sin(s) \cos(t), \cos(s) \cos(t), 0) \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= (-\cos(s) \sin(t), -\sin(s) \sin(t), \cos(t)) \\ \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} &= \\ &= (\cos(t) \cos^2(s), \sin(s) \cos^2(t), \sin^2(s) \cos(t) \sin(t) + \cos^2(s) \cos(t) \sin(t)) = \\ &= (\cos(t) \cos^2(s), \sin(s) \cos^2(t), \cos(t) \sin(t)) \\ \left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right|^2 &= \\ \cos^2(s) \cos^4(t) + \sin^2(t) \cos^4(t) + \cos^2(t) \sin^2(t) &= \\ \cos^4(t) + \cos^2(t) \sin^2(t) = \cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = \cos^2(t) \\ \left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| &= |\cos(t)| \end{aligned}$$

O vetor unitário procurado é

$$\frac{\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}}{|\cos(t)|}.$$

7. Calcule a área da superfície de  $\mathbb{S}^2$

**Solução 62** Vamos considerar  $\mathbb{S}^2$  parametrizada pelo sistema de equações

$$r(s, t) = (\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

O princípio do cosseno nos diz que a medida da distorção da área sobre uma superfície (comparada com a área da região plana sobre a qual esta superfície estiver eventualmente parametrizada) é dada por  $\frac{1}{\cos(\alpha)}$  em que  $\alpha$  é o ângulo entre o vetor normal à superfície e a direção vertical (absoluta),  $(0, 0, 1)$ ,

$$\cos(\alpha) = \left\langle \frac{\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}}{|\cos(t)|}, (0, 0, 1) \right\rangle = \frac{\cos(t) \sin(t)}{\cos(t)} = \sin(t).$$

porque o produto escalar de dois vetores unitários tem como resultado o cosseno do ângulo entre eles que aqui estamos chamando de  $\cos(\alpha)$ , no lado

esquerdo da expressão. No lado direito da expressão temos o resultado dos cálculos “algebricos” feitos com a expressão que achamos, em exercício anterior, para  $\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$ .

Para calcular a área de  $\mathbb{S}^2$  vamos escrever uma soma de Riemann que irá nos conduzir à expressão da integral que serve para obter este cálculo.

$$\mathbb{S}^2 \equiv (s, t) \mapsto (\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

$$A(\mathbb{S}^2) \approx \sum_{i,j=0}^{n-1} \Delta s_i \Delta t_j \sin(t_j)$$

$$A(\mathbb{S}^2) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) ds dt$$

em que restringimos a integral ao cálculo da superfície de  $\mathbb{S}^2$  contida no primeiro diedro.

$$A(\mathbb{S}^2) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

8. Calcule a área da superfície de  $r\mathbb{S}^2$  a esfera de dimensão 2, de raio  $r$ , centro na origem.

**Solução 63** A parametrização de  $r\mathbb{S}^2$  é um múltiplo da parametrização de  $\mathbb{S}^2$  (e portanto poderíamos imediatamente predizer qual é a área sem necessidade de mais nenhum cálculo):

$$(s, t) \mapsto r(\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

Para calcular a área de  $r\mathbb{S}^2$  vamos escrever uma soma de Riemann que irá nos conduzir à expressão da integral que serve para calcular esta área.

$$r\mathbb{S}^2 \equiv (s, t) \mapsto r(\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t))$$

$$A(r\mathbb{S}^2) \approx r^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \cos(t_j) \Delta s_i \Delta t_j$$

$$A(r\mathbb{S}^2) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(t) ds dt$$

em que restringimos a integral ao cálculo da superfície de  $\mathbb{S}^2$  contido em um quadrante.

$$A(\mathbb{S}^2) = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi r^2$$

Confirmamos assim hipótese anterior de que uma esfera está para uma pirâmide, como um círculo está para um triângulo:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathbb{S}^2) &= \frac{1}{3}A(\mathbb{S}^2)r = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \text{Area}(\mathbb{S}^1) &= \frac{(2\pi r) \cdot r}{2} = \pi r^2 \end{aligned}$$

9. Calcule a área da esfera de dimensão dois  $\mathbb{S}^2$ , a partir da sua equação funcional:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

**Solução 64** Podemos ver a equação funcional como uma parametrização e fazer uso do que foi feito anteriormente. Vamos chamar  $\mathcal{D}$  ao disco fechado unitário.

$$\mathcal{D} \ni (x, y) \mapsto r = (x, y, z); \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$dr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$J(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Vamos agora calcular  $\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) \\ \left| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right| &= \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1} = \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

A integral que calcula a área da parte superior de  $\mathbb{S}^2$  então é

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathbb{S}^2_+) &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \Big|_{-y_0}^{y_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \arcsin\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{y_0}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2 \int_{-1}^1 \arcsin\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \\
&= 2 \int_{-1}^1 \arcsin(1) dx = 2\pi
\end{aligned}$$

Logo

$$\text{Area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$$

10. Calcule a área da esfera de dimensão dois  $r\mathbb{S}^2$ , a partir da sua equação funcional:

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}; \quad x^2 + y^2 \leq r; \quad r > 0$$

Resposta:  $4\pi r^2$

11. Uma superfície está definida no triângulo de vértices  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ , tendo por equação  $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y$ . Encontre a área da superfície.

**Solução 65** O módulo do vetor normal á superfície é

$$\left| \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right| = \sqrt{2 + 4x^2}$$

$$A = \int_W \int \sqrt{2 + 4x^2} \, dx dy =$$

$$A = \int_0^1 \int_x^1 \sqrt{2 + 4x^2} \, dy dx$$

$$A = \int_0^1 y \sqrt{2 + 4x^2} \Big|_{y=x}^{y=1} dx$$

$$A = \int_0^1 \sqrt{2 + 4x^2} dx + - \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx$$

$$A \stackrel{a=\sqrt{1/2}}{=} 2/2(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}))_0^1 - \frac{1}{8} \int_0^1 8x \sqrt{2 + 4x^2} dx$$

$$A = \sqrt{3/2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{3/2}) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}) - \frac{2}{24}(6^{3/2} - 2^{3/3})$$

$$s = \sqrt{3/2}; \quad A = s + 0.5 \ln(1 + s) + 0.25 \ln(2) - (1/12)(6^{3/2} - 2^{3/2})$$

$$\approx .80881017778581026341$$

O programa seguinte, em Python, com  $f$  definida em outro ponto do programa, obteve, com tres diferentes tipos de malha, valores muito próximos do cálculo formal que, ao final, tem que ser aproximado.

```

def area(f,n,a,b,c,d):
    deltax = float((b-a))/n
    deltax = float((d-c))/n
    soma = 0
    while a < b:
        y = a
        while y < d:
            soma = soma + f(a, y)
            y = y + deltax
        a = a + deltax
    return soma*deltax*deltax

```

Teve os seguintes resultados:

Numero de divisoes: 500    area da superficie: 0.810224046256    tempo de calculo: 5.45662403107 segundos  
 Numero de divisoes: 1000    area da superficie: 0.809517198294    tempo de calculo: 21.7460309267 segundos  
 Numero de divisoes: 5000    area da superficie: 0.809311243526    tempo de calculo: 542.130532026 segundos

As Somas de Riemann são muito pouco eficientes para o calculo de integrais. A única razão de que elas encontrem relativo destaque neste livro, é que elas são o único método seguro para o cálculo de integrais, inclusive o único método seguro para demonstrar a existência de integrais. O adjetivo “seguro” está sendo empregado no sentido de “sempre oferece o resultado esperado”, devo acrescentar a observação de que a implementação computacional das somas de Riemann pode conduzir a resultados falsos, para ver isto, aplique o programa acima com uma sucessão de crescente de subdivisões e verá logo que o resultados divergem...(logo? ... depois de algumas dezenas de minutos...)

Os chamados métodos formais de integração, eventualmente, funcionam para uma certa classe de integrais.

Há métodos de aproximação, como splines, que podem oferecer considerável aproximação se usados com uma modificação das somas de Riemann.

---

## 9.2 Aplicações

### Resumo.

Vários tipos de aplicações serão reunidas aqui ligadas aos diversos tipos de integrais (volume, comprimento de arco medidas de superfícies)

Somas de Riemann são muitas vezes a única forma de se calcular a integral de uma função  $f$  (quando não existe uma expressão algébrica para  $f$ , por exemplo, ou quando  $f$  é o resultado de uma amostragem)

### Exercícios 23 Aplicações da integral

1. Média Verifique que se  $\Omega$  for uma região qualquer, e  $\mu = \text{medida}(\Omega)$  e  $f$  uma função escalar limitada superiormente e inferiormente então

$$m \leq \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(s) ds \leq M$$

em que  $m$  é o valor mínimo de  $f$  sobre  $\Omega$  e  $M$  é o maior valor de  $f$  sobre  $\Omega$

**Solução 66** Considere inicialmente  $f(s) = 1$  então

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(s) ds = 1$$

quer dizer que toda soma de Riemann que forneça uma aproximação para

$$\int_{\Omega} f(s) ds$$

é um valor médio de uma amostragem de  $f$  logo a integral é o valor médio de  $f$  e por definição de valor médio, a desigualdade é satisfeita.

Se eliminarmos a hipótese de que  $f$  seja limitada, então a integral ainda pode existir, ainda representa um valor médio de  $f$  entretanto os números  $m, M$  perdem sentido.

2. Qual das interpretações abaixo representa o significado da integral

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} (x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  é a medida de  $\Omega$ .

- (a) O trabalho da partícula  $(x, y, z)$  trafegando pela região  $\Omega$

- (b) O baricentro do objeto  $\Omega$   
 (c) O peso médio do objeto  $\Omega$

**Solução 67** O resultado desta integral é um vetor, suas componentes são:

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \int \int x dx dy dz$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \int \int y dx dy dz$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \int \int z dx dy dz$$

o que elimina a primeira e terceira opções por serem escalares. O item correto é o segundo, porque o baricentro é um ponto do espaço, o centro de peso do objeto.

3. Escreva uma soma de Riemann que sirva para calcular o baricentro de um objeto a partir de uma amostragem detalhada da massa deste objeto.

**Solução 68** A integral que calcula o baricentro sendo

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \int \int (x, y, z) dx dy dz$$

a soma de Riemann procurada será

$$\frac{1}{\mu} \sum_i \sum_j \sum_k OP_{i,j,k} \vec{\Delta x}_i \Delta y_j \Delta z_k$$

em que  $OP_{i,j,k}$  é um ponto de  $\Omega$  representativo do cubo  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$  cuja medida é  $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

4. Um objeto  $\Omega$  tem uma função de massa específica representada pela expressão  $f(x, y, z)$  em que  $(x, y, z)$  representam pontos de  $\Omega$ . Qual das integrais abaixo representa o baricentro de  $\Omega$

•

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \int \int (x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z)(x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

**Solução 69** Na primeira integral a função  $f$  não é utilizada portanto ela não pode calcular o baricentro de  $\Omega$ .

A terceira integral é escalar não representando o baricentro que é um vetor.

A solução é a segunda integral.

5. Um objeto  $\Omega$  tem uma função de massa específica representada pela expressão  $f(x, y, z)$  em que  $(x, y, z)$  representam pontos de  $\Omega$ . Qual das integrais abaixo representa o peso específico de  $\Omega$

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} (x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z)(x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

em que  $\mu$  representa a medida de  $\Omega$

**Solução 70** Na primeira integral a função  $f$  não é utilizada portanto ela não pode calcular o peso específico de  $\Omega$ .

A segunda integral é um vetor não representando peso específico.

A solução é a terceira integral.

6. Calcule o centro de gravidade de uma semi-esfera de centro na origem, raio  $R$  assentada no plano  $XoY$ .

**Solução 71** Começamos com o cálculo da medida da semi-esfera,  $\mu$  que é a metade do seu volume,  $\mu = \frac{2}{3}\pi R^3$  e vamos calcular agora

$$\frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z)(x, y, z) dx dy dz$$

com  $f(x, y, z) = 1$ ,  $\Omega$  o disco unitário, porque, na falta de informações sobre o peso específico, vamos considerar que a esfera é homogênea, quer dizer, tem o mesmo específico em todos os seus pontos.

Nesta cálculo é interessante fazer uma mudança de variável, usar coordenadas esféricas que vão transformar esta integral numa integral sobre o cubo

$$[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z)(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \frac{1}{\mu} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\cos(\theta) \cos(\alpha), \sin(\theta) \cos(\alpha), \sin(\alpha)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \alpha, \rho)} d\theta d\alpha d\rho \\ & \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \alpha, \rho)} = \rho^2 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

O cálculo do determinante, embora seja um valor conhecido, foi feito com MuPAD e os passos para obter o valor estão descrito abaixo numa sintaxe apropriada para comunicação com o programa:

```
(x,y,z) = (r*cos(t1)*cos(t2), r*sin(t1)*cos(t2), r*sin(t2))

A := matrix([[ - r*sin(t1)*cos(t2), - r*cos(t1)*sin(t2) ,
cos(t1)*cos(t2)],
[r*cos(t1)*cos(t2), -r*sin(t1)*sin(t2),
sin(t1)*cos(t2) ],
[0 , r*cos(t2), sin(t2)]]))

simplify(expand(linalg::det(A)))
```

tendo por resultado  $r^2 \cos(t2)$ . A expressão no último parentesis,

```
linalg::det(A)
```

representa para MuPAD um acesso à biblioteca `linalg` onde está definida a função `det()`.

Observe que estes dados podem ser previamente editados num editor de textos qualquer e depois colados na área de trabalho do MuPAD o que é

mais conveniente do que editar em MuPAD onde qualquer erro invalida toda a expressão forçando nova digitação desde o começo. Ao fazer isto, evite de incluir o “fim de linha” colando linha por linha e estritamente o texto digitado, caso contrário MuPAD pode dar a expressão por encerrada e encontrar erros de sintaxe.

Calculando a integral (na verdade as tres integrais, separadamente) temos:

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\cos(\theta) \cos(\alpha), \sin(\theta) \cos(\alpha), \sin(\alpha)) \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\alpha,\rho)} d\rho d\theta d\alpha$$

$$I_x = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos(\theta) \cos^2(\alpha) d\rho d\theta d\alpha = 0$$

$$I_y = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin(\theta) \cos(\alpha) d\rho d\theta d\alpha = 0$$

$$I_z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin(\alpha) d\rho d\theta d\alpha$$

$$I_z = \frac{R^4 2\pi}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

a serem divididas por  $\mu = \frac{2\pi R^3}{3}$  portanto o centro de massa é

$$\left(0, 0, \frac{3R}{4}\right).$$

7. Uma superfície  $S$  (de revolução) tem as equações paramétricas

$$(x, y, z) = (f(s) \cos(t), f(s) \sin(t), g(s)) ; s \in [a, b] ; t \in [0, 2\pi)$$

Calcule a área de  $S$ .

**Solução 72** Vamos designar  $\vec{r}(s, t) = (x, y, z)$  Os vetores tangentes fundamentais são as duas linhas da matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(s) \cos(t) & f'(s) \sin(t) & g'(s) \\ -f(s) \sin(t) & f(s) \cos(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

cujo produto vetorial,  $u$ , é um vetor ortogonal à superfície:

$$u = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$u = (-g'(s)f(s) \cos(t), -f(s)g'(s) \sin(t), f(s)f'(s) \cos^2(t) + f(s)f'(s) \sin^2(t)) =$$

$$(-g'(s)f(s) \cos(t), -g'(s)f(s) \sin(t), f(s)f'(s))$$

$$|u|^2 = (g'(s)f(s))^2 + (f(s)f'(s))^2$$

$$|u| = \sqrt{f(s)^2(g'(s)^2 + f'(s)^2)} = |f(s)|\sqrt{(g'(s)^2 + f'(s)^2)}$$

e a superfície de  $S$  será a integral

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} |u| dt ds$$

Podemos testar o resultado num caso simples, superfície de um cilindro, em que  $f(s) = R; g(s) = s; s \in [a, b]; t \in [0, 2\pi]$ . Neste caso

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} R dt ds = 2\pi R(b - a)$$

---

8. Calcule a área da esfera  $r\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por

$$(x, y, z) = (r \cos(s) \cos(t), r \sin(s) \cos(t), r \sin(t))$$

**Solução 73** Designando  $u = (x, y, z)$  temos

$$u = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$
$$u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin(s) \cos(t) & r \cos(s) \cos(t) & 0 \\ -r \cos(s) \sin(t) & -r \sin(s) \sin(t) & r \cos(t) \end{vmatrix}$$
$$u = r^2(\cos(s) \cos^2(t), \sin(s) \cos^2(t), \cos(t) \sin(t))$$
$$|u|^2 = r^4 \cos^2(t) \Rightarrow |u| = r^2 |\cos(t)| ; r > 0$$

A área da esfera será

$$r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)| dt ds = 2\pi r^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)| dt =$$
$$= 4\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 4\pi r^2$$

---

# Capítulo 10

## Fórmulas Integrais

### 10.1 Generalizações da integral

Há muitos tipos de generalização da integral, aqui vou tratar das generalizações simples, dentro do quadro de um curso de Cálculo e com o objetivo de conduzir o estudante a compreensão dos teoremas integrais fundamentais que vão aparecer no último capítulo: Teorema de Stokes, de Gauss, a fórmula de Leibniz e o próprio Teorema de Green.

A idéia fundamental é que uma integral deve ser escrita no formato

$$\int_W f(x)dx ; x \in W$$

e  $dx$  significando uma "unidade" de medida "natural" do domínio  $W$ .

Na primeira parte deste capítulo vamos retomar os exemplos já estudados nos capítulos anteriores para colocá-los no quadro que nos interessa aqui, os exemplos (exercícios) devem ajudar o leitor a compreender a filosofia do presente contexto.

O capítulo dois foi a primeira tentativa para construir esta idéia preparando o advento do capítulo 3 com o Teorema de Green. Agora iremos mais fundo.

Já vimos no capítulo dois que  $\int_a^b f(t)dt$  pode ser um vetor ou um número, tudo depende da "interpretação" que pudermos dar a  $f$  ou da operação que definirmos entre  $f$  e  $dt$ . No caso do "trabalho" faremos um produto escalar entre uma função vetorial, comumente chamada "campo vetorial"  $f$  e o "vetor tangente"  $dt$ . Quando quisermos calcular a distância percorrida por uma partícula sobre um caminho arranjamos para que  $dt$  represente comprimento de arco e  $f$  representa a intensidade variável do movimento (velocidade).

Vamos aqui estudar diversos tipos de operações usuais entre vetores e discutir a interpretação destes resultados. A Física dos séculos 18 e 19 influenciou fortemente as fórmulas que que possuímos e inclusive deu-lhes os nomes: fluxo, circulação...

# Referências Bibliográficas

- [1] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*  
Academic Press, INC. 1985
- [2] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965
- [3] Ten lectures on Wavelets - CBMS-SIAM - 1990 SIAM lectures series. Philadelphia - Pennsylvania - 19104-2688 - USA.
- [4] Davis, Harold T. *Introduction to nonlinear differential and integral equations*  
Dover Publications, Inc. New York - 1971
- [5] Dieudonné *Calcul Infinitesimal* - 1968  
- Collection Méthodes - Herman - Paris.
- [6] Dym,H. McKeane,H.P. *Fourier Séries and Integrals* Academic Press - 1972
- [7] Feynman, R Leighton, R. B., Sands, M *The Feynman Lectures on Physics*  
Vol I,II,III  
Addison-Wesley Publishing Company 5<sup>a</sup> ed. 1971
- [8] *Grolier Eletronic Encyclopedia*  
Grolier Eletronic Publishing, Inc - 1996
- [9] Lang, S. *Analysis II.*  
- Addison-Wesley-Reading Ma - 1970
- [10] Libby, Williard Frankn *Radio Carbon Dating*  
2<sup>a</sup> edição - University of Chicago Press - 1955
- [11] Meyer, Y. **Wavelets.** Algorithms  $\mathcal{E}$  Applications - SIAM - 1993 Philadelphia Pennsylvania - 19104-2688 - USA.
- [12] Praciano-Pereira, T. Convolution Splines submetido para publicação - 1995
- [13] Praciano-Pereira, T e Gerônimo, J.R. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional*  
- Notas mimeografadas - BCE - UEM - 1991

- [14] Praciano-Pereira, T. Introdução ao Cálculo numérico computacional - Programação em Pascal - Textos Universitários da UVA n°1 - Edições UVA - Sobral - Ceará- Fevereiro - 2000  
Versão eletônica: <http://www.uvanet.br/matematica/livros.php>
- [15] Praciano-Pereira, T. Cálculo numérico computacional No prelo - Editora da Univ. do Rio Grande - 1999.
- [16] Praciano-Pereira, T. *Cálculos numéricos e gráficos usando Pascal.*  
- Notas mimeografadas - BCE - UEM - 1993
- [17] Praciano-Pereira, T. *Coletânea de programas em Pascal* arquivo pas.zip disponível no site da Uva. <http://www.uvanet.br/matematica/livros.php>
- [18] Rudin, W. *Real and Complex Variables*  
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics -1974
- [19] L. Schwarz *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*  
Herman - éditeurs - Paris - 1970
- [20] Shapiro, H.S.  
*Smoothing and approximation of functions.*  
- Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies Nr. 24 - 1970.
- [21] Simmons, G.F.  
*Introduction to Topology and Modern Analysis.*  
McGraw-Hill - Book Company - 1968
- [22] Simmons, G.F.  
*Differential Equations with App. and Hist. Notes.*  
McGraw-Hill - Book Company - 1978
- [23] Whaba, Grace *Spline Models for Observational data*  
CBMS-NSF Regional Conference Series in App. Mathematics  
- SIAM - 1990.
- [24] Schumaker, L *Splines Functions: basic theory* John Wiley & Sons - 1980

# Índice Remissivo

- $\pi$ 
  - aproximação, 140
- $e$ , o numero, 86, 87
- área
  - esfera, 157
  - princípio do coseno, 223
- área do espelho
  - açude, 157, 158
- ângulo, 13, 19
- ímpar
  - função, 61
- conjectura de Cantor, 67
- conjectura de Cantor , 66
- açude, 157, 158
  - volume de água, 157, 158
- Abel, lema, 90
- aberto
  - conjunto, 119
- aberto, conjunto, 117
- álgebra de matrizes, 39
- angular, coef. - matriz, 40
- anti-horário, 120
- aprox. diferencial, 31
- aproximação, 17
- aproximação diferencial, 31
- aproximação linear, 30
- aproximação polinomial, 77
- aproximação, problema, 17
- aproximação
  - $\pi$ , 140
- aproximação linear, 43
- aproximado, cálculo, 139
- atribuição, 72
- bilinear, forma, 19
- cálculo aproximado, 139
- cadeia, regra, 122
- caminho
  - independência, 207
  - independente de, 196, 198
- campo
  - conservativo, 215
- campo conservativo, 209, 215
- campo escalar, 169, 182
- campo vetorial, 201
- Cantor, conjectura , 67
- Cantor, conjectura, 67
- Cantor, conjectura , 66
- cardinalidade, 67
- Cauchy-Schwartz, desigualdade, 91
- Chasles, lei de, 128
- coef. angular múltiplo, 30
- coef. angular, matriz, 27
- coef. angulares, matriz, 27
- compactação de dados, 101
- comparação, teste, 81
- complexos, números, 14
- comprimento de arco
  - integral, 166
- condicional, convergência, 94
- conjectura de Cantor, 67
- conservativo
  - campo, 215
  - campo vetorial, 204
- conservativo, campo, 209
- converg. e termo geral, 78
- convergência absoluta, 93
- convergência, disco, 89
- convergência, raio, 89, 90
- convergência condicional, 94
- convergencia, disco, 88

- convergencia, raio de, 88
- coseno
  - princípio, 177
- cosK, 68
- curva, 111, 121
- curva de nível, 42
- custos, matriz, 29
- custos, variação, 29
  
- dependência linear, 29, 30
- dependente
  - variável, 111
- dependente linearmente, 32
- derivação implícita, 44
- derivada
  - caso multivariado, 37
  - existência, 183
  - implícita, 183
- derivada direcional, 187
- derivada implícita, 44
- derivada parcial, 34, 35, 40
- derivadas mistas, 205, 206
- derivadas parciais, 26
- desig. de Hölder, 91, 92
- desig. de Minkowski, 92
- desig. triangular, 92
- desigualdade de Cauchy Schwartz, 91
- desigualdade de Hölder, 92
- desigualdade de Minkowski, 92
- desigualdade triangular, 91
- diferenças, 31
- diferenciável
  - curva, 121
  - variedade, 121
  - variedades, 115
- diferenciável, função, 27
- diferenciais, equacoes, 104
- diferencial, 28–31, 44
  - forma, 183
- diferencial exata, 204, 209
- diferencial total, 27
- diferencial, aprox., 31
- dimensã, 19
- dimensão, 111, 112
  - dois, 113
  - três, 113
- um, 113
- variedade, 115, 116
- zero, 113
- dimensao, 66
- dimensao infinita, 66
- direcional
  - derivada, 187
- Dirichlet, núcleo, 97
- disco de convergência, 89
- disco de convergencia, 88
- domínio
  - mudança de, 124
- domínio de integração
  - não retângular, 143
  - retângular, 143
- domínio, 35
  
- e.d.o., solução aprox., 105
- energia, quantidade, 21
- equação a diferenças, 28
- equação da reta, 39
- equação da reta tangente, 28
- equações
  - sistema de, 182
- equacoes diferenciais, 104
- escalar, produto, 13, 18, 19, 58, 59
- escalares, vetores, 16
- esfera
  - área, 157
  - integral, 154
  - volume, 154, 160
- esfera e pirâmide, 157
- espaço euclidiano, 18
- espaços de Lebesgue, 92
- espaços de funções, 91
- euclidiano, espaço, 18, 19
- exata
  - diferencial, 204
- exata, diferencial, 209
- extremos de funções, 41
  
- f'ormula de Taylor, 47
- fenomenos vibrat., 100
- figura
  - A orientação da fronteira num domínio  $\Omega$ , 211

- caminhos, 207
- Cobertura por malha, 138
- Conjunto aberto, 119
- curva, 165
- curva plana, 173
- independência de caminhos, 213, 216
- integração
  - domínio, 148
- Isotérmicas, 219
- Malha, 178
- Orientação, 212
- parametrização do quadrado, 193
- Ponto Singular, 185
- princípio do cosseno, 224
- Vetor normal, 170
- finito, infinito, 17
- forma bilinear, 19
- forma diferencial, 183
- formas diferenciáveis, 159
- Fourier, 57, 67
  - coeficiente  $a_0$ , 61
  - espaço dos coeficientes, 60
  - linearidade, 61
- Fourier, coef. , 106
- Fourier, séries, 62
- Fourier, series, 57
- fourier, series, 99
- Fourier, transf. discreta, 106
- fronteira, 117
- fronteira curva, 146
- função
  - propriedades, 23
- função como vetor, 17
- função diferenciável, 27
- função e índice, 17
- função e vetor, 19
- função linear, 45
- função vetorial, 27
- função, extremo, 41
- funções, espaços, 91
- função vetorial, 201
- função linear, 44
- função ímpar, 61
- função implícita
  - teorema, 114
- função par, 61
- funcional linear, 46
- geometria dos espaços de Lebesgue, 92
- geométrica, serie, 80
- Gnuplot, 126
- gráfico
  - Polinômio de Taylor, 51
  - polinômio de Taylor, 50, 54, 55
- gradiente, 38, 42, 169, 182
- grandeza, ordem, 85, 86
- Hölder, desig., 91, 92
- Hölder, desigualdade, 92
- hiperplano, 28, 114
- hiperplanos, 113
- hipersuperfície, 112, 114
- hipersuperfícies, 114
- hipersuperfície, 114
- imagem inversa
  - propriedades, 23
- implícita
  - teorema da função, 114
  - teorema da função, 112
- implícita, derivada, 183
- independência
  - de caminho, 206
  - de parametrização, 206
- independência de caminhos, 196, 198
- independência linear, 30, 32
- infinitésimo, 28
- infinita, dimensao, 66
- infinito, finito, 17
- informação e função, 17
- informação multinomial, 16
- integração
  - métodos, 234, 235
- integração
  - programa, 139, 143
- integral
  - esfera, 154
  - interp. geom., 143
  - iteração, 143, 145
  - linha, 163
- integral, teste, 83

interior, 118  
 iteração das integrais, 143, 145  
  
 jacobiana, 38, 42  
   matriz, 201  
 jacobiana de  $f$ , 27  
 jacobiana, matriz, 27  
  
 Landau, notacao, 86  
 Lebesgue, espaços, 92  
 lei de Chasles, 128  
 Leibniz, notação, 44  
 lema de Abel, 90  
 linear transformacao, 43  
 linear, aproximação, 43  
 linear, dependência, 29  
 linear, função, 44  
 linear, funcional, 46  
 linear, transformação, 44  
 linear, variedade, 28  
 linearmente dependente, 32  
 linha  
   integral, 163  
 livre  
   variável, 111  
  
 método dos mínimos quadrados, 71  
 módulo, 13  
 múltiplo  
   coef. angular, 30  
 mínimos quadrados, 71  
 mínimos, quadrados, 77  
 malha, 137  
 malha uniforme, 137  
 matriz, 25, 31  
 matriz de custos, 29  
 matriz de variação dos custos, 29  
 matriz dos coef. angulares, 27, 40  
 matriz jacobiana, 27, 201  
 matriz jacobina, 27  
 matriz, produto de, 25  
 matrizes, algebra, 39  
 matrizes, produto, 32  
 minimização em energia, 71  
 Minkowski, desig., 92  
 Minkowski, desigualdade, 92  
  
 mistas, derivadas, 205, 206  
 mudança  
   de domínio, 124  
   de variável, 124  
 mudança de variável, 124  
 multi-número, 31  
 MuPAD, 161  
  
 núcleo de Dirichlet, 97  
 número generalizado, 31  
 números complexos, 14  
 nível, curva, 42  
 norma de partição, 137  
 normal, 169, 182  
 notacao de Landau, 86  
  
 o numero  $e$ , 86, 87  
 operações com vetores, 16  
 ordem de grandeza, 44, 85, 86  
 ordem duma matriz, 32  
 ortogonais  
   eventos independentes, 21  
   trabalho, 21  
 ortogonalidade  $\text{senk,cosj}$ , 58  
 otimizacao, 32  
  
 par  
   função, 61  
 paraboloide, 145  
 paralelograma, regra, 14  
 parametrização  
   superfície, 159  
 parametrização  
   independência, 206  
 parcial, derivada, 34  
 partição  
   norma, 137  
 pendulo, 104  
 $\phi(p)$ , séries, 84  
 pirâmide e esfera, 157  
 plano tangente, 35, 40, 225  
 potências, série, 89  
 polinômio trigonométrico, 65, 66  
 polinômios, 77  
 polinômios trigonométricos, 67  
 Polinômio de Taylor, 50

polinômio de Taylor, 49  
 polinom. trigon., 57  
 potencias, série de, 88  
 princípio  
   do coseno, 223  
   do produto vetorial fundamental, 224, 225  
   do telhado, 226  
   produto vetorial, 226  
 princípio do telhado, 177  
 prisma, 142  
 probabilidade  
   distribuição normal, 181  
 produto  
   vetorial, 229  
 produto de matrizes, 32  
 produto escalar, 13, 18, 19, 58, 59  
 produto escalar real, 18  
 produto matricial, 25  
 produto vetorial, 229  
   princípio do, 226  
 produto vetorial fundamental  
   princípio do, 224, 225  
 programa, 139, 143, 144, 147  
 programa fourier, 67  
 progrma, séries de Fourier, 63  
 propriedades  
   imagem de  $f$ , 23  
  
 quadrados mínimos, 77  
 quantidade de energia, 21  
 quaternions, 14  
  
 raio de convergência, 89, 90  
 raio de convergencia, 88, 90  
 regra  
   da cadeia, 122  
 regra do paralelograma, 14  
 reta  
   equações paramétricas, 35, 39  
 reta tangente, 44  
 Riemann  
   soma, 138, 139, 141, 142  
   somadas de, 234, 235  
 Riemann, séries, 84  
 rombo, volume, 142  
  
 séries de Fourier, 62  
 séries de Fourier, progrma, 63  
 séries de Riemann, 83, 84  
 séries  $\phi(p)$ , 84  
 série  $s$ , 81  
 série de potências, 89  
 série de Taylor, 47, 94  
 séries  $\phi(p)$ , 83, 84  
 Schwartz, teorema de, 205  
 Schwartz, teorema de, 117  
 Scilab, 185  
 senK, 68  
 sentido  
   anti-horário, 120  
   positivo, 120  
 serie, 78  
 serie de potencias, 88, 90  
 serie geometrica, 80  
 series de fourier, 99  
 series de Riemann, 84  
 series trigonom., 57  
 sistema de equações, 182  
 solução aprox. e.d.o., 105  
 soma de Riemann, 138, 139, 141, 142, 149  
 somas de Riemann, 234, 235  
 splines, 78  
 sub prisma, 137  
 sucessão e série, 81  
 superfície, 111, 112  
 superfície  
   parametrização, 159  
  
 tabela, 69  
 tabelas, 106  
 tangente  
   plano, 225  
   variedade, 121  
   variedade linear, 28  
 tangente,reta, 44  
 tangentes  
   vetores, 239  
 Taylor, fórmula, 47  
 Taylor, polinômio, 49, 50  
 Taylor, série, 94  
 Taylor, série, 47

- telhado
  - princípio, 177
  - princípio do, 226
- teorema
  - de Green, 204, 210
  - de Schwartz, 205
  - de Schwarz, 206
  - derivadas mistas, 205
  - derivadas mistas, 206
  - Fundamental do Cálculo, 204
- termo geral e converg., 78
- teste da integral, 83
- teste de comparacao, 81
- total, diferencial, 27
- trabalho, 201
  - forças ortogonais, 21
- transformação linear, 44
- transformacao linear, 43
- Transformada
  - de Fourier, 60
- triangular, desig., 92
- trigon., polinômio, 57
- trigonomet. series, 57
- trigonometri
  - círculo, 120
- trigonométrico, polinômio , 65, 66
- trigonométricos, polinômios , 67
  
- unitários, vetores, 65
  
- variável, 111
  - dependente, 111
  - livre, 111
  - mundança, 124
- variável dependente, 111, 112
- variável livre, 111, 112
- variedade, 28, 111–113
  - algébrica, 115
  - diferenciável, 115, 121
  - dimensão, 115, 116, 121
  - dimensão dois, 113, 114
  - dimensão três, 113, 114
  - dimensão um, 113
  - dimensão zero, 113
  - linear, 113
  - linear tangente, 169
  - não algébrica, 115
  - tangente, 121
  - variedade linear, 28, 113
  - variedade linear tangente, 45
  - variedade não linear, 113
  - variedades tangentes, 115
- vetor, 13
- vetor de dados, 13
- vetor e função, 19
- vetor, exemplo, 16, 17
- vetores unitários, 65
- vetores, escalares, 16
- vetores, operações, 16
- vetorial
  - campo, 201
  - campo conservativo, 204
  - função, 201
- vetorial, função, 27
- vibratorios, fenomenos, 100
- volume, 140
  - água num açude, 157, 158
  - açude, 157, 158
  - esfera, 152–154, 156, 160
  - pirâmide, 154, 156
  - rombo, 142
- wavelets, 125