Cálculo I	**Lista número 15**
Logaritmo e exponencial	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	24 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina, caso queira me enviar esta lista.

Esta lista é um trabalho de férias de preparação para Cálculo II. Terei prazer em tirar dúvidas ou conversar sobre os assuntos desta lista em qualquer momento, por e-mail. Pode ser sobre qualquer assunto das listas anteriores também.

1.1 Objetivo

Vou mostrar uma função cuja integral não pode ser calculada com o Teorema Fundamental do Cálculo porque a função não tem uma primitiva que possa ser expressa em termos de outras funções conhecidas. Em outras palavras, a primitiva é uma nova função, a função logaritmo. Em suma, a única forma de calcular esta integral é *aproximadamente*. O que é *surpreendente* é a quantidade de instrumentos teóricos que vamos usar para atingir este objetivo.

Palavras chave logaritmo, exponencial, função inversa, integração aproximada.

2 Exercícios

1. Propriedades da função $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto dos números reais positivos.

   (b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto de todos os números reais positivos exceto o zero, $\mathbf{R} - \{0\}$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é positiva e ela é uma função crescente.

   (d) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é negativa e ela é uma função decrescente.

   (e) (V)[ ](F)[ ] Nas vizinhanças de zero $f(x) = \frac{1}{x}$ pode assumir valores arbitrariamente grandes e porisso dizemos que $\lim\limits_{x=0} f(x) = \infty$ ou seja, não existe.

   (f) (V)[ ](F)[ ] Para grandes valores de $|x|$ $f(x) = \frac{1}{x}$ é arbitrariamente pequena e porisso dizemos que $\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x) = 0$.

   (g) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o que aparece na figura (1) página 2,

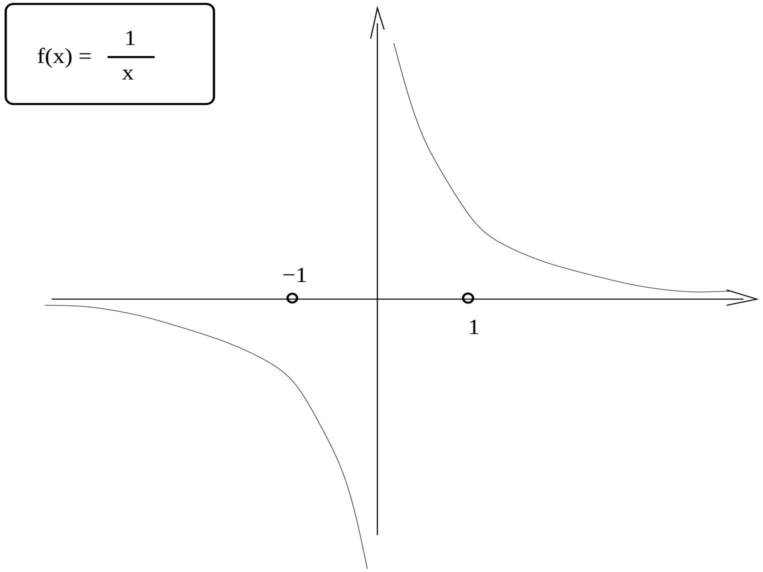

Figura 1: gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ feito à mão com `xfig`

   (h) (V)[ ](F)[ ] a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em qualquer intervalo que não contenha o zero.

2. Integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ Como não temos nenhuma regra para calcular a integral desta função, vamos calculá-la aproximadamente com somas de Riemann.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Uma aproximação para $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x}$ é $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{9}{n} \frac{1}{\frac{9k}{n}}$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Uma aproximação para $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x}$ é $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{9}{n} \frac{1}{1+\frac{9k}{n}}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $a, b > 0$ podemos calcular $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Se $a, b < 0$ podemos calcular $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Uma aproximação para $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x}{a + k\Delta x}\ ;\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

(f) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Os cálculos seguintes estão corretos:

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{n} \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b \tfrac{dx}{x} \approx I = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\Delta x}{a+k\Delta x} \tag{2}$$

$$I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{a+k\Delta x} \tag{3}$$

$$I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1/a}{1+k\Delta x/a} \tag{4}$$

$$I = \Delta x/a \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{1+k\Delta x/a} \tag{5}$$

$$\Delta x := \tfrac{b/a-1}{n} = \tfrac{b-a}{an} = \Delta x/a \tag{6}$$

$$\Delta x = \tfrac{b/a-1}{n}; I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{1+k\Delta x} \tag{7}$$

$$I \approx \int\limits_1^{b/a} \tfrac{dx}{x} \tag{8}$$

<u>Conclusão:</u> $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \int\limits_1^{b/a} \frac{dx}{x}$ não interessando se a, b são todos dois positivos ou todos dois negativos.

(g) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> A integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[a, b]$; $a, b > 0$ é igual a integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, b/a]$. Por exemplo:

$$\int\limits_2^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{9}$$

$$\int\limits_{10}^{100} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} + \int\limits_2^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{10}$$

$$\int\limits_{100}^{1000} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{11}$$

(h) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> As contas seguintes estão corretas:

$$5000 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 2^3 5^4 \tag{12}$$

$$I = \int\limits_1^{5000} \tfrac{dx}{x} = \tag{13}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{5000} \tfrac{dx}{x} = \tag{14}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{1000} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{1000}^{5000} \tfrac{dx}{x} = \tag{15}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{100} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{100}^{1000} \tfrac{dx}{x} \int\limits_{1000}^{5000} \tfrac{dx}{x} = \tag{16}$$

$$= 3 \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{17}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{18}$$

$$I = 3 \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} + 4 \int\limits_1^5 \tfrac{dx}{x} \tag{19}$$

(i) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$32 = 2^5 \tag{20}$$

$$\int\limits_1^{32} \tfrac{dx}{x} = 5 \int\limits_1^2 \tfrac{dx}{x} \tag{21}$$

(j) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$a = b^n \tag{22}$$

$$\int\limits_1^b \tfrac{dx}{x} = n \int\limits_1^a \tfrac{dx}{x} \tag{23}$$

(k) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$c = ab \tag{24}$$

$$\int\limits_1^c \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^a \tfrac{dx}{x} + \int\limits_a^{ab} \tfrac{dx}{x} \tag{25}$$

$$\int\limits_1^{ab} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^a \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^b \tfrac{dx}{x} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

3. <u>Propriedades do logaritmo $y = ln(x)$</u> A nova função $\int\limits_1^x \frac{dt}{t}$ se chama *logaritmo natual*. Notação: $ln(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$.

(a) (V)[ ](F)[ ] Domínio de $y = ln(x)$ é a reta estritamente positiva.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $a, b > 0$ então $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

(c) (V)[ ](F)[ ] $ln(1) = 0$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $0 < a < 1$ então $ln(a) < 0$.

(e) (V)[ ](F)[ ] $ln(a) = \int\limits_1^a \frac{dx}{x} = \int\limits_{1/a}^1 \frac{dx}{x} = -\int\limits_1^{1/a} \frac{dx}{x} = -ln(1/a)$

(f) (V)[ ](F)[ ] $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

(g) (V)[ ](F)[ ] $y = ln(x) = \int\limits_1^x \frac{dx}{x}$ então $y = ln'(x) = \frac{1}{x}$, é sempre positiva logo $y = ln(x)$ é uma funçao crescente, negativa no intervalo $(0, 1]$, positiva no intervalo $[1, \infty)$ tal que $ln(1) = 0$ então o seu gráfico é o que se encontra na figura (2) página 5,

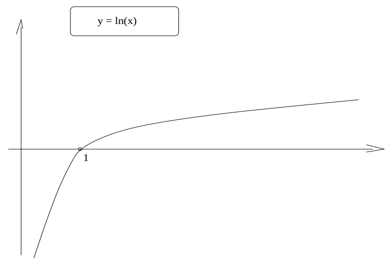

Figura 2: gráfico feito à mão, com `xfig`, de $y = ln(x)$

O programa `exer15_06.calc` calcula o valor de $ln(a)$ para qualquer número que você escolher. Obviamente interessa apenas os logaritmos dos fatores primos de números inteiros:

```
valor aproximado do ln(2)  -->  0.69389724305993749692
valor aproximado do ln(3)  -->  1.09927902940884220169
valor aproximado do ln(5)  -->  1.61003799243409205460
valor aproximado do ln(6)  -->  1.79234288357989852577
 ln(2) + ln(3) = ln(6)
0.69389724305993749692 + 1.09927902940884220169  =
1.79234288357989852577
```

O programa `exer15_06.calc`, que se encontra na página da disciplina, no link "programas", faz estes cálculos e você pode alterá-los para fazer outros cálculos. O programa `exer15_06.gnuplot` executa as mesmas operações que o programa `exer15_06.calc` e também se encontra na página.

4. Propriedades da inversa do logaritmo $y = e^x$

(a) (V)[ ](F)[ ] Como $y = ln(x)$ é uma função estritamente crscente, então é bijetiva e tem inversa. Notação a inversa de $y = ln(x)$ é $y = e^x$ e seu gráfico pode ser obtido por rebatimento em torno da primeira bisetriz do gráfico na figura (2). O resultado é o gráfico na figura (3) página 6,

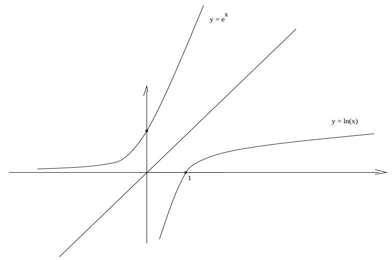

Figura 3: gráficos feitos á mão, com `xfig`, da Exponencial e do logaritmo

(b) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{ab} = e^a + e^b$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{a+b} = e^a e^b$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(1) = 0$ então $e^0 = 1$.

(e) (V)[ ](F)[ ]

- Como o domínio do ln é $\mathbf{R}^{++}$ e
- o seu conjunto de valores é $\mathbf{R}$ então
- $ln : \mathbf{R}^{++} \longrightarrow \mathbf{R}$
- o domínio da exponencial é $\mathbf{R}$
- e o seu conjunto de valores é $\mathbf{R}^{++}$.
- $exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{++}$

Então $e^x > 0$ para qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$.

(f) (V)[ ](F)[ ] $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

(g) (V)[ ](F)[ ] Derivada da exponencial Como

$$y = f(x) = exp(x) \text{ e } x = g(y) = ln(y)$$

é um par de funções inversas então

$$f(g(y)) = x \quad \Rightarrow \quad [f(g(y))]' = f'(g(y))g'(y) = 1 \tag{28}$$

$$f'(g(y)) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = exp(x) \tag{29}$$

$$f'(x) = exp(x) = f(x) \tag{30}$$

Conclusão: a exponencial, $y = e^x$ é a única função cuja derivada é ela mesma: $[e^x]' = e^x$.

(h) (V)[ ](F)[ ] Todas as derivadas de $y = e^x$, na origem, são iguais a 1. Usando a notação de Leibniz $\frac{d^n e^x}{dx^n}|_0 = 1$ para qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.

5. Fórmula de Taylor de $y = e^x$

6. (a) (V)[ ](F)[ ] A reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ é $y = 1+x$

   (b) (V)[ ](F)[ ] A função do segundo grau tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ é $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] A função do terceiro grau tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ é $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] A função polinomial do grau n tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ é

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Um valor aproximado para o número e pode ser obtido com a fórmula de Taylor

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$$

   O programa `exer15_06.calc` calcula este valor para qualquer valor de n que você desejar. Para $n = 20$ obtive

$$e \approx 2.71828182845904523534$$

   Para $n = 2000$, com alguma demora, obtive

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

   o que indica que o programa não está otimizado.

O programa `exer15_06.calc` se encontra na página da disciplina, no link "programas".