Cálculo II **Lista número 13** 17 de maio de 2010
Gradiente e extrema **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 24 , segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Transformações geométricas no espaço (as mudanças de variável) com aplicações na derivação e na integralção.

Esta lista está baseada no texto de apoio que se encontra na página

Palavras chave curva de nível, derivação, gradiente, normal, extrema, integração, mudança de variável, passo da montanha, pontos de sela.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Gradiente e crescimento

(a) (V)[ ](F)[ ] $\{(x,y)\ ; z = F(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 = K\}$ em que $\underline{K}$ é uma constante é uma variedade de dimensão 1, uma curva, contida no domínio de F, é a curva de nível $\underline{K}$ de F.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se (a,b,c) estiver no gráfico de $z = F(x,y)$ e tal que $F(a,b) = K$ então o ponto (a,b) pertence a curva de nível $\underline{K}$ de F.

(c) (V)[ ](F)[ ] A derivada implícita

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

da expressão $z = F(x,y) = K$ nos permite deduzir a equação da reta tangente ao gráfico da curva de nível com as substituições

$$\begin{array}{l} F_x dx + F_y dy = 0 \\ dx := (x-a)\ ; dy := (y-b); \\ A = F_x(a,b); B = F_y(a,b); A(x-a) + B(y-b) = 0; \end{array} \tag{1}$$

Conclusão:, o vetor $(A,B) = (F_x(a,b), F_y(a,b))$ é perpendicular à curva de nível $F(x,y) = K$ no ponto (a,b).

(d) (V)[ ](F)[ ] Com a notação do item anterior, os vetores $(A,B,-1), (-A,-B,1)$ são perpendiculares à superfície $z = F(x,y)$ no ponto $(a,b,c) = (a,b,F(a,b))$, embora ele se encontre na origem. Como os produtos escalares

$$(A,B,0)\cdot(A,B,-1) = A^2 + B^2 \tag{2}$$
$$(A,B,0)\cdot(-A,-B,1) = -(A^2 + B^2) \tag{3}$$

então o vetor (A,B) se encontra sobre a direção da projeção dos vetores $(A,B,-1), (-A,-B,1)$ no domínio de F que maximiza o produto escalar. Conclusão:, o vetor $(A,B) = grad(F)$ aponta na direção de maior crescimento ou decrescimento na superfície $z = F(x,y)$, ou ainda, as direções perpendiculares às curvas de nível são as direções de maior crescimento sobre o gráfico de $z = F(x,y)$.

(e) (V)[ ](F)[ ] A figura (1) página 2, sugere, graficamente, um algoritmo

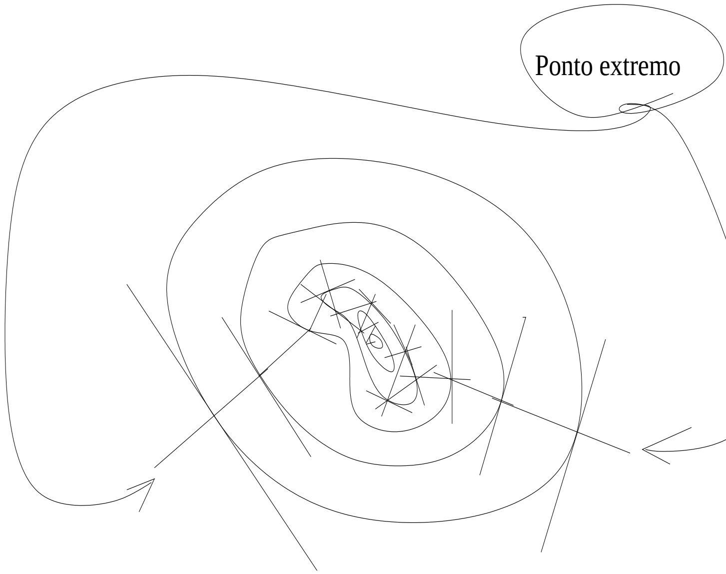


Figura 1: Algoritmo gráfico para atingir o máximo

para atingir um extremo de uma função a partir de um coleção de curvas de nível "concêntricas".

2. Derivada da composta Se

$$w = F(x,y,z); x = g_1(t); y = g_2(t); z = g_3(t);$$

(a) (V)[ ](F)[ ] $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $dw = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva no domínio de F de modo que $F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$ é a curva na superfície $w = F(x, y, z)$ - imagem de γ por F.

(e) (V)[ ](F)[ ]

3. Triedro positivo Nesta questão

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

é uma curva do $\mathbf{R}^3$ para metrizada num intervalo conveniente.

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $\Gamma(t) = (a + t\cos(\alpha), b + t\cos(\beta), c + t\cos(\gamma))$ com os ângulos α, β, γ dados, então o vetor tangente à curva no ponto (a, b, c) é $(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $\Gamma(t) = (a + t\cos(\alpha), b + t\cos(\beta), c + t\cos(\gamma))$ com os ângulos α, β, γ dados, então o vetor tangente à curva no ponto (a, b, c) é $(a + \cos(\alpha), b + \cos(\beta), c + \cos(\gamma))$. O gráfico desta curva é uma reta.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $\Gamma(t) = (a + 3\cos(t), b + 4\sin(t), t)$ dados, então o vetor tangente à curva no ponto $\Gamma(t_0)$ é $\Gamma(t_0) + (-3\sin(t_0), 4\cos(t_0), 1)$

(d) (V)[ ](F)[ ] O vetor normal ao gráfico de $z = F(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$ no ponto $P = (a, b, F(a, b))$ é $(2a + 2b, 2a - 3b^2, -1)$

(e) (V)[ ](F)[ ] As equações paramétricas da reta que passa no ponto (a, b) e indicando a direção de maior variação (crescimento ou decrescimento) a partir deste ponto no gráfico de $z = F(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$ são

$$a + t(2a + 2b), b + t(2a - 3b^2) \tag{4}$$

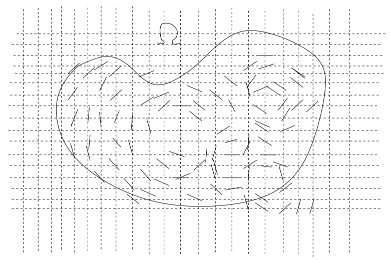


Figura 2: Aproximação de curva de nível

Curvas de fluxos

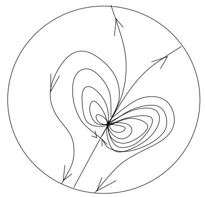
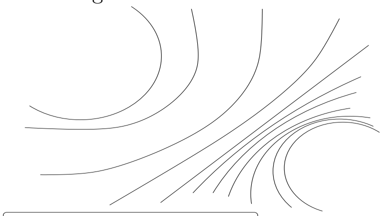


Figura 3: Curvas de fluxos



Curvas de nível que sugerem existência de dois extremos separados por um passo de montanha

Figura 4: O passo da montanha