Cálculo II **Lista número 14** 24 de maio de 2010
Polinômios trigonométricos **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 31 de Maio, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Os polinômios trigonométricos foram o método único até a primeira parte do século 20 do nosso sistema de comunicações que eram basicamente feitos com ondas de rádio, ondas elétro-magnéticas Hoje há uma intensa diversidade de meios utilizados nas telecomunicações mas a metodologia sob as "séries de Fourier" ainda representam muito e elas são relativamente simples de serem apresentadas como um começo do assunto. Leia mais na página.

Os coeficientes de Fourier de uma função integrável são

$$\begin{cases} a_0 = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \\ a_n = & \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \\ b_n = & \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx; \end{cases} \quad (1)$$

Palavras chave coeficientes de Fourier, integral de Fourier, Polinômio trigonométrico, transformada de Fourier.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Acrescente estas perguntas como última questão do trabalho, ela não será avaliada, mas será usada na correção do planejamento.

- Você encontrou alguma coisa interessante nesta disciplina ? indique qual.
- Do ponto de vista de "objetividade", você tem alguma crítica quanto à estrutura do meu trabalho ? especifique.

0.1 Exercícios

1. Duas funções ortogonais

   Vou estudar, nesta questão, propriedades das funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Análise as integrais geométricamente também, como um método para testar os seus cálculos.

   (a) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = 0; u(t) = \sin(x); du(t)dt = \cos(x)dx \quad (2)$$
   $$\int\limits_{-1}^{1} u(t)du(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} udu = 0 \quad (3)$$
   $$(4)$$

   (b) (V)[ ](F)[ ]

   $$\int\limits_{0}^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = 0; u(t) = \cos(x); -du(t)dt = \sin(x)dx \quad (5)$$
   $$\int\limits_{0}^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = -\int\limits_{1}^{-1} u(t)du(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} udu = 0 \quad (6)$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\sin(x)dx$ é um valor médio.

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\sin(x)dx$ é um valor médio.

   (e) (V)[ ](F)[ ]

   $$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} xdx = 0; \\ a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)dx = 0;\ b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)dx = 2; \\ a_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(2x)dx = 0;\ b_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)dx = -1; \\ a_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(3x)dx = 0;\ b_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(3x)dx = 2/3; \\ a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)dx = 0;\ b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}; \end{cases} \quad (7)$$

   (f) Faça o gráfico, com gnuplot

   $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} 2((-1)^{k+1}/k)\sin(k*x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\sin(kx)$$

   escolha o valor de n. O programa `fourier.gnuplot` faz isto.

2. Coeficientes de Fourier $f(x) = x^2$

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi^3/3$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi^2}{3}$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)dx = -2 b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)dx = 0 \qquad (8)$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = -1 b_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx = 0 \qquad (9)$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi^2}{3}; \\ a_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)dx = -4; \\ a_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = 1; \\ a_3 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx = -\frac{4}{9}; \\ a_4 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(4x)dx = \frac{1}{4}; \\ a_5 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(5x)dx = -\frac{4}{5^2}; \\ a_6 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(6x)dx = \frac{4}{6^2}; \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}; \end{cases} \qquad (10)$$