



0.1 Informações

Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina.

Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

Data da entrega da lista: dia 15 de Março de 2010, segunda-feira.

0.1.1 Objetivo

Conduzí-lo a surfar sobre uma superfície no espaço (não se esqueça de trazer utensílios de segurança, como capacete, joelheiras).

Esta lista está baseada nos programas da série *exer04*.gnuplot* que se encontram disponíveis no link “programas” da página.

Palavras chave: curva de nível, curva sobre uma superfície no espaço, plano tangente, vetor tangente, vetor perpendicular.

0.2 Exercícios

1. Vetor posição, vetor perpendicular Considere a função

$$z = F(x, y) = x^2 + y^2$$

Você pode visualizar as questões usando o programa *exer04_01.gnuplot*, alterando os valores das variáveis a, b de forma conveniente.

- (a) (V)(F) O vetor posição no ponto (a, b) é

$$(a^2, b^2, a^2 + b^2)$$

- (b) (V)(F) O vetor posição no ponto (a, b) é

$$(a, b, a^2 + b^2)$$

- (c) (V)(F) Qualquer segmento de reta pertencente ao plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$ é um segmento de reta tangente ao gráfico de $z = F(x, y)$.

- (d) (V)(F) Para obter um segmento de reta dentro do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$, basta selecionar dois valores para (x, y) , digamos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

no domínio de F e calcular a terceira coordenada, de cada um deles, usando a equação do plano tangente. O segmento de reta determinado por estes dois pontos estará sobre o plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$. Este segmento de reta não precisa ser tangente ao gráfico de F .

- (e) (V)(F) Suponha que $z = P(x, y)$ seja a equação do plano tangente no ponto $(a, b, F(a, b))$

O segmento de reta determinado pelo vetor posição $(a, b, F(a, b))$ e por um novo vetor determinado por

$$(x_1, y_1)$$

no domínio de F , com a terceira coordenada calculada usando a equação do plano tangente, $z = P(x, y)$

$$(x_1, y_1, P(x_1, y_1))$$

se encontra sobre o plano tangente. Os comandos, no gnuplot, supondo F, P corretamente definidas,

```
unset arrow;    ## para apagar outros segmentos de reta da memoria
set arrow from a,b,F(a,b) to x1,y1, P(x1,y1);
plot F(x,y), P(x,y)
```

permitem a visualização deste segmento que será um segmento de reta sobre o plano tangente com uma das extremidades no ponto de tangência do plano $z = P(x, y)$.

2. Campo de vetores Considere a função

$$F(x, y) = x^3 - 3xy + xy^2;$$

- (a) (V)(F) Um vetor perpendicular ao plano tangente no ponto $(-2, 3, F(-2, 3))$ é $(12, -6, -1)$.

- (b) (V)(F) Um vetor perpendicular ao plano tangente no ponto $(-2, 3, F(-2, 3))$ é $(-12, 6, 1)$.

- (c) (V)(F) Um vetor perpendicular ao plano tangente no ponto $(a, b, F(a, b))$ é $(-F_x(a, b), -F_y(a, b), 1)$

(d) `(V)(F)` No programa `exer04_02.gnuplot` os cálculos seguintes

$$A = F_x(a, b); B = F_y(a, b); C = 1 \quad (1)$$

$$\vec{V} = (a, b, F(a, b)) + (A, B, C) \quad (2)$$

permitem a visualização de um vetor (segmento de reta orientado) perpendicular ao plano tangente, no ponto ponto de tangência.

(e) `(V)(F)` No programa `exer04_02.gnuplot` os cálculos seguintes

$$A = -F_x(a, b); B = -F_y(a, b); C = 1 \quad (3)$$

$$\vec{V} = (a, b, F(a, b)) - (A, B, C) \quad (4)$$

permitem a visualização de um vetor (segmento de reta orientado) perpendicular ao plano tangente, no ponto ponto de tangência.

3. Gráfico de $z = G(x, y)$

Considere a função $G(x, y) = \sin(\frac{2x+3y}{10})$; definida no programa `exer04_03.gnuplot`.

(a) `(V)(F)` O programa `exer04_03.gnuplot` calcula o vetor perpendicular à superfície $graf(G)$ no ponto $(a, b, G(a, b))$ para a, b selecionados no programa.

(b) `(V)(F)` Um vetor perpendicular ao gráfico de $z = G(x, y)$ no ponto $(-1.5, 2.5, G(-1.5, 2.5))$ é $(0.180089420470535, 0.270134130705803, -1)$, com valores aproximados.

(c) `(V)(F)` Um vetor perpendicular ao gráfico de $z = G(x, y)$ no ponto $(-1.5, 2.5, G(-1.5, 2.5))$ é $(-0.180089420470535, -0.270134130705803, 1)$, com valores aproximados.

(d) `(V)(F)` A equação do plano tangente ao gráfico de $z = F(x, y)$ no ponto $(a, b, G(a, b))$ é

$$C(z - c) = A(x - a) + B(y - b)$$

com C assumindo qualquer valor e

$$A = -G_x; B = -G_y;$$

(e) `(V)(F)` A equação do plano tangente ao gráfico de $z = F(x, y)$ no ponto $(a, b, G(a, b))$ é

$$C(z - c) + A(x - a) + B(y - b) = 0$$

com $C = 1$ e

$$A = -G_x; B = -G_y;$$

4. Transformações no espaço

 Considere a função

$$z = H(x, y) = x^2 + \sin(xy/10) + y^2 + 10$$

(a) `(V)(F)` A função $z = H(x, y)$ é a que está definida no programa `exer04_04.gnuplot`.

(b) `(V)(F)` As derivadas parciais de $z = H(x, y)$ estão corretamente definidas em `exer04_04.gnuplot`.

(c) `(V)(F)` Os comandos

```
set xrange [a-4:a+5] ## para ativar, apague o sinal de comentário, ##
set xrange [b-4:b+4] ## no início da linha, mas não estes internos
set zrange [H(a,b)-10:H(a,b)+10] ## que você deve deixar.
```

se encontram desativados no programa.

(d) `(V)(F)` Os comandos, no programa `exer04_04.gnuplot` (depois de corrigido!)

```
set xrange [a-4:a+5] ## para ativar, apague o sinal de comentário, ##
set xrange [b-4:b+4] ## no início da linha, mas não estes internos
set zrange [H(a,b)-10:H(a,b)+10] ## que você deve deixar.
```

se ativados, permitem uma visualização melhor do gráfico porque produzem um corte em volta no ponto $(a, b, H(a, b))$, numa vizinhança deste ponto.

(e) `(V)(F)` Um vetor perpendicular ao plano no ponto $(1.5, -1.5, 19.2768936378683)$ é $(-2.85378088393966, 2.85378088393966, 1)$, com valores aproximados.

Em algum ponto desta lista você pode encontrar a correção do programa-errado

5. Rota de avião

Considere $z = F(x, y)$ uma função derivável.

(a) `(V)(F)` Dizer que F é derivável significa que há um plano tangente em cada um dos pontos $(a, b, F(a, b))$ do seu gráfico.

(b) `(V)(F)` O vetor $(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b), -1)$ é um vetor tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$.

(c) `(V)(F)` $P(x, y) = F(a, b) + F_x(x - a) + F_y(y - b)$ é a equação do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$ e dados dois pontos do domínio, $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ o segmento de reta que une os pontos

$$P_1 = (a_1, b_1, P(a_1, b_1)), P_2 = (a_2, b_2, P(a_2, b_2))$$

se encontra no plano tangente.

(d) `(V)(F)` Se $z = P(x, y)$ for a equação do plano tangente ao gráfico de F no ponto $(a, b, F(a, b))$ então a soma de vetores $(a, b, F(a, b)) + (a, b, P(a, b))$ identifica um segmento de reta sobre o plano tangente.

(e) `(V)(F)` Dado um número positivo ρ suficientemente pequeno, os pontos da forma $(a + \rho \cos(\theta), b + \rho \sin(\theta), P(a + \rho \cos(\theta), b + \rho \sin(\theta)))$ identificam uma elipse sobre o plano tangente.