Calculo II	**Lista número 06**
Domínio de Integração	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	28 de março de 2010
página da disciplina	www.multivariado.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

Data da entrega da lista: dia 05 de Abril segunda-feira. Não serão recebidos trabalhos atrazados para correção, contam apenas para frequência e nota mínima 04 (quatro) se entregues dentro da semana (frequência).

0.1.1 Objetivo

Esta lista está baseada no texto que se encontra na página. Entender o domínio de integração e como calcular iteradamente integrais múltiplas.

Um dos exercícios vai levá-l@ ao cálculo da integral da Gaussian, e^{-x^2} que é usada em avaliações probabilísticas ligadas aos fenômenos da natureza, para isto eu vou usar a mudança de variável definida na lista 05.

Você pode (e **deve**) usar qualquer método que esteja a sua disposição para resolver as questões, apenas justificando corretamente o que fizer.

Os programas da série exer06*.calc, que se encontram na página, foram usados na produção desta lista, *mas eles têm que ser modificados de forma adequada para obter algum resultado aqui solicitado.*

Palavras chave: coordenadas polares, Gaussiana, integral iterada, integral múltipla, mudança de variável, volume da pirâmide.

0.1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.2 Exercícios

1. Domínio de integração

   Sendo $F(x,y) = xy\sin(2-x-y)$

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em

   $$\int_{-4}^{4}\int_{-3}^{10} F(x,y)dxdy$$

   é o retângulo $[-4,4]$ x $[-3,10]$;

   (b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em

   $$\int_{-4}^{4}\int_{-3}^{10} F(x,y)dxdy$$

   é o retângulo $[-3,10]$ x $[-4,4]$

   (c) (V)[ ](F)[ ] O domínio de integração em

   $$\int_{-4}^{4}\int_{y+4}^{y-10} F(x,y)dxdy$$

   é a região do plano limitada pelas retas

   $$x = -4; x = 4; x = y+4; x = y-10;$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Para calcular a integral de $z = F(x,y)$ sobre o domínio limitado pelas curvas

   $$y^2 - 5 - x = 0; x - 15 + y^2 = 0; x = 4; x = -4$$

   devo expressar a integral como

   $$\int_{-4}^{4}\int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x,y)dydx$$

   e um valor aproximado desta integral é 17.33270527525958855238

   (e) (V)[ ](F)[ ] Para calcular a integral de $z = F(x,y)$ sobre o domínio limitado pelas curvas

   $$y^2 - 5 - x = 0; x - 15 + y^2 = 0; x = 4; x = -4$$

   devo expressar a integral como

   $$\int_{-4}^{4}\int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x,y)dxdy$$

   e um valor aproximado desta integral é 17.33270527525958855238

2. Coordenadas polares e a Gaussiana

   Considere a função $H(x,y) = exp(-x^2 - y^2)$

   (a) (V)[ ](F)[ ] Definindo $h(x) = e^{x^2}$ então $H(x,y) = h(x)h(y)$

(b) (V)[ ](F)[ ] Definindo $h(x) = e^{-x^2}$ então $H(x,y) = h(x)h(y)$

(c) (V)[ ](F)[ ] Definindo $h(x) = e^{-x^2}$ então

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} H(x,y)dxdy = (\int_{-a}^{a} h(x)dx)^2$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível calcular (que exista a integral), e é verdade,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)dxdy$$

Considere a mudança de variável descrita pelas equações (coordenadas polares)

$$T(\rho,\theta) = (x,y); \tag{1}$$

$$T(\rho,\theta) = \begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

$$\rho \in [0,\infty); \theta \in [0,2\pi] \tag{3}$$

Usando a derivada exterior definida na lista 05, então

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)dxdy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} H(T(\rho,\theta))\rho d\rho d\theta \tag{4}$$

$$I = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\rho^2}2\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}2\rho d\rho \int_{0}^{2\pi} d\theta \tag{5}$$

$$I = \pi\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}2\rho d\rho = \pi \tag{6}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Como

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}dxdy = (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx)^2$$

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

3. Integrais Duplas

(a) (V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico da primeira bissetriz e da pábola $y = x^2$ é

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{x} dydx$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico da parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = 7$ é

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{x^2-x-6}^{7} dydx$$

para os dois números x_1, x_2 obtidos como raízes de uma equação do segundo grau.

(c) (V)[ ](F)[ ] O sólido V é um cílindro tendo por base a região limitada pelo gráfico da parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = 7$ e altura (constante) 4. Seu volume é quatro vezes a integral

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{x^2-x-6}^{7} dydx$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Uma pirâmide tem por base o triângulo cujos vértices são $(0,0),(1,0),(0,1)$ e quarto vértice é o ponto $(0,0,r)$. O seu volume pela integral da equação do plano (da função $z = F(x,y)$) que passa nos pontos $(1,0),(0,1),(0,0,r)$.
Cálculo do vetor perpendicular e determinação da função $z = F(x,y)$.

$$\text{vértices } P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1) \text{ e } P_4 = (0,0,r) \tag{7}$$

$$u_1 = P_2 - P_4 = (1,0,-r); u_2 = P_3 - P_4 = (0,1,-r) \tag{8}$$

$$u_1 \text{ x } u_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -r \\ 0 & 1 & -r \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$u_1 \text{ x } u_2 = \begin{pmatrix} r & r & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

A equação do plano que fecha a pirâmide, passando pelo ponto $(0,0,r)$ é

$$rx + ry + (z - r) = 0 \Longrightarrow z = F(x,y) = r - rx - ry$$

e a integral que dá o volume da pirâmide é

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} (r - rx - ry)\, dydx = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} (r - rx - ry)\, dy$$

Calculando a integral

$$I_x = \int_{0}^{1-x} (r - rx - ry)dy = (ry - rxy - r\frac{y^2}{2})|_0^{1-x} = \tag{11}$$

$$I_x = \left((r - rx)y - r\frac{y^2}{2}\right)|_0^{1-x} = (r - rx)(1 - x) - r\frac{(1-x)^2}{2} \tag{12}$$

$$I_x = r(1-x)^2 - r\frac{(1-x)^2}{2} = r\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{r}{2}(1 - 2x + x^2) \tag{13}$$

$$I = \frac{r}{2}(x - x^2 + \frac{x^2}{3})|_0^1 = \frac{r}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}Bh \tag{14}$$