Logaritmos

Praciano-Pereira, Tarcisio *

20 de fevereiro de 2025
monografias da Sobral Matemática
no. 2025.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Os logaritmos são uma invenção do século 17 atribuidos a John Napier of Merchiston que viveu entre 1550 e 1617. Eu não conheço a história da descoberta dos logaritmos e é possível que você a encontre na wikipedia. Aqui interessa-me mostrar como foram inventados os logaritmos, e estou fantasiando a história, é o que eles significam para os dias de hoje. Vou inclusive mostrar-lhe um programa de computador que gera uma tabela de logaritmos, com a base de sua escolha. Vou terminar com a descrição do logaritmo complexo que é definido para números negativos e mostrar porque continua não definido para zero.

palavras chave: logaritmos, logaritmo neperiano, tabela de logaritmos

Logarithm is an invention of 17th century attributed to John Napier of Merchiston born 1550 and died in 1617. I do not know the details of this invention and probably you can look it a Wikipedia in better details than those I can give you. Here I am interested into show the way they were invented from the point of view of today's knowledge and what they mean for today's science. You'll have a program which you can use to construct your own logarithm table using your choice of the base.To finish I am defining the complex case of logarithm which gives answers of some restrictions that real logarithm is submitted to.

keywords: logarithm, logarithm table, natural logarithm.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Qual é o meu objetivo neste artigo

Eu fui interpelado por um professor de Matemática sobre o que eram os *logaritmos* e acerca da dificuldade que eles oferecem para sua apresentação no Ensino Médio. Eu não sou historiador, e a história dos logaritmos bem merece um trato correto fechando lacunas que eu vou deixar aqui. É uma história, uma invenção da Idade Média que chegou até os nossos dias com uso intenso até a primeira metade do século 20 quando foram destronados pelas máquinas de calcular elétricas e eletrônicas. Até os idos de 1970, nas escolas, os estudantes usam tabelas de logaritmos para fazer contas para o que elas eram indispensáveis. Mas, *porque funcionavam*, era um questão que sempre foi deixada de lado porque era uma explicação difícil como vou mostrar neste artigo. Pior é que o assunto *logaritmos* ainda aparece nas aulas do *Ensino Médio* basicamente porque aparece no programa do *ENEM*, inteiramente desprovido de sentido e certamente com muito menos compreensão por parte dos professores para explicar como funcionam, porque funcionam e porque ainda fazem parte do currículo porque a sua razão de ser, como "*como máquina de calcular*", se perdeu.

Então eu comecei criando um exemplo um pouco ridículo mas que mostra como associando potências na multiplicação, os *logaritmos*, é possível substituir a *operação complicada de multiplicar* pela bem *menos complicada* que é *adição*. Para isto eu vou precisar associar uma p.g. com uma p.a. esta última, a p.a. é a sequências de potências que vai gerar a p.g. criando uma tabela de logaritmos.

Eu criei uma pequena *tabela de logaritmos* e dei um exemplo com uma multiplicação complicada.

Depois fiz a revisão duma invenção, uma máquina de calcular, a *régua de cálculo*, que substituiu as *tabelas de logaritmos* e foi criada por William Oughtred, em 1622, baseando-se na tábua de logaritmos criada por John Napier pouco antes, em 1614. Oughtred criou em reguas de marfim uma escala logaritmica, baseado no trabalho de Napier de modo que, com duas delas, se deslocando era possível somar os logaritmos. Eu coloquei no texto uma foto da minha *régua de cálculo*, mas com certeza você pode ver imagens melhores fazendo a busca na `wikipedia` usando a chave "*régua de cálculo* ou em inglês *slide rule*. O nome em inglês descreve melhor, *régua deslizante*, porque as mais simples, como a minha, tem uma pequena régua que desliza dentro da maior, tornando possível somar os logaritmos.

Estas *réguas de cálculo* dominaram o espaço sobretudo entre engenheiros até a década de 70 do século passado.

Apresento uma *tabela de logaritmos* mais precisa fazendo referência a um programa que eu produzi para construir *tabelas de logaritmos* com uma indicação para que você baixe o programa e exerça sua sua curiosidade na construção de *tabelas de logaritmos* e talvez até consiga vendê-las numa feira de antiguidades.

Seguem-se algumas considerações que são muito do meu agrado, a vida de dois matemáticos que foram quase contemporâneos, De Moivre, vivendo na Inglaterra onde perambulava por Londres dando aulas particulares, e o outro, Euler que viveu sob a proteção do rei da Rússia e da Suíça. Eles têm em comum a fórmula que é mais conhecida como de Euler e que abriu espaço para definição da exponencial complexa. Então eu termino falando do logaritmo dos números complexos.

2 Logaritmo, o que é

Logaritmo é o nome de uma família de funções estudadas intensivamente, pelo menos desde 1614, confira [Fou, logaritmo].

Esta frase contém, de certo, um erro, em 1614 não se conhecia o conceito *função* que se deve a Cauchy e seus contemporâneos nos séculos 18 e 19.

Os logaritmos estão fundamentados na relação

$$\delta^x \delta^y = \delta^{x+y} \quad \Rightarrow \quad \log_\delta(xy) = \log_\delta(x) + \log_\delta(y); \tag{1}$$

em que as potências transformam produto em adição. O *consequente* na equação (eq.1) é comumente chamado de *lei fundamental dos logaritmos*.

Neste ponto, na versão anterior deste artigo, havia um erro que me foi apontado por um leitor anônimo. Eu havia afirmado que se acoplássemos quaisquer duas sucessões, uma p.a. e uma p.g. o resultado seria uma *tabela de logaritmos*. Isto é falso e eu corrigi a equação (eq.1) *indexando* a função *log* com a base δ da qual ela depende. Não é qualquer par de p.a. e p.g. que forma uma tabela de logaritmos. Cada p.g. escolhida tem uma única p.a. de modo que as duas formam uma *tabela de logaritmos*. E vale, em parte, recíproca desta afirmação porque depende da escolha da *base*, há uma infinidade de p.g. que se associam com uma p.a. quer dizer que existe uma infinidade de *sabores* para *tabelas de logaritmos*.

$$s_n \text{ uma p.a.} \delta^{s_n} \text{ uma p.g.} \tag{2}$$

troque a *base* δ e você tem outra p.g. sincroniza as duas e você tem uma nova *tabela de logaritmos*.

Um tipo foi predominante, as *tabelas de logaritmos decimais* quando a base $\delta = 10$.

Você vai ver, na continuação, o meu método para construir *tabelas de logaritmos* que com certeza não foi o método utilizado pelos *calculistas da Idade Média*. O meu método está baseado nas facilidades que um programa de computador oferece, coisa que os *calculistas da Idade Média* não tinham. Eu vou voltar algumas vezes ao que penso ter sido o método dos *calculistas* e farei comparações com o meu.

Ainda mais, todas as progressões dependem do termo inicial e logo você vai ver que o termo inicial apenas atrapalha e assim vou escolher todas as p.a. começando com zero e as p.g. começando com 1. Porque, qualquer que seja a base, elevada a zero, resulta em 1. E vou repetir algumas vezes que este par, $(0, 1)$ é ponto de sincronização entre as duas progressões. Na verdade o par é $(1, 0)$, porque, nas tabelas, à direita, fica $\log(x)$ e $\log(1) = 0$. As tabelas mostram os pares $(x, \log(x))$.

Estou criando alguns problemas para o formulário das progressões mas logo vou mostrar que isto facilita minha vida para falar de logaritmos e que a correção, retomar as *sagradas fórmulas* das progressões, pode ser feita facilmente.

A seguinte lista de cálculos mostra o que fazer para obter uma *tabela de logaritmos*, e vou tecer comentários explicativos logo depois da lista de equações abaixo. Nelas estou identificando s_n, t_n, como uma p.a. e uma p.g., respectivamente, com a simplificação que eu introduzi a respeito do termo inicial, então, $s_0 = 0, t_0 = 1$.

$$s_n; s_{n+1} - s_n = \Delta; \text{ uma p.a. de razão } \Delta; s_n = n\Delta; \tag{3}$$

$$t_n; \frac{t_{n+1}}{t_n} = \delta; \text{ p.g. de razão } \delta > 0; t_{n+1} = t_n\delta = \delta^{n+1}; t_n = \delta^n; \tag{4}$$

$$s_n = A + n\Delta; s_0 = A = 0; \tag{5}$$

$$t_n = C\delta^n; t_0 = C\delta^0 = 1; \tag{6}$$

$$\begin{cases} s_n = n\Delta; s_0 = A = 0; \\ t_n = \delta^{s_n} =; t_0 = C = 1; \delta > 1; \end{cases} \tag{7}$$

Estas equações (eq.3) até a equação (eq.6), contém as definições habituais para as progressões aritméticas e geométricas. Elas todas dependem duma razão, e dum valor inicial que estou registrando como

$$s_0 = A = 0, t_0 = C = 1 \tag{8}$$

para as p.a. e as p.g. respectivamente. A equação, (eq.7), acopla a p.g. a uma determinada p.a. definida por δ que é a base dos logaritmos cuja tabela será construída e cuja precisão é a razão, Δ, da p.a. Para melhorar a precisão duma *tabela de logaritmos* basta trocar a p.a. na equação (eq.7) tornando-a *mais fina*, quer dizer usando Δ menor.

A equação (eq.7) é o cérebro do meu programa de computador. Nela eu escolho

1. Δ que vai me dar a precisão da tabela;

2. δ que é a seleção da base dos logaritmos;

e o programa imprime a tabela.

Este método era muito complicado para o *calculistas da Idade Média* e logo eu volto a esta questão. É o método prático para produzir *tabelas de logaritmos* usando um programa de computador que não era uma ferramenta disponível para os *calculistas.*

A equação (eq.7) lhe oferece toda a computação necessária para criar uma *tabela de logaritmos* e, *quase com toda a certeza*, não foi o método que os calculistas usaram para produzir as suas tabelas porque seria muito complicado como trabalho manual que eles faziam. Certamente, e não tenho a *informação histórica*, o método que eles usavam consistia na construção das duas sucessões, a geométrica por multiplicação sucessiva do termo anterior por δ e a p.a. por adição sucessiva do Δ. A prática que eles tinham de fazer contas, que nós hoje perdemos, os faria construir estas tabelas numa sucessão de algumas noites de trabalho, duas ou três madrugadas de trabalho quando tudo estava silencioso a volta, com auxílio de velas novas que oferecessem bastante luz para que a vista não ficasse cansada com os cálculos minuciosos.

Novos δ, Δ e uma novíssima tabela mais precisa e mais moderna estava construída.

Quanto menor for Δ mais precisa será a *tabela de logaritmos.* Vou repetir esta frase porque penso que ela não ficou clara, os *calculistas* provavelmente construíram tabelas de logaritmos decimais, então, para eles $\delta = 10$, a novidade duma nova tabela estava na razão Δ e posso adiantar que as duas primeiras linhas duma nova tabela seriam

Uma novíssima tabela

x	$log(x)$
$\delta = 10^{0.00001}$	$\Delta = 0.00001$
$10^{0.00002}$	0.00002

A primeira linha define o Δ da tabela, depois de produzida a tabela eles, os calculistas, apagavam a "δ" e "Δ" que era o *segredo industrial da tabela.* E cada nova linha era produzida com uma nova multiplicação por δ, à esquerda, e uma soma com Δ, à direita. Observe que este método já deixava as duas progressões sincronizadas, a aritmética e a outra geométrica, de acordo com (eq.-3) se cria a possibilidade de a partir de valores obtidos numa encontrar valores sobre a outra. As *progressões geométricas* são sucessões de potências a partir dum termo inicial. Se este termo inicial for 1, as *progressões geométricas* são exatamente uma sucessão de potências duma certa *base* e esta base caracteriza os logaritmos. Vou me fixar nas progressões geométricas cujo termo inicial seja 1, então uma tal progressão é da forma

Mesmos os capitalistas da Idade Média, já escondiam os seus segredos industriais...

$$t_n = C\delta^{s_n}; C = 1; \tag{9}$$

e você pode expandir esta progressão considerando $n \in \mathbf{Z}$ e você vai ver que isto é inútil considerando os logaritmos. A restrição $\delta > 1$ é útil, e os *calculistas* devem ter trabalhado com esta restrição, mas não é necessária porque a troca entre

$$\delta > 1; 0 < \delta < 1 \tag{10}$$

se reduz a simples troca de sinal do expoente, passar a usar logaritmo negativo, então, alternar entre multiplicação e divisão.

Para dividir se subtraem os logaritmos!

A expansão $n \in \mathbf{Z}$ também não oferece nada de novo, e corresponde a troca entre multiplicar ou dividir, novamente. As tabelas se restringiam aos logaritmos positivos e aos números positivos e quem as usassem *tinham que se lembrar que* $ab < 0$ *se os termos na multiplicação tiverem sinais diferentes*!

A sucessão descrita na equação (eq.9), uma p.g., coloca em correspondência as duas sucessões, a geométrica em que $t_n = \delta^{s_n}$ e a progressão aritmética $s_n = n\Delta$ e eu lhe posso mostrar, imediatamente, a razão pela qual este invento foi marcante.

Na listagem de equações abaixo você tem as potências de $\delta = 2.1415 \approx \sqrt{2}$, desde $k = 1$ até $k = 13$. Esta escolha foi feita porque $\sqrt{2}$ é um número "interessante". Mas os *calculistas*, seguramente usariam números próximos de 1 para obter mais precisão nas tabelas, e mais cálculo trabalhoso, mas eles eram *experientes* e eu uso computador!

$$a = 2.1415 \approx \sqrt{2}; \tag{11}$$
$$k = 1 - 2.1415; \tag{12}$$
$$k = 2 - 4.58602225; \tag{13}$$
$$k = 3 - 9.820966648375; \tag{14}$$
$$k = 4 - 21.0316000774950625; \tag{15}$$
$$k = 5 - 45.03917156595567634375; \tag{16}$$
$$k = 6 - 96.45138590849408089014; \tag{17}$$
$$k = 7 - 206.55064292304007422624; \tag{18}$$
$$k = 8 - 442.32820181969031895548; \tag{19}$$
$$k = 9 - 947.24584419686681804317; \tag{20}$$
$$k = 10 - 2028.52697534759029083945; \tag{21}$$
$$k = 11 - 4344.09051770686460783268; \tag{22}$$
$$k = 12 - 9302.86984366925055767369; \tag{23}$$
$$k = 13 - 19922.09577021770006925582; \tag{24}$$
$$k = 14 - 42663.16809192120469831644; \tag{25}$$
$$k = 15 - 91363.17446884925986144465; \tag{26}$$
$$k = 30 - 8347229649.02538923680439574594; \tag{27}$$

Os calculistas da Idade Média compreenderam isto e começaram a calcular tabelas de progressões geométricas com razões extremamente pequenas sincronizadas com progressões aritméticas como é o caso nas equações (eq.12)- (eq.27) em que você tem duas progressões, aritméticas e geométricas *sincronizadas*. E vendiam os livrinhos com estas tabelas com o nome de *tabela de logaritmos*.

$$a = 2.1415 \approx \sqrt{2}; \tag{28}$$
$$91363.17446884925986 = 2.1415^{15}; \tag{29}$$
$$91363.17446884925986 * 91363.17446884925986 \approx 8347229649.02538923680439537126; \tag{30}$$
$$8347229649.02538923680439537126 \approx 2.1415^{30}; \tag{31}$$

Então se eu tiver uma tabela com uma *listagem fina* das potências de $\delta = 2.1415$ e se quiser o produto na equação (eq.30) basta-me somar 15 à potência que corresponde ao número

$$91363.17446884925986;$$

obtendo a potência 30 e verificar o resultado é

$$8347229649.0253892368043953712 6;$$

Quer dizer que substitui a *operação complicada de multiplicar*

$$91363.17446884925986 * 91363.17446884925986 \tag{32}$$

pela soma de potências. *As potências são os logaritmos*!

As potências *são os logaritmos* e formam uma *progressão aritmética*, e os resultados da operação potência formam a *progressão geométrica*, são os elementos da *progressão aritmética* que vou colocar sincronizada com *progressão aritmética* formando uma *tabela de logaritmos*.

Este exemplo é "*muito pouco sofisticado*", porque a minha tabela de logaritmos nas equações (eq.12)- (eq.27) é muito fraquinha! Passe a frente no texto para encontrar uma tabela de logaritmos mais avançada. A minha tabela de logaritmos, quando eu estudava no Ensino Médio em 1957, era um livrinho com mais de cem páginas e me permita fazer contas de multiplicar com notável precisão.

Os logaritmos perderam este sentido porque vieram as máquinas de calcular elétricas e eletrônicas e *hoje multiplicamos apertando alguns botões*. Não se engane pelo saudosismo contido na frase acima, por um lado nós avançamos cientificamente e o tempo perdido procurando os logaritmos numa tabela para fazer uma conta de multiplicar, ou calcular uma raiz quadrada, são compensados pela rapidez com que um programa de computador efetua estas tarefas o que torna possível que um módulo espacial saia da Terra e chegue ao planeta Marte em alguns meses . . . coisa que seria impossível com operadores em terra corrigindo o voo usando uma tabela de logaritmos.

Mas os logaritmos foram usados de modo sistemático até a década de 70 do século passado quando as máquinas eletrônicas lhes tomaram o lugar como "máquinas de calcular" depois de 350 anos dum *serviço exemplar*. Neste avanço os logaritmos perderam lugar para fazer contas e ganharam uma posição mais avançada em outras análises da Matemática. Eles não perderam o lugar, apenas ganharam outra função e o que não cabe mais é que eles continuem sendo assunto de exames como o ENEM, como "*máquina de calcular*".

Por que logaritmos decimais foram preferidos

Os logaritmos decimais, que foram de longe os mais usados, são obtidos quando $\Delta = 10^n$, n um número inteiro, negativo, em módulo suficientemente grande, quer dizer que

$$\Delta = 0,000000\ldots001, \text{ a diferença}, \delta = 10 \text{ a base}; \tag{33}$$

e a razão para esta escolha se encontra em que basta uma *tabela de logaritmos* em que p.a. vá de zero ao número mais próximo de 1000 para que se possam fazer contas com **todos os números possíveis**. Vou logo corrigir esta afirmação falsa!

Por exemplo, considere os números $1,01$ e 10001 que diferem de quatro casas decimais, quer dizer pela multiplicação por 10000

```
log(1.01) =     0.00432137378264257428
log(10001)  = 4.00004342727686266963
```

usando uma tabela que fosse de 1 até 1000 varreria todos os números apenas com acréscimo dum número inteiro na *parte inteira* do logaritmo, chamada de *característica* porque a parte decimal, chamada de *mantissa*, seria a mesma. Se a tabela fosse até 1000000 a probabilidade de erros seria menor e eu não me lembro qual era a expansão das tabelas de logaritmo do meu tempo do Ensino Média que se chamava *colegial*.

o nome foi trocado pela *ditadura militar* de 1º de abril de 1964, quebrando a a nossa história porque eu estudei no *grupo escolar José Veríssimo*, no *primário*, em Belém, que hoje pegou o nome estranho de *EEF José Veríssimo*. Na verdade o que ficou estranho é eu dizer que estudei no *grupo escolar José Veríssimo*. A *ditadura militar* me transformou num ser *extraterrestre*!

Aqui havia um erro, imperceptível para a precisão necessária até meados do século 20 mas que o programa `calc` registrou na quarta casa decimal de log(1.01)

$$\log(1.01) < \log(10001) \tag{34}$$

porque $\log_{10}$ é uma *função crescente*.

Mas este exemplo justifica porque as tabelas de *logaritmo decimal* dominaram, com δ maior, e com Δ menor, seria possível obter grandes listagens de logaritmos empurrando o erro várias casas decimais para frente. Não tenho certeza, mas minha tabela de logaritmos do "*Ensino Médio*" deveria ter umas cem páginas para cobrir os logaritmos até 1000.

3 Réguas de cálculo

No final do século 17 foi uma construída uma máquina de cálculo, a *régua de cálculo*, "*slide rule*", em inglês, baseada no princípio da correspondência entre as duas progressões, apenas usando uma distribuição logarítmica para as marcações numéricas, como você pode ver nas figuras (fig 1), (fig 2) página 6.

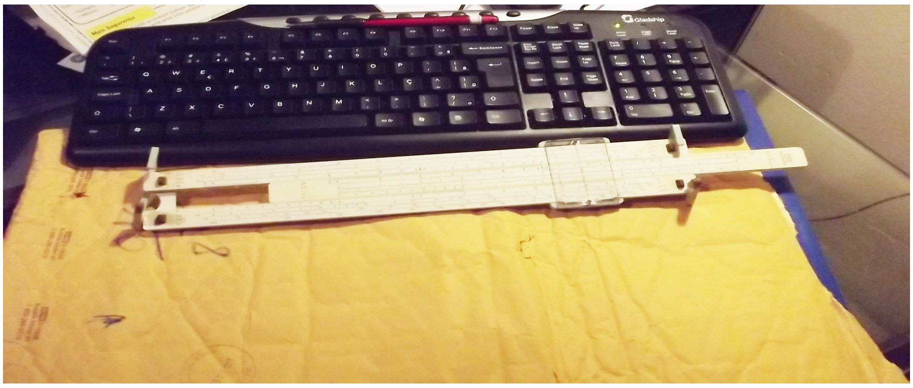

Figura 1: Régua de cálculo

São fotos da minha *régua de cálculo* que está perfeita e bem conservada embora eu não tenha mais a prática dos meus tempos de estudante de graduação em Matemática da década de 60. Haviam certames entre os estudantes para medir a rapidez e a precisão dos *calculistas com a régua* e alguns conseguiam fazer a leitura de *várias casas decimais* entre duas marcas que as réguas traziam. Foi uma habilidade que se perdeu com a facilidade que os computadores oferecem...

Fazendo uma busca com um dos termos "*régua de cálculo*" ou "*slide rule*" você vai encontrar imagens melhores e inclusive mais explicações sobre o uso deste antigo instrumento e o nome do seu inventor, o inglês William Oughtred. Bom, Oughtred de fato criou um instrumento que foi

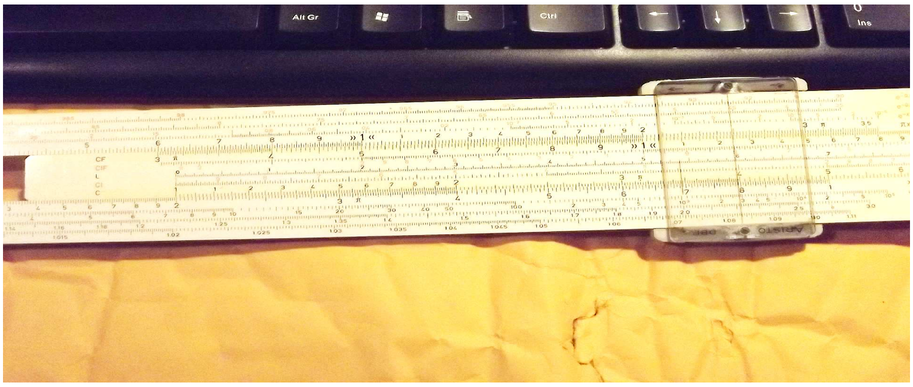

Figura 2: $2 \times 3 = 6$

sendo melhorado ao longo dos 200 anos que se passaram, a busca na *internet* vai lhe mostrar a evolução do instrumento que não podia dispensar as *tabelas* dos calculistas porque eram cópias da precisão dos cálculos manuais copiados para as réguas plásticas.

Até 1960, as chamadas *tabelas de logaritmos*, eram indispensáveis nas escolas e todo estudante tinha a sua *tabela*, ou a sua *régua de cálculo*. Foi uma das invenções mais prolíficas da Matemática, foi a "máquina de calcular" usada pelos *calculistas do final Idade Média*, descritos no livro, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* por John Napier, em 1614, e ainda estavam uso até a primeira metade do século 20.

Os *calculistas* descobriram o *segredo dos logaritmos*: colocar em correspondência duas progressões, uma geométrica e a outra aritmética com a sincronização dos elementos neutros da multiplicação e da adição. Nas *réguas de cálculo*, muito engenhosamente, apareciam apenas as marcas numa distribuíção logaritmica, então, ao deslisar a parte interior da régua movimentando o 1 até que ele se ajustassem à marca dum determinado *logaritmo*, ao procurar o outro *logaritmo* na banda imóvel da régua, os dois *logaritmos* estavam sendo somados oferecendo o resultado da multiplicação. A operação inversa, uma subtração das escalas, seria divisão dos dois números escolhidos. E esta operação poderia ser iterada colocando a marca do 1 no resultado para multiplicar com um terceiro número e assim sucessivamente. O *cursor móvel* servia para identificar o resultado da primeira operação e marcar o ponto de seguir para a operação seguinte. As *réguas* mais sofisticadas traziam marcações logarítmicas dos dois lados permitindo operações bem mais complexas o que incluía logaritmos das funções trigonométricas, $\sin, \cos$, $\exp$ e das funções hiperbólicas.

Uma famosa empresa alemã investiu fundo na construção destas *réguas* e vendia por alto preço suas réguas sofisticadíssimas com mais de uma régua deslizante, múltiplas funções matemáticas para serem compostas. Composição de funções era uma *generalização* da multiplicação e as *réguas de cálculo* mais sofisticadas faziam isto.

O algoritmo

Um exemplo simples vem quando você escrever as sucessíveis potências de um número $\delta > 0$, as potências formam uma *progressão aritmética*, e o resultado de elevar δ a cada uma dessas potências é uma progressão geométrica. Eu fiz isto com algumas potências de 2.1415 nas equações (eq.12)- (eq.27).

Os calculistas da Idade Média descobriram o poder desta sincronização e começaram a colocar longas listas de p.g. sincronizadas com p.a. e depois somando os termos na p.a. podiam descobrir quanto valia o produto dos números em correspondência que apareciam na p.g. E bastava diminuir a razão da p.a. e assim obter uma tabela de logaritmos mais precisa que seria um novo produto para ser colocado a venda, com uma propaganda nos moldes do século 21, *uma novíssima tabela de logaritmos, de altíssima precisão* calculada recentemente pelo *calculista Edgard Venant*.

Experimente, na página 11 você encontra uma tabela de logaritmos 1. Se você quiser efetuar o produto dos números $1.1651390, 1.1973770$, leia os logaritmos que lhe correspondem na coluna ao lado dos mesmos:

- $1.1651390 \mapsto 0.175 = \log(1.1651390)$
- $1.1973770 \mapsto 0.20625 = \log(1.1973770)$
- $0.175 + 0.20625 = 0.38125 \hookleftarrow 1.3951107 = 1.1651390 * 1.1973770$

Usando `calc`, uma linguagem de programação de domínio público, o resultado que encontrei é

$$1.1651390 * 1.1973770 = 1.395110640403 \tag{35}$$

portanto há um erro na sétima casa decimal usando <u>esta tabela</u> de logaritmos. Com uma tabela mais precisa este erro pode ser mais reduzido.

Uma tabela de logaritmos, essencialmente, é a listagem das duas progressões, a *aritmética*, a coluna de $\log(x)$, e a *geométrica*, a coluna do x, obtida, no meu caso usando a progressão aritmética como expoentes dum δ escolhido como já descrevi acima, sincronizadas pela associação

$$0 \mapsto 1; \tag{36}$$

pondo em correspondência os *elementos neutros* da adição e da multiplicação. Se a p.g. for obtida por este método, usando a p.a. como expoentes, basta sincronizar as duas usando $0, 1$. As *réguas de cálculo* eram as tabelas transformadas em marcas com *distâncias logarítmicas* nas partes móveis da régua.

O zero é um logaritmo e *nunca* aparece o zero no outro lado da tabela porque ninguém precisa de logaritmos para multiplicar por zero! Pela mesma razão, nas *réguas de cálculo* não aprece o zero, porque *zero não é logaritmo* e as marcas das escalas numa *régua de cálculo* trazem os logaritmos que devem ser somados com os deslocamento da parte móvel da *régua*.

A razão mais forte é que *zero não pode ser elemento duma* p.g., e pode, da p.g. nula que é completamente inútil.

Qualquer tabela deste tipo é uma tabela de logaritmos e no ponto em que surgir a associação

$$a \mapsto 1;$$

se tem a *base* $\underline{a}$ dos logaritmos desta tabela. E você não precisa saber qual é a *base* para usar os logaritmos, basta construir as duas progressões com grande precisão:

- Fixe a associação fundamental, $0 \mapsto 1$;
- e na coluna do 1 multiplique por $\delta > 0$, *muito pequeno*, este número δ é a base do logaritmo. Quando o logaritmo for decimal $\delta = 1.000001$ e quanto mais zero você escolher mais precisa será sua tabela de logaritmos.

- na coluna do 0 subtraia ou some um Δ *muito pequeno, em valor absoluto*, novamente, quanto menor, e ainda positivo for a razão da progressão aritmética, mais precisa será sua tabela de logaritmos. Subtrair é inútil, ninguém precisa e logaritmos negativos.
- e mantenha as duas sucessões *acopladas* na relação fundamental. Escolha dois números x, y na primeira coluna, identifique seus correspondes logaritmos na progressão aritmética e some-os, procure a quem corresponde o resultado da soma que é o resultado do produto dos dois números xy. O resultado pode ter um erro que é consequência da precisão tabela que você construiu, será um *resultado aproximado*.
- Este método não é bom, e eu já lhe mostrei um melhor, o meu! Acompanhando os *calculistas da Idade Média* comece com a p.a. usando Δ muito pequeno, e depois use os resultados como potências para o δ. É bem provável que tenha sido o método mais rudimentar usado pelos calculistas da *Idade Média* porque as contas seriam mais fáceis para quem tinha a experiência de fazê-las. Usando uma linguagem de programação eu monto em segundos uma tabela de logaritmos usando *o meu método*. Falei "segundos" e é certo, melhor ainda, posso produzir o resultado pronto para ser impresso em pdf usando LaTeX. Os *calculistas da Idade Média* precisavam de algumas madrugadas para produzir uma nova tabela mais precisa, mas hoje eu produziria um trabalho para ser colocado numa estante de museu da História da Matemática.

4 Logaritmo e base

Eu lhe expliquei como você pode construir uma tabela de logaritmos escolhendo dois números pequenos e positivos, um será a razão da progressão geométrica, $\delta \approx 1$ formada pelos números que ficarão na coluna x e outro número positivo, que chamei Δ que será a razão da progressão aritmética, a coluna do $\log(x)$. Este deve ter sido o *método* dos *calculistas da Idade Média*. A p.g. tem como primeiro termo 1 cujo logaritmo é zero o primeiro termo da p.a. A p.g. seria obtida por sucessivas multiplicações pelo δ e a p.a. obtida pela somas sucessivas do Δ. Algumas madrugadas a dentro de cálculos à luz de velas e uma nova tabela viria à lume!

Não interessa nem mesmo se você alterar a ordem de crescimento entre as duas colunas isto significaria apenas que você inverteu a base do logaritmo, de δ, para $\frac{1}{\delta}$ ...

O número "*muito pequeno*" Δ representa a precisão da *tabela de logaritmos* construída. Se você puder encontrar $a \mapsto 1$ você fica sabendo qual é a *base* destes logaritmos. Com *calc* eu posso obter

```
ln(exp(1)) -> 1; exp(1) -> 2.71828182845904523536
log(10) -> 1
```

para *calc* existem os dois logaritmos com *ln* para chamar o *logaritmo natural* e *log* para chamar o *logaritmo decimal*.

Δ é o segundo elemento da p.a. e δ é o segundo elemento da p.g.

Mas esta descoberta não interessa para fazer as contas com os logaritmos, e esta segunda associação não é sempre possível de ser obtida ao colocarmos em correspondência as duas progressões, o caso do número e ilustra bem esta dificuldade uma vez que $\underline{e}$ é um dos poucos números que *não é algébrico* cuja *identidade nós conhecemos*. Claro, nós somente conhecemos aproximações do número $\underline{e}$.

Na tabela 1, na página 11, você vai encontrar, na coluna do logaritmo, o número 1 como *aproximadamente* o logaritmo de e que na tabela aparece com o valor 2.3949776 e `python3` me fornece `exp(1) --> 2.718281828459045` o erro da minha tabela é $2.718281828459045 - 2.3949776$ mas ainda assim ela funciona, experimente.

Esta *tabela de logaritmos* é chamada *tabela de logaritmos naturais*. É também chamada de *tabela de logaritmos neperianos*. Aqui tenho uma *curiosidade histórica*, eu não tenho a mínima ideia de como os calculistas possam ter encontrado o número $\underline{e}$ ou em que momento apareceram os *logaritmos naturais*. Com definição moderna esta resposta é fácil e natural. É uma questão histórica!

As tabelas de *logaritmos decimais* foram as mais comuns, nelas se tinha o par de associações

$$1 \mapsto 0; 10 \mapsto 1; \tag{37}$$

e se você quiser construir uma tabela de logaritmos decimais, calcule

$$\Delta = 10^n; n < 0; n \text{ negativo, de módulo muito grande} \tag{38}$$

como razão da p.a. e calcule

$$\delta = 10^{\Delta}; \tag{39}$$

como razão da p.g. e repita o trabalho dos *calculistas da Idade Média* durante algumas madrugadas, ou use o meu programa durante alguns segundos.

Na tabela 1, na página 11, você pode ver uma tabela de logaritmos que foi gerada por um programa em `python` que pode ser baixado de [Pra09, log_tabela_py]. Para executar o programa, troque o nome de `log_tabela_py` para `log_tabela.py` para que o *interpretador* do `python3` o reconheça.

Com este programa em `python` você pode construir uma tabela de logaritmos de alta precisão e bastante extensa.Imprima e guarde para quando não tivermos mais computadores disponíveis quando teremos que retornar aos métodos de cálculo da *Idade Média* ou de muito antes... se ainda soubermos ler, as tabelas serão úteis.

5 Impossibilidades nos logaritmos

A correspondência entre progressões geométrica e aritmética mostra a impossibilidade de que se calcule $p = \log(0)$ porque não é possível escrever a potência $\delta^p = 0$. Desta forma o domínio de qualquer função logarítmica real é o conjunto dos números reais estritamente positivos. Se você quiser multiplicar números de sinais contrário tem que usar as regra

$$x > 0; y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy < 0; x < 0; y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0 \tag{40}$$

e multiplicar x por $|y|$ ou $|x|$ por $|y|$.

Na época em que Néper divulgou os logaritmos, eles foram objeto de diversas pesquisas um dos pontos altos, certamente, foi a demonstração por Euler dos dois *limites notáveis*

$$\begin{cases} e^x = \lim\limits_n (1 + x/n)^n; \\ log(x) = \lim\limits_n n(x^{1/n} - 1); \end{cases} \tag{41}$$

definindo um par de funções inversas.

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0	1.2440142	0.25	1.5475715	0.5	1.9252010	0.75
1.0054735	0.00625	1.2508234	0.25625	1.5560421	0.50625	1.9357386	0.75625
1.0109769	0.0125	1.2576698	0.2625	1.5645591	0.5125	1.9463339	0.7625
1.0165105	0.01875	1.2645536	0.26875	1.5731228	0.51875	1.9569872	0.76875
1.0220744	0.025	1.2714752	0.275	1.5817333	0.525	1.9676988	0.775
1.0276687	0.03125	1.2784346	0.28125	1.5903909	0.53125	1.9784690	0.78125
1.0332937	0.0375	1.2854321	0.2875	1.5990959	0.5375	1.9892982	0.7875
1.0389495	0.04375	1.2924680	0.29375	1.6078486	0.54375	2.0001866	0.79375
1.0446362	0.05	1.2995423	0.3	1.6166492	0.55	2.0111347	0.8
1.0503540	0.05625	1.3066554	0.30625	1.6254979	0.55625	2.0221427	0.80625
1.0561031	0.0625	1.3138074	0.3125	1.6343951	0.5625	2.0332109	0.8125
1.0618837	0.06875	1.3209985	0.31875	1.6433410	0.56875	2.0443397	0.81875
1.0676959	0.075	1.3282290	0.325	1.6523358	0.575	2.0555294	0.825
1.0735400	0.08125	1.3354991	0.33125	1.6613799	0.58125	2.0667804	0.83125
1.0794160	0.0875	1.3428089	0.3375	1.6704735	0.5875	2.0780929	0.8375
1.0853242	0.09375	1.3501588	0.34375	1.6796169	0.59375	2.0894674	0.84375
1.0912647	0.1	1.3575489	0.35	1.6888103	0.6	2.1009041	0.85
1.0972378	0.10625	1.3649795	0.35625	1.6980540	0.60625	2.1124034	0.85625
1.1032435	0.1125	1.3724507	0.3625	1.7073483	0.6125	2.1239657	0.8625
1.1092822	0.11875	1.3799629	0.36875	1.7166935	0.61875	2.1355912	0.86875
1.1153538	0.125	1.3875161	0.375	1.7260899	0.625	2.1472804	0.875
1.1214587	0.13125	1.3951107	0.38125	1.7355376	0.63125	2.1590336	0.88125
1.1275971	0.1375	1.4027468	0.3875	1.7450371	0.6375	2.1708511	0.8875
1.1337690	0.14375	1.4104248	0.39375	1.7545886	0.64375	2.1827333	0.89375
1.1399747	0.15	1.4181448	0.4	1.7641924	0.65	2.1946805	0.9
1.1462143	0.15625	1.4259070	0.40625	1.7738487	0.65625	2.2066931	0.90625
1.1524881	0.1625	1.4337117	0.4125	1.7835579	0.6625	2.2187715	0.9125
1.1587963	0.16875	1.4415592	0.41875	1.7933202	0.66875	2.2309159	0.91875
1.1651390	0.175	1.4494496	0.425	1.8031360	0.675	2.2431269	0.925
1.1715164	0.18125	1.4573831	0.43125	1.8130054	0.68125	2.2554047	0.93125
1.1779287	0.1875	1.4653601	0.4375	1.8229289	0.6875	2.2677496	0.9375
1.1843761	0.19375	1.4733808	0.44375	1.8329068	0.69375	2.2801622	0.94375
1.1908588	0.2	1.4814454	0.45	1.8429392	0.7	2.2926427	0.95
1.1973770	0.20625	1.4895541	0.45625	1.8530266	0.70625	2.3051915	0.95625
1.2039308	0.2125	1.4977072	0.4625	1.8631691	0.7125	2.3178090	0.9625
1.2105206	0.21875	1.5059049	0.46875	1.8733672	0.71875	2.3304956	0.96875
1.2171464	0.225	1.5141475	0.475	1.8836211	0.725	2.3432515	0.975
1.2238084	0.23125	1.5224352	0.48125	1.8939311	0.73125	2.3560774	0.98125
1.2305070	0.2375	1.5307683	0.4875	1.9042976	0.7375	2.3689734	0.9875
1.2372422	0.24375	1.5391469	0.49375	1.9147208	0.74375	2.3819400	0.99375

Tabela 1: Tabela de logaritmos

6 História como script do currículo

A proposta de que o *logaritmo* desapareça do Ensino Médio pode se bater com a questão da história. Eu acho que existe *historicismo* em certas tentativas pedagógicas. É fácil perceber que é impossível construirmos o conhecimento usando o *método histórico*, porque não haveria tempo hábil para fazê-lo... Somente o assunto *logaritmo* precisaria de condensar 300 anos em algumas semanas.

Os objetos históricos devem ser preservados em museus que são locais que devemos visitar regularmente e desta forma, com certeza, criar motivações para os estudos. Sala de aula não pode ser considerada parte do museu, mas pode, se houver razões, ser transferida para um ambiente de museu para uma rápida visita. O currículo é que não pode ser sacrificado para incluir todo o conhecimento acumulado pela Humanidade.

E logaritmo como máquina de calcular pertence à história, é um artigo de museu e merece, com certeza, ser estudado com este enfoque, da História. Mas entulhar o currículo do Ensino Médio com itens de museu representa uma distorção e um desserviço.

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
2.3949776	1.0	2.9793863	1.25	3.7063991	1.5	4.6108134	1.75
2.4080865	1.00625	2.9956940	1.25625	3.7266861	1.50625	4.6360507	1.75625
2.4212672	1.0125	3.0120910	1.2625	3.7470842	1.5125	4.6614262	1.7625
2.4345200	1.01875	3.0285777	1.26875	3.7675939	1.51875	4.6869406	1.76875
2.4478454	1.025	3.0451546	1.275	3.7882159	1.525	4.7125946	1.775
2.4612437	1.03125	3.0618223	1.28125	3.8089507	1.53125	4.7383891	1.78125
2.4747154	1.0375	3.0785813	1.2875	3.8297990	1.5375	4.7643247	1.7875
2.4882607	1.04375	3.0954319	1.29375	3.8507615	1.54375	4.7904023	1.79375
2.5018803	1.05	3.1123748	1.3	3.8718387	1.55	4.8166226	1.8
2.5155743	1.05625	3.1294104	1.30625	3.8930312	1.55625	4.8429865	1.80625
2.5293434	1.0625	3.1465393	1.3125	3.9143398	1.5625	4.8694946	1.8125
2.5431878	1.06875	3.1637619	1.31875	3.9357650	1.56875	4.8961478	1.81875
2.5571079	1.075	3.1810788	1.325	3.9573074	1.575	4.9229470	1.825
2.5711043	1.08125	3.1984905	1.33125	3.9789678	1.58125	4.9498928	1.83125
2.5851773	1.0875	3.2159974	1.3375	4.0007467	1.5875	4.9769861	1.8375
2.5993273	1.09375	3.2336002	1.34375	4.0226449	1.59375	5.0042277	1.84375
2.6135547	1.1	3.2512994	1.35	4.0446629	1.6	5.0316184	1.85
2.6278600	1.10625	3.2690954	1.35625	4.0668014	1.60625	5.0591590	1.85625
2.6422437	1.1125	3.2869888	1.3625	4.0890611	1.6125	5.0868504	1.8625
2.6567060	1.11875	3.3049802	1.36875	4.1114426	1.61875	5.1146933	1.86875
2.6712475	1.125	3.3230701	1.375	4.1339466	1.625	5.1426886	1.875
2.6858686	1.13125	3.3412589	1.38125	4.1565738	1.63125	5.1708372	1.88125
2.7005698	1.1375	3.3595474	1.3875	4.1793249	1.6375	5.1991398	1.8875
2.7153514	1.14375	3.3779359	1.39375	4.2022005	1.64375	5.2275974	1.89375
2.7302139	1.15	3.3964250	1.4	4.2252013	1.65	5.2562107	1.9
2.7451577	1.15625	3.4150154	1.40625	4.2483280	1.65625	5.2849806	1.90625
2.7601834	1.1625	3.4337075	1.4125	4.2715812	1.6625	5.3139080	1.9125
2.7752913	1.16875	3.4525020	1.41875	4.2949618	1.66875	5.3429938	1.91875
2.7904819	1.175	3.4713993	1.425	4.3184703	1.675	5.3722387	1.925
2.8057556	1.18125	3.4904000	1.43125	4.3421075	1.68125	5.4016437	1.93125
2.8211129	1.1875	3.5095048	1.4375	4.3658741	1.6875	5.4312097	1.9375
2.8365543	1.19375	3.5287141	1.44375	4.3897707	1.69375	5.4609375	1.94375
2.8520803	1.2	3.5480286	1.45	4.4137982	1.7	5.4908280	1.95
2.8676912	1.20625	3.5674487	1.45625	4.4379572	1.70625	5.5208821	1.95625
2.8833875	1.2125	3.5869752	1.4625	4.4622484	1.7125	5.5511007	1.9625
2.8991698	1.21875	3.6066086	1.46875	4.4866726	1.71875	5.5814847	1.96875
2.9150384	1.225	3.6263494	1.475	4.5112304	1.725	5.6120351	1.975
2.9309939	1.23125	3.6461983	1.48125	4.5359227	1.73125	5.6427526	1.98125
2.9470367	1.2375	3.6661558	1.4875	4.5607501	1.7375	5.6736383	1.9875
2.9631674	1.24375	3.6862225	1.49375	4.5857134	1.74375	5.7046930	1.99375

7 Logaritmo no formato de integral

A forma moderna como se apresentam os logaritmos passa pela definição:

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{42}$$

com a qual é bem simples provar que $log(ab) = log(a) + log(b)$ para dois números reais positivos quaisquer, e, por definição mesmo,

$$\log(1) = 0 = \int_1^1 \frac{dt}{t}; \tag{43}$$

Observação 1 *A integral*

Se você ainda não tiver estudado integral, que é a expressão que aparece na equação (eq. 42), entenda que a integral, assunto do Cálculo, é a área que se encontra delimitada entre o gráfico duma função e o eixo OX e pode ser calculada, aproximadamente, usando retângulos contidos nesta área cuja soma é uma "soma de Riemann" em homenagem ao matemático alemão que modernizou o método que os gregos conheciam para calcular áreas e volumes de figuras geométricas com contornos não lineares.

A figura (fig. 3, na página 13 representa uma função cuja integral aproximada está sendo descrita por coleção de retângulos contidos no gráfico duma função. Vou descrever a expressão desta soma

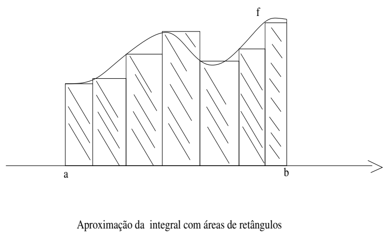

Figura 3: Soma de Riemann

explicando os detalhes de modo que você pode começar o seu Curso de Cálculo a partir deste ponto, calculando integrais aproximadamente. Vou descrever um caso particular, as somas de Riemann uniformes que serve para uma grande quantidade de casos e é mais simples. Entendendo que começando com este caso particular é fácil entender, depois, o caso geral. Avançando as contas, comparando com a figura (fig. 3, na página 13.

$$y = f(x); \Delta = \frac{b-a}{N} \text{ base dos retângulos} \tag{44}$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\Delta; x_k = a + k\Delta; \tag{45}$$

$$S_N = \Delta \sum_{k=0}^{N} f(x_k); x_k = a + k\Delta; \tag{46}$$

- *Na equação (eq.44) fiz referência a uma função definida no intervalo* $[a, b]$ *para escrever a soma de Riemann de* f *neste intervalo e assim vou obter uma aproximação de*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{47}$$

  para começar aceite esta notação para representar a integral, em algum momento você vai ter a oportunidade de compreendê-la melhor, é a integral de f *no intervalo* $[a, b]$*, de que a soma de Riemann vai ser uma aproximação.*

- *Na equação (eq.45) eu descrevi a somas das áreas dos retângulos que você pode ver na figura (fig. 3, na página 13,* x_k *é ponto inicial da base de cada retângulo e em seu conjunto eles formam uma progressão aritmética de razão* $\Delta = \frac{b-a}{N}$ *em que* N *é quantidade de retângulos. A expressão* $f(x_k)\Delta$ *é a área de um retângulo e a soma é uma aproximação da* $\int_a^b f(x)dx$*.*

- *Na equação (eq.46) eu coloquei* Δ *em evidência, o que é possível quando estiver calculando uma soma de Riemann uniforme, e permite um ganho computacional, primeiro calculo as somas das alturas e depois multiplico pelo tamanho comum das bases.*

A figura (fig. 3, na página 13, não mostra uma divisão uniforme do intervalo $[a, b]$*.*
Desmitifique a integral e calcule $\ln(2)$

$$\ln(2) = \int_0^2 \frac{1}{x}dx; \tag{48}$$

$$ln(2) \approx 0.69314; \tag{49}$$

usando retângulos inscritos no gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ *calcule a área* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *e ignore o significado do símbolo "dx"entendendo que este símbolo todo significa a área entre o gráfico de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *e o eixo* OX *desde* 1 *até* 2*.*

Se você obtiver algo próximo a 0.6 *você já estará calculando uma integral que é impossível de ser calculada exatamente! Com um simplex programa de computador a base dos retângulos pode ser reduzida a milésimos melhorando o resultado, mas este método tem restrições quanto a precisão. Você pode começar a estudar integral usando somas de Riemann mas fique sabendo que elas, embora sejam o método para obter com exatidão as integrais das funções polinomiais, elas perdem em precisão para alguns tipos de funções.*

A demonstração da propriedade fundamental dos logaritmos, se faz usando *somas de Riemann uniformes* e o método consiste em escrever a soma de Riemann para

Para funções uniformemente contínuas as somas de Riemann uniformes produzem o mesmo resultado que as não uniformes.

$$\int_a^b \frac{dt}{t}; a,b > 0; \tag{50}$$

e mostrar que esta soma de Riemann equivale à soma de Riemann da integral

$$\int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t}; a,b > 0; \tag{51}$$

que prova que qualquer integral da forma da equação (eq.50) pode ser escrita como uma integral tendo como condição inicial 1 e final $\frac{b}{a}$ ou ainda que se pode *cancelar a condição inicial*. Vale também para a condição final, mas o interesse é mostrar que todas as integrais podem começar a partir de 1, para esta função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Logaritmo como uma integral

Vou seguir de perto o conteúdo do livro de Courant, [Cou61, página 84] em que ele discute a integração de funções univariadas e vou aplicar o método a uma função muito particular, $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$ em que ela é contínua e diferenciável.

$$f(x) = \tfrac{1}{x}; x \in (0,\infty); [a,b] \subset (0,\infty); \tag{52}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\Delta; \Delta = \tfrac{b-a}{N}; x_k = a + k\Delta; \tag{53}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \tfrac{1}{a+k\Delta}; \tag{54}$$

$$\Delta' = \tfrac{\Delta}{a} = \tfrac{\frac{b}{a}-1}{N}; \tag{55}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \tfrac{1}{a(1+k\Delta')}; \tag{56}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{\Delta}{a} \sum_{k=0}^{N-1} \tfrac{1}{1+k\Delta'}; \tag{57}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta' \sum_{k=0}^{N-1} \tfrac{1}{1+k\Delta'} \approx \int_1^{b/a} f(x)dx; \tag{58}$$

Deixe-me fazer alguns comentários sobre as contas, se lhe parecerem óbvios, salte para frente.

- Na equação (eq. 52) escrevi a definição da função f cuja *soma de Riemann* eu vou calcular.
- Na equação (eq. 53) escrevi a expressão da *soma de Riemann* e indiquei como calcular Δ e x_k. Nos livros você vai encontrar Δx porque o hábito é que o salto Δ seja variável e dependa do ponto x em que está sendo calculado. Aqui eu estou usando uma *soma de Riemann* uniforme em que o salto é sempre o mesmo e depende apenas do número N de subintervalos da partição. Isto vai agilizar a computação.
- Na equação (eq. 54) eu coloquei Δ em evidência, propriedade distributiva, o que é possível porque estou trabalhando com uma *soma de Riemann* uniforme. Também escrevi a expressão de f como fração.

- Na equação (eq. 55) eu defini Δ' dividindo Δ por a porque na próxima equação eu vou colocar a em evidência.
- A equação (eq. 56) é uma explicação extra junto com a a equação (eq. 57) para justificar como estou colocando a em evidência.
- Na equação (eq. 58) estou mostrando a *soma de Riemann* modificada é exatamente igual, numericamente, à anterior mas agora está referenciada sobre o intervalo $[1, \frac{b}{a}]$ mostrando a propriedade fundamental da integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ que permite "*cortar*" o índice inferior da integral. Também permite "*cortar*" o índice superior da integral, mas isto não me interessa.

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é a única função que admite esta sequência de transformações para redefinir o cálculo da integral. Falso! Qualquer função da forma $f(x) = \frac{K}{x}$ em que K seja um número positivo diferente de zero permite estas transformações e logo adiante vou explicar o que significam estas funções.

Como f é contínua e $[a, b] \subset (0, \infty)$ então nas contas anteriores eu pude obter uma forma equivalente para o valor da integral usando $\Delta' = \frac{\frac{b}{a}-1}{N}$ em que N é o número de subintervalos de uma partição uniforme de $[1, \frac{b}{a}]$. O mesmo poderia ter sido feito para trabalhar com o intervalo $[\frac{a}{b}, 1]$ mas não é o meu interesse aqui.

O ganho com estas contas são os seguintes:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \int_1^{b/a} \frac{1}{x}dx; \tag{59}$$

$$\int_{10}^{100} \frac{1}{x}dx = \int_1^{10} \frac{1}{x}dx; \tag{60}$$

$$\int_{100}^{1000} \frac{1}{x}dx = \int_1^{10} \frac{1}{x}dx; \tag{61}$$

$$ln(1000) = \int_1^{1000} \frac{1}{x}dx = \int_1^{10} \frac{1}{x}dx + \int_1^{100} \frac{1}{x}dx + \int_{100}^{1000} \frac{1}{x}dx = 3\int_1^{10} \frac{1}{x}dx; \tag{62}$$

e maior ganho é que estas contas vão me permitir a definição de uma nova função o *logaritmo*. Vou logo generalizar o sistema de equações (eq.59) -(eq.62).

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^{b} \frac{1}{x}dx; \tag{63}$$

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}dx; \tag{64}$$

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}dx + \int_1^{b} \frac{1}{x}dx; \tag{65}$$

$$ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x}dx = ln(a) + ln(b); \tag{66}$$

A integral

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = ln(a) \tag{67}$$

define uma *nova função* o *logaritmo natural* ainda chamado de *logaritmo neperiano* que possivelmente não era conhecido de Néper, o inventor dos logaritmos da Idade Média. Também é interessante aqui observar a *nomenclatura da Matemática* que algumas vezes é *perversa.* Eu não sei qual terá sido a invenção Néper, mas desconfio que terão sido os *logaritmos decimais* porque em sua época já estava bastante desenvolvido o sistema decimal de números. então a denominação de "*natural*" para os *logaritmos neperiano* é certamente uma perversidade.

Uma questão de História da Matemática.

Uma outra questão de História da Matemática.

Se em vez de $\frac{1}{x}$ eu tivesse usado $\frac{K}{x}; K > 0$ todas as contas continuariam válidas e eu teria produzido um outro tipo de logaritmo. Eu não demonstrei isto, mas você pode facilmente fazer a demonstração substituindo na equação (eq. 52) até (eq. 58) $f(x) = \frac{1}{x}$ por $f(x) = \frac{K}{x}$, as constas são exatamente as mesmas chegando à conclusão de que $f(x) = \frac{K}{x}$ tem a mesma propriedade de transformação de produto em soma, um isomorfismo do grupo multiplicativo $(\mathbf{R}^{+}, \cdot)$ no grupo aditivo $(\mathbf{R}, +)$. Vou calcular K que transforma o logaritmo natural no logaritmo decimal.

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a = e; \text{ definição de } e; \tag{68}$$

$$\int_1^a \frac{K}{x}dx = 1 = Kln(a); \tag{69}$$

$$K = \frac{1}{kn(a)} \text{ constante de mudança de base;} \tag{70}$$

$$a = 10 \quad \Rightarrow \quad \int_1^a \frac{K}{x}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{ln(10)}; \tag{71}$$

$$log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}; \text{ fórmula de mudança de base;} \tag{72}$$

eu pude facilmente obter a famosa fórmula de *mudança de base dos logaritmos*, coisa complicadíssima com a sequência do ensino de logaritmos do Ensino Médio.

Como $f(x) = \frac{K}{x}$, quando K for um número positivo, tem as mesmas propriedades que $f(x) = \frac{1}{x}$, então a integral

$$\int_1^x \frac{K}{t}dt \tag{73}$$

define *um logaritmo* e você pode facilmente adaptar as constas anteriores para definir o logaritmo na base a de sua escolha, basta trocar 10 por $a \ldots$

O que caracteriza um tipo de logaritmo é a integral

$$\int_1^a \frac{K}{x}dx = 1 = log_a(a) = K\int_1^a \frac{1}{x}dx; \tag{74}$$

$$K = \frac{1}{ln(a)}; \text{ constante de mudança de base;} \tag{75}$$

$$log_a(x) = K\int_1^a \frac{1}{x}dx; \tag{76}$$

$$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}; \tag{77}$$

Na figura (fig 4), página 17, obtive, usando `gnuplot`, os gráficos de $y = ln(x)$ e $y = log_{10}(x)$. A constante $K = \frac{1}{ln(10)} < 1$ portanto $y = log_{10}(x) < ln(x)$ em módulo. O *ramo negativo* de $y = log_{10}(x)$ fica acima do *ramo negativo* de $y = ln(x)$.

Observe que a *família* de todos gráficos de funções logarítmicas passa no ponto $(1, 0)$ porque $log_a(1) = 0$ para qualquer base a. Na figura (fig 4), página 17 a constante K é positiva.

Na demonstração da propriedade fundamental dos logaritmos, fiz o uso de *somas de Riemann uniformes* por duas razões:

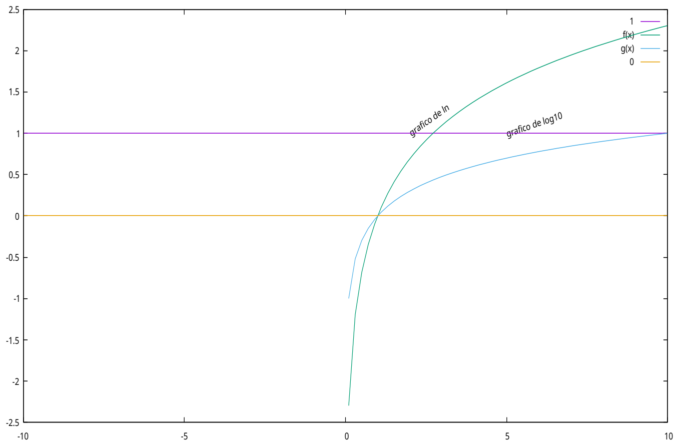

Figura 4: gráficos de ln e log_{10}

1. a primeira porque o integrando é uma função contínua então a somas de Riemann todas que satisfaçam à condição de que as partições dos intervalos tenham uma *medida máxima* que convirja para zero, são equivalentes no sentido de que definem *sucessões de Cauchy equivalentes* e portanto o mesmo número real. Então não há nenhuma perda de generalidade se eu usar apenas as *somas de Riemann uniformes*.

2. as contas com *somas de Riemann uniformes* ficam triviais, tente e verifique! Mesmo que você ainda não tenha estudado *integral*, apenas usando a ideia intuitiva que estou apresentando aqui, você vai verificar que vale a (eq. 51). Com uma madrugada de contas você chega lá e já fica sabendo *integral*, pelo menos o começo!

É relativamente fácil encontrar a *solução aproximada* para a equação

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \approx e \tag{78}$$

usando algum método para o cálculo aproximado da integral.

Observação 2 *Novamente, a integral*
Desenhe a função $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 e a, em que $a \geq 3$, por exemplo. Calcule esta integral, aproximadamente, usando retângulos cuja base seja $\Delta x = \frac{a-1}{n}$ para um número n grande, mas não muito para que você não perca o estímulo. Δx é a base dos retângulos, e como a base é a mesma, ao somar as áreas dos retângulos, usando a propriedade distributiva, agora dizendo, "colocando em evidência", o cálculo aproximado da área se reduz a soma das alturas com a multiplicação posterior por Δx. Você vai encontrar um número próximo de 1 porque $3 \approx e$. Usando $a = 2.7$ em vez de 3 o resultado será melhor porque 2.7 está mais próximo de e.
Você deverá usar somas de Riemann uniformes *porque simplifica os cálculos uma vez que você pode colocar o Δx em evidência, somar as alturas, e depois multiplicar por Δx. Infelizmente, nem sempre os professores e os livros de Cálculo põem em evidência o uso das* somas de Riemann uniformes *que permitem, com relativa facilidade e uso mínimo de recursos, o cálculo aproximado das integrais, como um método para tornar as integrais menos assustadoras.*

Como o integrando $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função indefinidamente derivável então $log(x)$ também o é, *porque* a relação

$$ln(t) = F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \int_1^t f(x) dx \tag{79}$$

define uma nova função usando o limite superior da integração como variável. F é a função área da função f. A função f é a *derivada* da nova função F e, geometricamente, fornece o coeficiente angular *instantâneo* da função F.

Acabei de descrever todo o curso de Cálculo Vol. I, portanto não se assuste, use tudo o que estou escrevendo como incentivo para estudar esta bela disciplina! E você estará começando pelo meio, depois recomece do começo e verá que tudo fica mais fácil. Eu dei aulas de Cálculo começando deste ponto, *usando o logaritmo como motivação* para depois retomar ao começo habitual quando as alunas já haviam entendido o que era a integral! É um exemplo de uso da *história* como motivação para o ensino!

Observação 3 *Anedótico*
Entre os alunos da disciplina, quando comecei Cálculo pelo logaritmo, havia um repetente que imediatamente se levantou reclamando, "professor, como é que vai começar pela integral sem passar pela derivada".
Os repetentes são uma peste, eles já sabem de tudo e o erro foi reprová-los. Eu sempre evitei reprovação! Claro, porque eu mesmo fui reprovado várias vezes!

Então a derivada de $log(x)$ é $\frac{1}{x}$, sempre positiva quando $x > 0$. Derivada positiva implica que $log(x)$ é uma função crescente, logo inversível e posso chamar a sua inversa de $\exp(x)$ e estou seguindo os passos de Euler. Com elas duas é possível obter as duas progressões, a aritmética e a geométrica, referidas acima com as associações:

$$1 \mapsto 0; e \mapsto 1; \tag{80}$$

e fácil encontrar a *solução aproximada* para a equação apenas a segunda ficando em aberto...mas nós sabemos onde está o número $\underline{e}$. Mesmo o *atalho moderno*, representado pela equação (eq.44), não torna muito mais fácil provar as duas identidades da equação (eq. 42)...

Por outro lado é a forma como se pode demonstrar facilmente as propriedades de diferenciabilidade e continuidade do *logaritmo natural* e consequentemente da sua função inversa $y = e^x$. Depois de estabelecida, facilmente se mostra que ela leva de volta à correspondência entre as progressões da tabela do *logaritmo natural*, ou ainda chamado *logaritmo neperiano*.

A notação varia um pouco, alguma vezes o *logaritmo natural* é designado por $ln(x)$, o padrão estabelecido da Matemática. Para algumas linguagens de programação $\log(x)$ quer dizer o *logaritmo neperiano*, é o caso da linguagem `Python` que segue o padrão da linguagem `C++` para as funções matemáticas.

Quando se tratar de outra *base* o hábito é indicá-lo:

- $\log_a(x)$ o logaritmo de x na base $\underline{a}$;
- $\log_{10}(x)$ o logaritmo decimal de x.

Grande parte das *linguagens de programação* "*entendem*" que $\log(x)$ é o logaritmo natural.

Estas contas ficam impossíveis a partir da construção dos logaritmos pela sincronização das progressões aritméticas e geométricas que é a fundamentação medieval dos logaritmos em uso no Ensino Médio e assim sofrem as professoras para se *desviar* de muitas perguntas que as alunas mais exigentes podem fazer! E é simples, que *desapareçam os logaritmos do programa do* ENEM!

A definição na equação (eq. 44) dá um exemplo da *ruptura cultural* entre a Matemática atual e aquela que se fazia no século 15. Esta equação aparece *abruptamente* dentro dos livros de Cálculo sem aparente ligação com os sistemas de progressões aritméticas e geométricas do século 15. Pior, nada tem o que ver a forma arcaica com que as professoras apresentam logaritmo no Ensino Médio em que se vêm forçadas a algumas ginásticas mentais para manter nesta etapa do ensino algo que simplesmente já deveria ter desaparecido uma vez que perdeu a sua razão de ser na forma como se tenta mostrar. Se apenas as alunas tivessem voz ativa e senso crítico, coisa que o *ensino* não objetiva estimular, a pergunta natural seria "*para que serve logaritmo?*" que deixaria as professoras entaladas com a perda de sentido calculatório do logaritmo. Ou talvez a resposta fosse: *porque eles aparecem obrigatoriamente nos exames oficiais do Ministério da Educação* ... numa demonstração de que os burocratas que dirigem o *ensino* precisavam mesmo desaparecer... afinal quem entende de *ensino* são as professoras.

Os logaritmos perderam o seu posto como "*máquina de calcular*" mas adquiriram uma posição muito mais proeminente, eles descrevem diversas relações importantes para as ciências naturais, na Biologia, na Física, na Química e até mesmo na Economia. Esta outra forma de usar os logaritmos é que justifica que apareçam nos livros de Cálculo usando a equação (eq. 44) como definição e representando um caminho rápido para estudar $\log, \exp$ como um par de funções inversas, seus gráficos e suas propriedades, e até mesmo as tabelas de logaritmo. Mais a outra forma de ver, a da *Idade Média*, é a que se encontra no *Ensino Médio*.

Já disse que não sou historiador *mas gosto de me intrometer na área* de uma forma peculiar, para levantar questões e problemas. Existem duas figuras ímpares que viveram no século 18, Abraham de Moivre (1667-1754) e Leonard Euler (1707-1783) e que descobriram uma fórmula fantástica

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta);\ \text{Euler} \tag{81}$$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\ \text{ de Moivre;} \tag{82}$$

Fiz uma busca e não consegui encontrar, o que não significa que não esteja documentado, como os dois chegaram a esta fórmula, *no singular*, porque são idênticas. A fórmula da Abraham de Moivre sugere que ele fez as contas das potências de

Uma questão de História da Matemática.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \tag{83}$$

e verificou que correspondiam à expressão no segundo membro. Considerando a extraordinária habilidade para fazer contas que os matemáticos desta época tinham, comparada com a deficiente capacidade que nós temos hoje, dado o apoio computacional, é muito provável que ele tenha tentado o caso $n = 2$, trivial, tenha experimentado $n = 3$, um pouco mais complicado, verificou que era verdadeira, e então deduzido a passagem

$$n = k \ \Rightarrow \ n = k + 1 \tag{84}$$

para concluir que era sempre verdadeira. Isto é *indução finita* que somente seria estruturada no século 19, com o matemático italiano Peano, que descreveu axiomaticamente os números naturais onde se encontra a base da *indução finita*, mas possivelmente já seria usada informalmente por de Moivre pelo tipo de Matemática que ele escreveu.

Talvez Euler tenha feito o mesmo e compactado na equação (eq.81) as contas trigonométricas.

Vou deixar de lado esta questão interessante de como de Moivre e Euler podem ter chegado a equação (eq.81) que simplesmente vou considerar equivalente a (eq.82). O que me interessa é que equação (eq.81) abriu o espaço para definir a exponencial para os números complexos

$$z = x + iy \ \Rightarrow \ e^z = e^x e^{iy}; \tag{85}$$

e considerar que Euler inventou a equação (eq.81) porque viu que pela trigonometria dava certo! Então a equação (eq.81) é uma invenção de Euler porque ele viu o comportamento de e^{iy} era o comportamento duma exponencial e se foi assim, foi brilhante. A equação (eq.81) é uma invenção.

Isto lembra-me, quando estudante de graduação, que entrei no gabinete dum famoso matemático brasileiro para lhe perguntar como é que podia se justificar a equação (eq.81). Eu apenas me lembro duma justificativa muito complicada que poderia ter se resumido na afirmativa, "é uma invenção de Euler que deu certo", e depois, uma rápida justificativa mostrando que as contas funcionam a partir das identidades trigonométricas. Poderia ter terminado dizendo-me que "é um belo exercício de *indução finita*". O "cara" falhou, e falhou porque sempre gostou de complicar as coisas para passar a impressão de que era um grande matemático.

A equação (eq.81) foi, certamente, uma invenção de Euler porque ele viu daria certo!

Com a equação (eq.81) fica definido e^z para qualquer número complexo z e então $w = e^z \Rightarrow z = \log(w)$ mas se trata duma função multivaluada porque a parte complexa é periódica então uma saída é considerar que log fique definido numa faixa do plano complexo $(-\infty, \infty) \times [-\pi, \pi) - \{(0, 0\}$ porque $e^z \neq 0$.

Euler é muito bajulado pelos matemáticos e alguns até o chamam de *pai de nós todos*, com certa razão porque ele produziu algo da ordem de mil e quinhentos textos, entre artigos e livros, mexendo com Combinatória, Álgebra e Análise. Mas ele viveu sob a proteção dos reis da época.

Abraham de Moivre era um *refugiado religioso francês*, um *refugiado político*, vivendo nas ruas de Londres e se mantendo com rendimentos de aulas particulares de Matemática e xadrez. Levava consigo pedaços do livro de Newton para ler nas horas de folga. Ele era visitante de alguns cafés em Londres cujas mesas ele usava para estudar ou dar aulas. E foi nestas condições que ele descobriu a sua fórmula além de escrever um livro sobre Probabilidade e Estatística.

Duas vidas, é papel dos historiadores destacar esta diferença.

Índice Remissivo

Referências

[Cou61] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Ed. por Blackie e Son Limited. Blackie e Son Limited - London, 1961.

[Pra07] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Ed. por Tarcisio Praciano-Pereira. Sobral Matematica, 2007.

[Pra09] T Praciano-Pereira. *Programas para Cálculo Numérico*. Rel. técn. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/, 2009.

[WKo10] Thomas Williams, Colin Kelley e many others. *gnuplot, software to make graphics*. Rel. técn. http://www.gnuplot.info, 2010.

[Lo11] David I. Bell Landon Curt Noll e other. *Calc - arbitrary precision calculator*. Rel. técn. http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[Fou] Wikimedia Foundation. "Wikipedia, enciclopédia livre na Internet". http://www.wikipedia.org.