Cálculo II **Lista número 10** 26 de abril de 2010
Teorema de Green **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 31 de Abril, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Iniciar a prática de uso do Teorema de Green, habituá-lo com os conceitos associados, campo vetorial, campo escalar, potencial e integral de linha.

Esta lista está baseada no texto de apoio que se encontra na página onde são citados programas que foram feitos para construir esta lista.

Palavras chave campo conservativo, campo escalar, campo vetorial, integral de linha, Teorema de Green.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Faça a última questão.

0.1 Exercícios

1. Teorema de Green, começando!

(a) (V)[ ](F)[ ] O campo vetorial

$$V(x,y) = (3x+4y, x-10+4xy) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{1}$$

é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

(b) (V)[ ](F)[ ] O campo vetorial

$$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{2}$$

é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

(c) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{3}$$

então, para qualquer curva fechada γ

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (3x+4y, x-10+4xy) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{4}$$

então, para qualquer curva fechada γ

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (\cos(y), -x\sin(y)) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{5}$$

então, para qualquer curva fechada γ

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

2. Teorema de Green, continuando

(a) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (xy+1, \frac{x^2}{2}) \tag{6}$$

então, para qualquer curva fechada γ

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (xy+1, \frac{x^2}{2}) \tag{7}$$

e se $\mathcal{W}$ for um domínio limitado do plano, então

$$\oint_{\partial\mathcal{W}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

é a área de $\mathcal{W}$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se

$$V(x,y) = (xy+1, \frac{x^2}{2}) \tag{8}$$

e se $\mathcal{W}$ for um domínio limitado do plano, então

$$\oint_{\partial\mathcal{W}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se

$$\mathcal{U} = \{(x,y)\ ;\ (x-a)^2 + (y-b)^2 <= 1\}$$

então

$$\oint_{\partial\mathcal{U}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm\pi$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se

$$\mathcal{U} = \{(x,y)\ ;\ (x-a)^2 + (y-b)^2 <= 1\}$$

então existe uma orientação (parametrização) de $\partial\mathcal{U}$ tal que

$$\oint_{\partial\mathcal{U}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pi$$

3. Volume

(a) (V)[ ](F)[ ] O segmento de reta MP $M = R(\cos(\theta), \sin(\theta), 0); P = (0,0,R)$; se move com $\theta \in [0, \pi/2]$. O volume da região $\mathcal{R}$ limitada pelos planos coordenados XOY, YOZ, ZOX e pela superfície gerada pelo movimento de MP é

$$\begin{array}{l} Vol(\mathcal{R}) = V = \int\limits_{\mathcal{R}}\int dxdy; \\ \Delta\theta = \frac{\pi}{2n}; \Delta\rho = \frac{R}{n} \\ V \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(k\Delta\rho)\cos(\Delta\theta/2)(k\Delta\rho)\sin(\Delta\theta/2)\Delta\rho \\ V \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(k\Delta\rho)^2\cos(\Delta\theta/2)\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}(\Delta\theta/2)\Delta\rho \\ V \approx \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(k\Delta\rho)^2\cos(\Delta\theta/2)\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\Delta\theta\Delta\rho \\ V = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R}\rho^2 d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\frac{R^3}{3} = \frac{1}{4}\frac{\pi R^3}{3} \end{array} \tag{9}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Sólidos de revolução. O segmento de reta MP $M = R(\cos(\theta), \sin(\theta), 0); P = (0,0,R)$; se move com $\theta \in [0, \pi/2]$. O volume da região $\mathcal{R}$ limitada pelos planos coordenados XOY, YOZ, ZOX e pela superfície gerada pelo movimento de MP é

$$\begin{array}{c} \Delta\rho = \frac{R}{n} \\ V \approx \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\pi(k\Delta\rho)^2\Delta\rho \\ V = \frac{1}{4}\int\limits_0^R \pi\rho^2 d\rho \\ V = \frac{1}{4}\pi\frac{R^3}{3} \end{array} \tag{10}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Considere o campo vetorial

$$V(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = 2xy^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k} \tag{11}$$

é o gradiente de um campo escalar.

(d) (V)[ ](F)[ ] Uma função potencial para o campo vetorial

$$(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2 + 2xz - 2)$$

é

$$F(x,y,z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2zy \tag{12}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Uma função potencial para o campo vetorial

$$(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2 + 2xz - 2)$$

é

$$F(x,y,z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z \tag{13}$$

4. A última questão, ela não será avaliada, mas será usada na correção do planejamento, estamos nos dirigindo à parte final dos trabalhos, as próximas cinco listas que vão compor a *terceira avaliação parcial.*

- Você encontrou alguma coisa interessante nos trabalhos que você fez até agora ? indique quais.
- Do ponto de vista de "objetividade", você tem alguma crítica quanto à estrutura dos trabalhos ? especifique.
- Ficou algum item, assunto, que você gostaria que eu retomasse e discutisse de forma mais detalhada?