Cálculo II — **Lista número 07** 5 de abril de 2010
Integral: comprimento de arco — **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX — sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 12 de abril, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Nesta lista vou continuar a trabalhar com volumes, agora para que você adquira mais treino e começar o trabalho com variedades no espaço. O ponto inicial são arcos, ou caminhos sobre superfícies e calcular o comprimento destes caminhos. Esta lista está baseada em uma página de apoio para a qual há um link na página da disciplina, como de hábito.

Preciso também de aprofundar o uso do `gnuplot` e alguns dos exercícios estão voltados para para este objetivo.

Palavras chave caminhos sobre superfícies, comprimento de arcos, fronteiras de superfícies, parametrização de curvas.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Curvas paramétricas

   (a) (V)[ ](F)[ ] A curva definida pelo sistema de equações paramétricas

   $$\begin{cases} x(t) = & t^2 + 3t + 4; \\ y(t) = & t^2 - 3t + 4; \end{cases} \tag{1}$$

   pode ser visualizada com os comandos

```
set parametric
x(t) = t**2 + 3*t + 4;
y(t) = t**2 - 3*t + 4;
plot x(t),y(t)
```

   e o resultado é uma reta no plano.

   (b) (V)[ ](F)[ ] A curva definida pelo sistema de equações paramétricas

   $$\begin{cases} x(t) = & t^2 + 3t + 4; \\ y(t) = & t^2 - 3t + 4; \end{cases} \tag{2}$$

   pode ser visualizada com os comandos

```
set parametric
x(t) = t**2 + 3*t + 4;
y(t) = t**2 - 3*t + 4;
plot x(t),y(t)
```

   e o resultado é uma parábola no plano.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Complementando os comandos na questão 1d com

```
dx(t) = 2*t + 3;  \#\#  derivada de x(t)
dy(t) = 2*t - 3; \#\#  derivada de y(t)
a=-3; set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a)
a=0 ; set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a)
a = 4;set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a)
plot x(t),y(t)
```

   podemos ver o gráfico da curva $(x(t), y(t))$ com vetores tangentes à curva nos pontos

   $$(x(-3), y(-3)), (x(0), y(0)), (x(4), y(4)),$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Complementando os comandos na questão 1 com

```
dx(t) = 2*t + 3;  \#\#  derivada de x(t)
dy(t) = 2*t - 3; \#\#  derivada de y(t)
unset arrow;   \#\#  desliga todas as setas
plot x(t),y(t), dx(t),dy(t);
```

   podemos ver o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de uma parábola.

   (e) (V)[ ](F)[ ] Como a derivada apenas calcula direções da tangente em um ponto, então os comandos na questão 1d não produzem uma reta tangente, mas as equações paramétricas $(dx(t), dy(t))$ permitem construir vetores tangentes isolados em pontos da curva.

2. Curvas, equações paramétricas

   (a) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações paramétricas

   $$\begin{cases} x(t) = & 3\cos(t); & dx(t) = & -3\sin(t) \\ y(t) = & 5\sin(t); & dy(t) = & 5\cos(t) \end{cases} \tag{3}$$

   define uma curva e sua derivada. Os comandos

```
unset arrow \#\#  para eliminar algum vetor definido anteriormente
set parametric
a = pi/4;
set arrow from x(a),y(z) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a);
a = pi/2;
set arrow from x(a),y(z) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = pi;
set arrow from x(a),y(z) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = 5*pi/4;
set arrow from x(a),y(z) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
plot x(t),y(t)
```

produz o gráfico da curva com alguns vetores tangentes.

(b) (V)[ ](F)[ ] A seguintes correção nos comandos do gnuplot da questão 3

```
unset arrow \#\#  para eliminar algum vetor definido anteriormente
set parametric
a = pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a);
a = pi/2;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = pi;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = 5*pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
plot x(t),y(t)
```

produz o gráfico de uma elipse com alguns vetores tangentes desenhados.

(c) (V)[ ](F)[ ] O seguinte conjunto de equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = & t\cos(t); & dx(t) = & -t\sin(t) \\ y(t) = & t\sin(t); & dy(t) = & t\cos(t) \end{cases} \tag{4}$$

com os comandos do gnuplot

```
a = pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a);
a = pi/2;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = pi;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = 5*pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
plot x(t),y(t)
```

produzem o gráfico de uma curva com alguns vetores tangentes que mostram o sentido de percurso sobre a curva.

(d) (V)[ ](F)[ ] O seguinte conjunto de equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = & t\cos(t); & dx(t) = & -t\sin(t)+\cos(t) \\ y(t) = & t\sin(t); & dy(t) = & t\cos(t)+\sin(t) \end{cases} \tag{5}$$

com os comandos do gnuplot

```
a = pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a);
a = pi/2;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = pi;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
a = 5*pi/4;
set arrow from x(a),y(a) to x(a)+dx(a), y(a)+dy(a) ;
plot x(t),y(t)
```

produzem o gráfico de uma curva com alguns vetores tangentes que mostram o sentido de percurso sobre a curva.

(e) (V)[ ](F)[ ] As equações paramétricas de uma reta com coeficiente angular $\frac{4}{3}$ passando no ponto $(4, -7)$ quando $t = 0$ são

$$\begin{cases} x(t) = 3t+4 & dx(t) = 3; \\ y(t) = 4t+7 & dy(t) = 4; \end{cases} \tag{6}$$

3. Coordenadas polares Os dois métodos com `gnuplot`

(a) (V)[ ](F)[ ] Sabendo que as equações

$$\begin{cases} x(t) = & 1; \\ y(t) = & t; \end{cases} \tag{7}$$

representam uma curva em coordenadas polares, então os comandos

```
set polar;
set xrange [-3:3];
set yrange [-3:3];
plot x(t),y(t);, t,0, -t,0, t,pi/2, -t,pi/2
print 'Aperte enter para terminar'
pause -2
```

produzem os gráficos do círculo trigonométrico e a espiral $\rho(\theta) = \theta$.

(b) (V)[ ](F)[ ] A equação, em coordenadas polares, $\rho(\theta) = \theta$ equivale ao sistema de equações

$$\begin{cases} x(\theta) = & \theta\cos(\theta); \\ y(\theta) = & \theta\sin(\theta); \end{cases} \tag{8}$$

o que pode ser verificado com os comandos

```
set parametric;
 x(t) = t*cos(t); y(t)=t*sin(t);
set xrange [-8:8]
set yrange [-8:8]
plot x(t),y(t)
print 'enter para terminar'
pause -2
```

e comparado com

```
set polar
r(t) = t
plot r(t)
print 'enter para terminar'
pause -2
```

(c) (V)[ ](F)[ ] Como a primeira bissetriz dos eixos, $y = x$ tem um ângulo constante igual $\theta = \frac{\pi}{4}$ e o vetor posição tem comprimento $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, varia, então é impossível escrever ρ como função de θ. Conclusão, não é possível usar o *modo polar* do `gnuplot` para obter a primeira bissetriz. Mas com

$$\begin{cases} x(\theta) = & \rho\cos(\frac{\pi}{4}); \\ y(\theta) = & \theta\sin(\frac{\pi}{4}); \end{cases} \tag{9}$$

e usando os comandos

```
set parametric;
x(t) = t*cos(pi/4); y(t)=t*sin(pi/4);
plot x(t),y(t)
print 'enter para terminar'
pause -2
```

obteremos a primeira bissetriz (em parte... um segmento de reta), então os dois métodos de coordenadas polares não são equivalentes[1].

(d) (V)[ ](F)[ ] Coordenadas esféricas Se

$$\theta \in [0, 2\pi]\alpha \in [0, 2\pi]$$

então as equações

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta)\cos(\alpha); \\ y = & r\sin(\theta)\cos(\alpha); \\ z = & r\cos(\alpha) \end{cases} \tag{10}$$

descrevem a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r$ e definem assim um sistema de coordenadas para o espaço 3D (coordenadas esféricas - equivalente ao sistema de coordenadas polares para o plano).

[1] O modo `polar` do `gnuplot` é muito efetivo para trabalhar com coordenadas polares quando $r(\theta) = f(\theta)$. O modo `parametric` serve para aplicar coordenadas polares em todos os casos.

(e) (V)[ ](F)[ ] Coordenadas esféricas Se

$$\theta \in [0, 2\pi]\alpha \in [0, 2\pi]$$

então as equações

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta)\cos(\alpha); \\ y = & r\sin(\theta)\cos(\alpha); \\ z = & r\sin(\alpha) \end{cases} \tag{11}$$

descrevem a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r$ e definem assim um sistema de coordenadas para o espaço 3D (coordenadas esféricas - equivalente ao sistema de coordenadas polares para o plano).

4. Curvas de nível As curvas de nível se eoncontram no domínio de f.

(a) (V)[ ](F)[ ] Usando os comandos

```
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,30,1000
splot f(x,y)
```

podemos ver que a função

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

tem círculos como curvas nível.

(b) (V)[ ](F)[ ] Usando os comandos

```
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,30,1000
splot f(x,y)
```

podemos ver que a função

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

tem hipérboles como curvas nível. Isto significa que f tem pelo menos um ponto de sela.

(c) (V)[ ](F)[ ] Usando os comandos

```
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,30,1000
splot f(x,y)
```

podemos ver que a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

tem hipérboles como curvas nível.

(d) (V)[ ](F)[ ] Usando os comandos

```
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,30,1000
splot f(x,y)
```

podemos ver que a função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

tem círculos como curvas nível. Isto significa que f tem pelo menos um ponto de máximo ou de mínimo.

(e) (V)[ ](F)[ ] Se o gráfico de $z = f(x,y)$ for um plano, então suas curvas de nível serão retas.

5. Curvas sobre uma superfície Nesta questão vou usar o gráfico de

$$z = F(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$$

como a superfície onde desejo colocar curvas.

(a) (V)[ ](F)[ ] Considere o círculo parametrizado pelas equações

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases} \tag{12}$$

o conjunto dos pontos $(x,y,1)$ se encontra sobre o gráfico de F, em que (x,y) é um ponto genêrico do círculo definido na equação (12) .

(b) (V)[ ](F)[ ] Considere o círculo parametrizado pelas equações

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases} \tag{13}$$

o conjunto dos pontos $(x,y,F(x,y))$ se encontra sobre o gráfico de F, em que (x,y) é um ponto genêrico do círculo definido na equação (13) .

(c) (V)[ ](F)[ ]Parametrização da curva A parábola (equações paramétricas da)

$$\Gamma = \{t \in [a,b] \mapsto (t-4, (t-4)^2 + 2*(t-a) + 7)\} \tag{14}$$

pode ser transforma numa curva sobre a superfície $graf(F)$ com a parametrização

$$F(\Gamma) = \{t \in [a,b] \mapsto (t-4, (t-4)^2+2*(t-a)+7, F(t-4, (t-4)^2+2*(t-a)+7))\} \tag{15}$$

e posso transformar o programa `exer07_05_a.calc` para criar um script para gnuplot que apresente a esta imagem em cima da superfície $graf(F)$. Digo que estas curvas se encontram parametrizadas no intervalo $[a,b]$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Selecionando uma partição do $[a,b]$, equação (14), posso construir uma poligonal que se aproxime da curva $F(\Gamma)$. Sejam $t_k|_0^{n-1}$ os nós uniformes desta partição. Os vértices da poligonal serão

$$F(t_k|_0^{n-1}) = \{(t_k-4)^2+2*(t_k-a)+7, F(t_k-4, (t_k-4)^2+2*(t_k-a)+7))\} \tag{16}$$

e isto pode ser testado com uma modificação do script `exer07_05_c.gnuplot` `exer07_05_d.gnuplot`.

(e) (V)[ ](F)[ ]A fórmula do comprimento de arco O comprimento da poligonal de n lados, é

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(t_{k+1}-t_k)^2 + (F(t_{k+1}) - F(t_k))^2} \tag{17}$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\sqrt{(1 + \frac{(F(t_{k+1})-F(t_k))^2}{(t_{k+1}-t_k)^2}} \tag{18}$$

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + F'(x)}dx \tag{19}$$