Cálculo II — **Lista número 07**, 27 de outubro de 2010
Teorema da função implícita — **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX — sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

<u>**Palavras chave**</u> curvas de nível, derivação implícita, gradiente, Teorema da função implícita;

Data da entrega da lista: dia 01 de Novembro, segunda-feira.

0.1.1 Objetivo

Com frequência encontramos expressões como $F(x,y) = x^3 - 4xy^2 + y^4 = 0$ e queremos encontrar $x = g(y)$ ou $y = f(x)$. Desejamos explicitar $\underline{x}$ ou $\underline{y}$.

Isto em geral não é possível ou é muito difícil. O teorema da função implícita nos ensina como fazer isto, aproximadamente, sem preconceitos contra aproximações que na vida o exato é com frequência um mito. É este objetivo desta lista.

Uma ferramenta importante neste caminho é a derivação implícita que as duas primeiras questões vão levá-l@ a dominar. Derivar implícitamente significa calcular as derivadas de todos os termos, numa expressão, relativamente a cada uma das variáveis que nela apareçam, por exemplo,

$$x^2 + y^2 - 4 = 0; \quad (1)$$
$$2xdx + 2ydy = 0; \quad (2)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad (3)$$

A equação (2) foi obtida pela derivada (implícita) da equação (1) que é uma *equação* portanto o resultado da derivação tem que ser também uma *equação*, vão aparecer as mesmas operações algébricas que estavam presentes na expressão que foi derivada.

Observe que derivada não é uma *operação algébrica*, é uma operação de natureza diferente envolvendo *limite* que *não sabemos classificar* relativamente ao contexto das demais operações cuja implementação computacional nós conhecemos... as chamadas operações algébricas. Então tem uma diferença fundamental entre as equações (1) (2) e (3).

Nós conhecemos explicações para todas estas operações mas não sabemos unificálas num teoria simples. Uma prova disto é que ainda não conseguimos construir o limite em *Computação Algébrica* que é a área da Computação em que se busca construir o raciocínio Matemático com *linguagens de programação.*

É mais fácil conviver com certos "saltos lógicos" que tentar de início compreender *tudo* perfeitamente. Esta observação não deve ter como efeito inibí-l@ de fazer perguntas!

O que é importante é que escrevemos uma derivada na equação (3), apenas não sabemos de quem! Não sabemos qual é a função que tem esta derivada.

Neste caso *particular* eu sei e vou logo mostrar quem é $y = g(x)$ e fazer uma comparação usando `gnuplot`, na primeira questão.

Mas em geral não é possível descobrir quem é a função $y = g(x)$ cuja derivada foi calculada com derivação implícita. Como é uma derivada então existe uma função $y = g(x)$ tal que $g'(x) = -\frac{y}{x}$;

A primeira reação que você pode ter frente a estas palavras é: *e para que servem teoremas que não conseguem mostrar explicitamente um resultado?*

São os chamados *teoremas de existência* em Matemática. Eles provam que algum objeto existe, mas não conseguem mostrar o objeto. A importância destes teoremas é de que eles garantem que podemos tranquilamente criar um algoritmo para construir uma *aproximação* porque nós sabemos que o objeto existe. Rode `exer07_01.gnuplot` agora, você vai ver o gráfico de $y = \sqrt{4 - x^2}$ com uma reta tangente e uma parábola tangente no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Esta atitude é muito prolífica, em Matemática. Sabemos que *alguma coisa* existe, porque conseguimos calcular, e vamos seguir usando. De certa forma contém o espírito da funções recursivas, ou talvez melhor dizendo, as funções recursivas são feitas com este motivo.

Se *der certo*, descobrimos *alguma coisa interessante.*

Se não der certo, perdemos, mais uma vez, tempo e é dificílimo explicar para os burocratas dos CNPq ou *Fundações de apoio à pesquisa* que é este o *método da Matemática* quando estamos pesquisando: a gente simplesmente vai fazendo as contas, quando aparece alguma coisa interessante, descobrimos um teorema! vale para Química, Biologia ou Física também. Vale quando se estiver produzindo ciência!

Mas o resultado acima somente vale localmente, podemos obter a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$. Ora a reta tangente é a fórmula de Taylor de primeira ordem, algumas vezes podemos descobrir uma segunda derivada o que vais nos permitir (na primeira questão) encontram uma parábola tangente (melhor precisão na aproximação).

Vou começar com esta expressão nos exercícios, porque, neste caso, eu sei explicitar tanto y como x e posso comparar os resultados.

O programa `exer07_01.gnuplot` mostra-lhe as contas e o gráfico.

0.2 O Teorema da Função Ímplicita

É o objeto da questão 03. Dada uma função $z = F(x,y)$ podemos definir curvas, por exemplo, as curvas de nível de F que são curvas no plano XOY. Vou aplicar o Teorema da Função Ímplicita para mostrar como posso obter aproximadamente, e graficamente, uma curva de nível de F. É uma forma particular de aplicação do teorema antes de o discutir de forma geral.

0.3 Exercícios

1. <u>Equação da reta tangente</u> Derivando implicitamente $x^2 + y^2 + 4 = 0$

(a) (V)[ ](F)[ ] Descobrimos a derivada de $y = g(x)$ é $g'(x) = -\frac{x}{y}$ num ponto (a, b) que pertence à curva $x^2+y^2-4 = 0$ e estas contas valem para quaisquer que sejam os pontos (a, b) do plano.

(b) (V)[ ](F)[ ] Descobrimos a derivada de $y = g(x)$ é

$$g'(x, y) = -\frac{x}{g(x)} = -\frac{x}{y};$$

num ponto (a, b) que pertence à curva $x^2+y^2-4 = 0$. Se estas contas forem válidas para (a, b) então a reta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto $(a, g(a))$ é

$$y = g(a) + g'(a, b)(x - a) = b + g'(a, b)(x - a)$$

e estes cálculos podem ser comprovados, graficamente, com `gnuplot`.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se o ponto (a, b) pertencer à curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e os cálculos forem válidos em uma vizinhança dele, então posso calcular

$$g''(x, y) = (-\frac{g(x)}{x})' = \frac{g'(x, y)x - g(x)}{x^2} = \frac{g'(x, y)x - y}{x^2}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se o ponto (a, b) pertence à curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ os cálculos forem válidos em uma vizinhança dele, então posso calcular

$$g''(x) = (-\frac{x}{y})' = -\frac{1}{y}$$

e obter a equação de uma parábola tangente

$$y = g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 = y = b-\frac{b}{a}(x-a)-\frac{1}{2b}(x-a)$$

e estes cálculos podem ser comprovados, graficamente, com `gnuplot`.

(e) (V)[ ](F)[ ] A curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é um círculo e o ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pertence à curva, então com `gnuplot` podemos visualizar a párabola tangente ao gráfico desta curva neste ponto.

2. Reta ou parábola tangentes $F(x, y) = x^3-4xy^2+y^4$ O programa `exer07_02.gnuplot` contém os cálculos desta questão.

(a) (V)[ ](F)[ ] Uma forma de encontrar um ponto (a, b, c) na superfície $graf(F)$ consiste em escolher uma altura $\underline{c}$, um valor para uma das variáveis e resolver a equação resultante, por exemplo,

$$c = 1; y = 0; \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (1, 0, 1)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A equação da reta tangente ao grafico de

$$y = g(x); F(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^4;$$

no ponto $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ é obtida com os cálculos

$$z = F(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^4; \tag{4}$$
$$F_x(x, y) = 3x^2 - 4y^2; F_y(x, y) = -8xy + 4y^3 \tag{5}$$
$$dz = F_x dx + F_y dy \tag{6}$$
$$z - c = F_x(x - a) + F_y(y - b) \tag{7}$$
$$z - 1 = 3(x - 1) \tag{8}$$

e a conclusão é que não é possível escrevermos $y = g(x)$ no ponto $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ porque $F_y(a, b) = 0$. Mas é possível escrever $z = g(x)$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se escolhermos $y = 1$ é então $(\pm 2, 1, 1)$ satisfazem á equação $F(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^4 = c = 1$ e a reta tangente no ponto $(a, b, c) = (2, 1, 1)$ é

$$y - 1 = \frac{2(x - 2)}{3}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se escolhermos $y = 1$ é então $(\pm 2, 1, 1)$ satisfazem á equação $F(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^4 = c = 1$ e a reta tangente no ponto $(a, b, c) = (-2, 1, 1)$ é

$$y - 1 = -\frac{4(x + 2)}{10}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Como o modelo para a reta tangente sai da derivada implícita

$$dz = F_x dx + F_y dy$$

então é preciso que uma das derivadas parciais não se anule no ponto (a, b) para podermos escrever $y = g(x)$ ou $x = f(y)$ com

$$F_x(a, b) \neq 0 \Rightarrow x = f(y); \tag{9}$$
$$F_y(a, b) \neq 0 \Rightarrow y = g(x); \tag{10}$$

3. Teorema da Função Implícita Nesta questão vou considerar uma expressão genérica $z = F(x, y)$ e uma curva de nível $F(x, y) = c$ supondo que seja conhecido um ponto, (a, b) desta curva: $F(a, b) = c$.

(a) (V)[ ](F)[ ] A forma diferencial

$$dz = F_x dx + F_y dy$$

é um modelo para para um objeto linear tangente e a forma de obter a equação do objeto linear tangente consiste de executar as substituições:

$$dx := x - a; dy := y - b; dz :=$$
$$A := F_x(a, b); B := F_y(a, b);$$
$$z - x = A(x - a) + B(y - b)\text{é a equação do plano tangente}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] No item anterior eu derivei (implicitamente) $z = F(x,y)$ se eu derivar (implicitamente) $F(x,y) = c$ eu vou obter a equação de uma reta tangente a uma curva de nível que passa no ponto (a,b) com as substituições:

$$dx := x - a; dy := y - b; dz := 0; \tag{14}$$

$$A := F_x(a,b); B := F_y(a,b); \tag{15}$$

$$A(x-a) + B(y-b) = 0 \text{é a equação da reta tangente} \tag{16}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Usando a notação da questão 3b, se $B = F_y(a,b)$ for diferente de zero então é possível explicitar $\underline{y}$ na equação (15). Isto permite escrever a equação

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

na forma $y = b+m(x-a)$ em que $\underline{m}$ é o coeficiente angular (derivada de uma função do primeiro grau). Como foi obtida por derivação é a reta tangente a um gráfico definido por $F(x,y) = c$ e portanto existe uma função $y = g(x)$ tal que

$$g'(a) = -\frac{B}{A} = -\frac{F_y(a,b)}{F_x(a,b)}; \tag{17}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Usando a notação da questão 3b, se $B = F_y(a,b)$ for diferente de zero então é possível explicitar $\underline{y}$ na equação (15). Isto permite escrever a equação

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

na forma $y = b+m(x-a)$ em que $\underline{m}$ é o coeficiente angular (derivada de uma função do primeiro grau). Como foi obtida por derivação é a reta tangente a um gráfico definido por $F(x,y) = c$ e portanto existe uma função $y = g(x)$ tal que

$$g'(a) = -\frac{A}{B} = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}; \tag{18}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Usando a notação da questão 3b, se $A = F_x(a,b)$ for diferente de zero então é possível explicitar $\underline{x}$ na equação (15). Isto permite escrever a equação

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

na forma $x = a+m(y-b)$ em que $\underline{m}$ é o coeficiente angular (derivada de uma função do primeiro grau). Como foi obtida por derivação é a reta tangente a um gráfico definido por $F(x,y) = c$ e portanto existe uma função $x = g(y)$ tal que

$$g'(b) = -\frac{B}{A} = -\frac{F_y(a,b)}{F_x(a,b)}; \tag{19}$$