Cálculo II — **Lista número 08** 12 de abril de 2010

medida: arcos e superfície — **tarcisio@member.ams.org**

prof. T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX — sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 19 de Abril , segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Esta lista está baseada numa página de apoio que trata da medida de objetos no espaço, em particular comprimento de arcos e a medida de superfícies limitadas por uma fronteira.

Palavras chave medida de objetos no espaço, comprimento de arco, coordenadas esféricas.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Comprimento de arco Considere $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de F é o plano $\mathbf{R}^2$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] O círculo unitário

   $$\mathbf{S}^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

   que se encontra no domínio de F tem uma imagem, Γ, sobre a superfície $graf(F)$. O comprimento de arco desta imagem é dado pelos cálculos

   $$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{1}$$
   $$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), 1) \tag{2}$$
   $$\text{O cálculo do comprimento do arco} \tag{3}$$
   $$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + \frac{1}{\cos(t)^2+\sin(t)^2}}\ dt = \tag{4}$$
   $$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+1}\ dt = 2\sqrt{2}\pi \tag{5}$$

   é o perímetro de um círculo de raio $\sqrt{2}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] O círculo unitário

   $$\mathbf{S}^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) \ ; \ t \in [0, 2\pi]$$

   que se encontra no domínio de F tem uma imagem Γ sobre a superfície $graf(F)$. O comprimento de arco desta imagem é dado pelos cálculos

   $$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{6}$$
   $$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), 1) \tag{7}$$
   $$\text{O cálculo do comprimento do arco} \tag{8}$$
   $$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2 + 0}\ dt = \tag{9}$$
   $$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi \tag{10}$$

   é o perímetro de um círculo de raio 1 que é a imagem de S^1 sobre o gráfico de F - o inverso do raio 1 é também 1.

   (d) (V)[ ](F)[ ] O círculo

   $$\mathbf{S}^1 + (3,4) = \{(\cos(t), \sin(t)) + (-3,4) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

   está centrado no ponto $(-3,4)$ e sua imagem, Γ, na superfície de $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem por perímetro I;

   $$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{11}$$
   $$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t)-3, \sin(t)+4, \frac{1}{(\cos(t)-3)^2+(\sin(t)+4)^2}) \tag{12}$$
   $$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{26 - 6\cos(t) + 8\sin(t) + \frac{1}{26-6\cos(t)+8\sin(t)}} dt \tag{13}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] O círculo

   $$\mathbf{S}^1 + (-3,4) = \{(\cos(t), \sin(t)) + (-3,4) \ ; \ t \in [0, 2\pi]\}$$

   está centrado no ponto $(-3,4)$, e sua imagem, Γ, na superfície de $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem por perímetro I;

$$\text{uma parametrização de } \Gamma \tag{14}$$

$$t \mapsto (\cos(t) - 3, \sin(t) + 4, \tfrac{1}{(\cos(t)-3)^2+(\sin(t)+4)^2}) \tag{15}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{h(t)}dt \tag{16}$$

$$h(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) + (\tfrac{-2(\cos(t)-3)\sin(t)+2(\sin(t)+4)\cos(t)}{(26-6\cos(t)+8\sin(t))^2})^2 \tag{17}$$

$$h(t) = 1 + (\tfrac{6\sin(t)+8\cos(t)}{(26-6\cos(t)+8\sin(t))^2})^2 \tag{18}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{h(t)}dt \approx 6.28401293150277564066 \tag{19}$$

O programa `exer08_01_e.calc` foi feito para elaborar esta questão.

2. Integrais múltiplas

   (a) (V)[ ](F)[ ] A integral de $F(x,y) = x^2 + y^2$ sobre o domínio

   $$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x\}$$

   vale $\frac{1}{2}$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] A integral de $F(x,y) = x^2 + y^2$ sobre o domínio

   $$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x\}$$

   vale $\frac{3}{8}$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

   $$\begin{cases} 0 \le x; \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = 0 \tag{20}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

   $$\begin{cases} 0 \le x; \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = \frac{1}{9} \tag{21}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] O domínio D é a região do plano limitada pela sistema de equações

   $$\begin{cases} 0 \le x; \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases} ; \int\int_D y^3 dxdy = \frac{2}{9} \tag{22}$$

3. Coordenadas esféricas Vamos calcular o volume da esfera (que já conhecemos) para aprender a usar coordenadas esféricas.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

   $$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{23}$$

   então

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

   $$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{24}$$

   então

   $$x^2 + y^2 + z^2 = \rho$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Dado o sistema de equações

   $$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ z = & \rho\cos(\alpha) \end{cases} \tag{25}$$

   então

   $$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se U for uma esfera de raio r e centrada na origem, então

   $$\int\int\int_U dxdydz \tag{26}$$

   é o volume de U

   (e) (V)[ ](F)[ ] Se U for uma esfera de raio r e centrada na origem, então

   $$\begin{cases} dx = & \cos(\theta)\sin(\alpha)d\rho - \rho\sin(\theta)\sin(\alpha)d\theta + \rho\cos(\theta)\cos(\alpha)d\alpha \\ dy = & \sin(\theta)\sin(\alpha)d\rho + \rho\cos(\theta)\sin(\alpha)d\theta + \rho\sin(\theta)\cos(\alpha)d\alpha \\ dz = & \cos(\alpha)d\rho + \rho\sin(\alpha)d\alpha \end{cases} \tag{27}$$

   $$dxdydz = \rho^2\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha \tag{28}$$

   $$\int\int\int_U dxdydz = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho\sin(\alpha)d\rho d\theta d\alpha = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \tag{29}$$