Cálculo II
Cálculo vetorial
prof. T. Praciano-Pereira

Lista número 12 9 de maio de 2010
tarcisio@member.ams.org
Dep. de Computação UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 17 de Maio, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Vou construir nesta lista (e no texto de apoio na página) uma ferramenta para trabalhar com Cálculo no $\mathbf{R}^3$ que a chamada "análise vetorial" que eu estou chamando aqui de "cálculo vetorial". Leia mais na página.

Palavras chave cálculo vetorial, cosenos diretores, produto escalar, produto vetorial,vetor normal, vetor tangente, vetor unitário,

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Integral múltipla

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ é negativa.

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2\rho d\rho d\theta}{(1+\rho^2)^2}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2\rho d\rho d\theta}{(1+\rho^2)^2}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \pi\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u^2}$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,y)dxdy = \pi$

2. Teorema de Green

   Considere a região $\mathcal{D}$ *complemento do círculo unitário relativamente ao retângulo de vértices*

   $$(0,-2),(2,-2),(2,2),(0,2)$$

tomados nesta ordem (definindo assim um sentido de percurso sobre a fronteira.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{\mathcal{D}}\int(x-y)dxdy = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}}(x^2-\frac{y^2}{2})dx$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{\mathcal{D}}\int(x-y)dxdy = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}}(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2})dx$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{\mathcal{D}}\int(x-y)dxdy = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}}(xy-\frac{y^2}{2})dx$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{\mathcal{D}}\int(x-y)dxdy = \frac{1}{3}$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_{\mathcal{D}}\int(x-y)dxdy = \frac{22}{3}$

3. Cálculo vetorial $F(t) = (u_1(t), v_1(t), w_1(t))$ $G(t) = (u_2(t), v_2(t), w_2(t))$ são duas funções vetoriais (a imagem se encontra no $\mathbf{R}^3$) diferenciáveis

   (a) (V)[ ](F)[ ] O produto escalar $F(t)\cdot G(t)$ define uma nova função vetorial da mesma forma como o produto vetorial. $F(t)$ x $G(t)$

   (b) (V)[ ](F)[ ] O produto escalar $F(t)\cdot G(t)$ define uma função escalar, e o produto vetorial $F(t)$ x $G(t)$ uma nova função vetorial.

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{d}{dt}(F(t)\cdot G(t)) = \frac{dF}{dt}\cdot\frac{dG}{dt}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] A regra do produto $\frac{d}{dt}(F(t)\cdot G(t)) = \frac{dF}{dt}\cdot G(t) + F\cdot\frac{dG}{dt}$

   (e) (V)[ ](F)[ ] A regra do produto $\frac{d}{dt}(F(t)$ x $G(t)) = \frac{dF}{dt}$ x $G(t)+F$ x $\frac{dG}{dt}$

4. Cálculo vetorial

   (a) (V)[ ](F)[ ] Os cosenos diretores de uma reta qualquer são os cosenos diretores de uma reta paralela a ela que passa na origem.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Os cosenos diretores do segmento de reta que liga o ponto $P = (1,-1,3)$ ao ponto médio do semento que determinado pela origem dos eixos e o ponto $Q = (6,-6.4)$ são $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Os cosenos diretores do segmento de reta que liga o ponto $P = (1,-1,3)$ ao ponto médio do semento que determinado pela origem dos eixos e o ponto $Q = (6,-6.4)$ são $\frac{2}{a}, \frac{-2}{a}, \frac{-1}{a}; a = \sqrt{10}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Dados dois vetores $\vec{P}, \vec{Q}$. Se $p = |\vec{P}|; q = |\vec{Q}|$, θ for o ângulo entre $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ então

   $$|\vec{P}+\vec{Q}| = p^2 + q^2 + 2pq\cos(\theta)$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Se a reta r que passa no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ determina os ângulos diretores θ, γ, α então a equação de r é

   $$\frac{x-x_0}{\cos(\theta)} = \frac{y-y_0}{\cos(\gamma)} = \frac{z-z_0}{\cos(\alpha)}$$

e suas equações paramétricas podem ser (porque não são únicas)

$$x = x_0 + t\cos(\theta); y = y_0 + t\cos(\gamma); z = z_0 + t\cos(\alpha);$$

5. Cálculo Vetorial

(a) (V)[ ](F)[ ] O ponto $P = (1, -2, 0)$ pertence à reta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Um vetor unitário na direção da reta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$$

é $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

(c) (V)[ ](F)[ ] Um vetor unitário na direção da reta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$$

é $(\frac{-1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}})$

(d) (V)[ ](F)[ ] Um vetor unitário perpendicular (normal) à superficie $z = 3x^2 - 3xy + y^2$ no ponto $(a, b, F(a, b))$ é

$$N = (\tfrac{A}{R}, \tfrac{B}{R}, \tfrac{C}{R}); \quad (1)$$
$$A = F_x(a, b), B = F_y(a, b); C = -1; R = \sqrt{A^2 + B^2 + 1} \quad (2)$$
$$(3)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] O volume do tetraedro com vértices

$$(0, 0, 0), \vec{P} = (1, 1, 1), \vec{Q} = (2, 1, 1), \vec{R} = (1, 2, 1)$$

é

$$P \cdot (Q \text{ x } R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

6. Cálculo Vetorial $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os vetores unitários da Física.

(a) (V)[ ](F)[ ] $\vec{i} \text{ x } \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \text{ x } \vec{k} = \vec{i}; \vec{i} \text{ x } \vec{k} = -\vec{j}$

(b) (V)[ ](F)[ ] F é uma função derivável de t; $F(t) = (u(t), v(t), w(t))$.

$$\frac{d\left(F \cdot \frac{dF}{dt} \text{ x } \frac{d^2F}{dt^2}\right)}{dt} = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dF}{dt} \text{ x } \frac{d^2F}{dt^2} + F \cdot \frac{d^2F}{dt^2} \text{ x } \frac{d^2F}{dt^2} + F \cdot \frac{dF}{dt} \text{ x } \frac{d^3F}{dt^3}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] F é uma função derivável de t; $F(t) = (u(t), v(t), w(t))$ é a equação de uma curva que fica na esfera unitária. Então

$$F \cdot \frac{dF}{dt} \text{ x } \frac{d^2F}{dt^2} = 0$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Uma partícula se movimentando no espaço tem por equação do movimento (vetor posição no instante t)

$$r(t) = a\cos(\omega)\vec{i} + b\sin(\omega)\vec{j} + \vec{k}$$

em que ω é uma função de t. A velocidade da partícula é o vetor

$$r'(t) = -a\omega'\sin(\omega)\vec{i} + b\omega'\cos(\omega)\vec{j}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Uma partícula se move na superfície de uma esfera de raio 1 então o seu vetor posição é

$$r = (\cos(\theta)\sin(\alpha), \sin(\theta)\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

em que θ, α são funções de t. Então $r' \perp r$ para todo t.