Cálculo II **Lista número 09** 19 de abril de 2010
Integral múltipla **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 26 de Abril, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Parametrização de integrais (mudança de variáveis). Nesta lista vou conduzí-lo ao cálculo do volume da esfera, que todos sabemos qual é, vou usar como motivação para o uso das coordenadas esféricas. Outra aplicação da mudança de variáveis é a integral de Dirichlet.

Esta lista está baseada no texto de apoio da página da disciplina, mas você não deve se restringir a este texto.

Palavras chaveintegral de Dirichlet, integral tripla, mudança de variável.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Integral tripla

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do espaço $\mathbf{R}^3$ então

   $$\int\int\int_D dxdydz$$

   é área da superfície que limita D.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do espaço $\mathbf{R}^3$ então

   $$\int\int\int_D dxdydz$$

   é o volume de D.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do $\mathbf{R}^2$ e $z = F(x, y) = 2$ então então

   $$\int\int_D F(x,y)dxdy$$

   é o volume de um sólido de altura 2 tendo por base D e o volume vale a área de D vezes 2.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do $\mathbf{R}^2$ e $z = F(x, y)$ for uma função contínua definida em uma região que contenha D então então, se

   $$\int\int_D F(x,y)dxdy$$

   existir, é o *volume algébrico* de um sólido limitado pelo gráfico de F e plano XOY restrito à região D, (a região D é a *base* deste sólido)

   (e) (V)[ ](F)[ ] U é um disco de raio 1 centrado na origem entao

   $$\int\int_U xydxdy = 1$$

2. integral dupla

   (a) (V)[ ](F)[ ] No quadrado $\mathcal{D} = [0, a]$ x $[0, a]$; $a > 0$,

   $$I = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{a\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \tag{1}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] No quadrado $\mathcal{D} = [0, a]$ x $[0, a]$; $a > 0$,

   $$I = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = 2\int_0^{\pi/4}\int_a^{a\sqrt{1+tan^2(\theta)}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \tag{2}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Sendo $a > 0$

   $$I_a = \int_0^a\int_0^a \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{a\sqrt{1+tan^2(\theta)}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \tag{3}$$

   $$I_a = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{a\sqrt{1+tan^2(\theta)}} \frac{2\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \tag{4}$$

   $$I_a = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{(\rho^2+a^2)^{1/2}}\Big|_a^{a\sqrt{1+tan^2(\theta)}}\right)d\theta \tag{5}$$

   $$I_a = -\frac{2}{a}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{tan^2(\theta)+2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\right) \tag{6}$$

   $$I_1 \approx 0.52359877559829887308 \tag{7}$$

Valor obtido com o program `exer09_02_c.calc` para a integral[1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{tan^2(\theta)+2}} = 0.52360632350082134596$$

com passo 0.0001.

(d) (V)[ ](F)[ ] A mudança de coordenadas cartesianas-esféricas fica definida pelas transformaçoes

$$T(\rho,\theta,\alpha) = \tag{8}$$

$$(\rho\cos(\theta)\sin(\alpha), \rho\sin(\theta)\sin(\alpha), \rho\cos(\alpha)) \tag{9}$$

$$J(T) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\alpha) & -\rho\sin(\theta)\sin(\alpha) & \rho\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\sin(\alpha) & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) & \rho\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 0 & -\rho\sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(dx,dy,dz) = J(T)\begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \\ d\alpha \end{pmatrix} \tag{11}$$

O determinante $\det(J(T))$ vale $-\rho^2\sin(\alpha)$ o sinal caracteriza a orientação como a integral for calculada.

(e) (V)[ ](F)[ ] O elemento de volume em dimensão 3D sob a mudança de coordenadas esféricas é (escrito sob forma de integral tripla)

$$\int_{\mathcal{D}}\int\int dxdydz = \int_{T^{-1}(\mathcal{D})}\int\int \det(J(T))d\rho d\theta d\alpha = \tag{12}$$

$$-\int_{T^{-1}(\mathcal{D})}\int\int \rho^2\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha \tag{13}$$

Ao calcular o determinante estou aplicando o sistema de equações

$$\begin{cases} d\rho d\rho = 0 = d\theta d\theta = d\alpha d\alpha \\ d\rho d\theta = -d\theta d\rho \\ d\rho d\alpha = -d\alpha d\rho \\ d\theta d\alpha = -d\alpha d\theta \end{cases} \tag{14}$$

3. O volume da esfera do $\mathbf{R}^3$

(a) (V)[ ](F)[ ] $\int_{r\mathcal{D}}\int\int(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ é o volume da esfera de raio r sendo $r\mathcal{D}$ o disco de raio r do $\mathbf{R}^2$.

(b) (V)[ ](F)[ ] $\int_{r\mathcal{D}}\int\int dxdydz$ é o volume da esfera de raio r sendo $r\mathcal{D}$ o disco de raio r do $\mathbf{R}^2$.

[1] É possível calcular esta integral exatamente, mas eu não consegui fazè-lo, desisti depois de uma hora de trabalho. $\frac{\pi}{6} \approx 0.52359877559829887308$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int_{r\mathbf{S}^2}\int\int dxdydz$ é o volume da esfera de raio r sendo $r\mathbf{S}^2$ a esfera de raio r do $\mathbf{R}^3$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Aplicando a mudança de coordenadas esféricas podemos calcular o volume da esfera no $\mathbf{R}^3$,

$$\int_{r\mathbf{S}^2}\int\int dxdydz = \tag{15}$$

$$2\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho^2\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha = \tag{16}$$

$$2\int_0^r\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin(\alpha)d\alpha = \tag{17}$$

$$4\pi\int_0^r\rho^2 d\rho = 4\pi\frac{\rho^3}{3}|_0^r = \tag{18}$$

$$4\pi\frac{r^3}{3} \tag{19}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Mudança de variáveis Dada $w = F(x,y,z)$ e $\mathcal{R}$ o tetraedro cujas faces se encontram nos planos coordenados e no plano $x+y+z-1=0$

$$D = \int\int\int_{\mathcal{R}} F(x,y,z)dxdydz \tag{20}$$

$$D = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 F(T(u,v,w))\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}dudvdw = \tag{21}$$

$$\begin{cases} u & = x+y+z \\ uv & = y+z \\ v & = \frac{y+z}{v} = \frac{y+z}{x+y+z} \\ uvw & = z \\ w & = \frac{z}{uv} = \frac{z}{y+z} \\ x & = u-uv \\ y & = uv-uvw \\ z & = uvw \\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} & = u^2v \end{cases} \tag{22}$$

O programa `exer09_03e` constroi o retângulo

$$[0,1]\ \text{ x }\ [0,1]\ \text{ x }\ [0,1]$$

imagem da pirâmide $\mathcal{R}$ pela transformação T.

A mudança de variável T, no exercício (3e), vai ser usada em lista próxima no cálculo da integral de Dirichlet