

Geometria Analítica e Álgebra Linear
quarta versão, com programas em python3

Praciano-Pereira, Tarcisio ¹

19 de janeiro de 2024
monografias da Sobral Matemática
no. 2024.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

¹tarcisio@sobralmatematica.org

Esta monografia é um esboço dum livro com o mesmo título e eu a estarei publicando enquanto vou atualizá-la até que atinja o ponto de ser considerado um livro terminado. Três capítulos já prontos com exercícios incluídos.

palavras chave: As cônicas, o espaço, os números.

This is the draft of an Analytical Geometry and Linear Algebra undergraduate text book to be published, a partial draft to be updated. Two chapters already finished including exercises.

keywords: conic sections,numbers, the space.

Capítulo 1

Construindo os números

1.1 O plano do trabalho

Este artigo ainda está sendo redigido e quando atingir a sua versão final, esta observação irá desaparecer. E porque publicar uma versão em produção? Porque esta página é de préprints portanto contém trabalhos com os quais os autores almejam uma publicação futura e nos quais os autores se expõem na esperança de encontrar uma colaboração.

Uma outra razão desta observação inicial é de organização da página, estou neste momento apenas reservando um número de publicação, um aviso para os que visitarem a página que este artigo está sendo escrito. Quando pronto, este aviso desaparecerá.

This paper is still been prepared and when ready this information will be dropped. And why publishing a production version? This is a preprints page and this means the papers published here are expected to be published in a final form else were but in the mean time the authors are exposing a work in progress expecting to find a collaborator.

Another reason for this is organizational, the page is reserving a number of publication and in addition to that an announcement that the paper is in production but about to be finished. When the paper is finished, this note will be dropped.

Esta monografia tem a pretensão de se transformar num livro, pretensiosa! O primeiro capítulo, sobre os números que são os objetos básicos do Cálculo. Na verdade os objetos básicos do Cálculo são as funções porque o Cálculo tem duas ferramentas principais, a *derivada* e a *integral* que atuam sobre as funções e não sobre os números. E Cálculo é calcular *integrais e derivadas* de certos tipos de funções definidas num subconjunto dos números reais!

Mas o Cálculo também lida com uma ferramenta que é necessária às outras duas ferramentas a que me referi no parágrafo anterior, o *limite*. O *cálculo dos limites* é outro dos *terrores* que os estudantes de Cálculo enfrentam, na verdade um *terror produzido*, porque calcular limites, por um lado é difícil, e por outro lado esta dificuldade pode ser atenuada com algumas técnicas mais avançadas, então, *porque não avançar primeiro* para depois fazer os cálculos de *forma mais fácil*? Eu estou seguindo esta linha de trabalho. E aqui eu tenho um segredo neste processo, um *número real é um limite* e no nível do Cálculo, *limite é número real*. Inclusive as "*propriedades dos limites*" nada mais são do que as propriedades dos números reais obtidas pela via dum salto lógico sobre os números racionais que é a construção dos números reais, coisa que é omitida nos livros de Cálculo. Eu vou tratar deste *salto lógico* saindo de \mathbf{Q} para \mathbf{R} .

O projeto completo deve ser

- Construindo os números, já praticamente pronto.

- O plano e o espaço cartesiano, pronto!
- A reta no plano e o plano no espaço, pronto!
- O círculo e a elipse no plano, pronto!
- A parábola, em preparação.
- A hipérbole, em preparação.
- Exercícios de revisão com algum material já preparado.
- Programação, em `python3` imbutida no texto, falo no final desta introdução sobre isto.

Acho que ficou faltando exercícios e ainda vou fechar esta lacuna, quando a *monografia* virar *livro*! Mas está no ponto de fazer referência ao último capítulo que é um tanto diferente dos demais, é uma lista de exercícios. Em princípio os exercícios são aplicação direta dos cinco primeiros capítulos, mas há exceções. Se você achar que algum exercício é difícil, muito provavelmente ele estará *fora do contexto*. E eu tenho em mente um deles que seguramente está fora do contexto, mas vou deixar que você mesmo o descubra, até porque pode não estar fora do contexto para si! Este exercício a que me refiro é exatamente o nó que me faltava para me decidir por este livro de Cálculo, com ele eu estou renovando o ensino do Cálculo, ele diz respeito ao *cálculo da derivada do seno* que é uma dos entraves de goela do ensino do Cálculo e que eu descobri uma forma simples de fazer esta demonstração. Demorei dois ou três anos para descobrir e você pode ver que é uma bobagem ancorada na descoberta que Euler e De Moivre fizeram de forma independente no século 18. Eu não sei exatamente a história da *fórmula de De Moivre* que é a expressão complicada da *fórmula de Euler* e esta historia precisaria ser contada. Eu defino a fórmula de Euler como uma *invenção*, foi como Euler abriu o caminho para a construção da exponencial complexa, e ela vai abrir o caminho no terceiro volume do meu livro de Cálculo para uma simplificação imensa de muitos dos cálculos que apertam as estudantes. É isto que entendo que marca o meu livro e que me encorajou a escrever um novo livro sobre esta disciplina sobre a qual existem possivelmente milhares de livros escritos. Mas não é só a derivada do seno, o simples uso dos números complexos vai tornar muita coisa trivial e a *fórmula de De Moivre-Euler* cai dentro dos números complexos.

Eu não estou só neste método, sei que outros autores brasileiros já trilharam o caminho que estou trilhando e seguramente eu preferia que este livro fosse de vários autores, e com certeza seria melhor do que um livro dum único autor. Esta talvez seja a principal ideia sobre a publicação de uma monografia em que eu estou me expondo e expondo a ideia. Quiças me convidem para um trabalho comum!

Eu já troquei a posição deste parágrafo duas vezes, antes estive lá no começo, depois o passei para cá, a dúvida me levou a colocá-lo no começo e agora voltou aqui para o final. Acho que você vai me dar razão, ele deve ficar aqui no final. Este texto inicial é a *introdução* em que vou rapidamente conversar sobre o meu projeto e o projeto começa com o primeiro capítulo que pode ser o mais difícil como tem que ser complicada a primeira conversa. Eu tive a tentação de chamar o primeiro capítulo de *zero* conduzido por Roger Godement que foi o cara que marcou a minha vida como matemático, Eu nunca me encontrei pessoalmente com Godement e foi por acaso que tomei conhecimento do livro dele que havia sido recentemente publicado em 1963 quando eu me encontrava no primeiro ano de Matemática na UFC que então se chamava de *Universidade do Ceará* e adquiri *Cours D'algebre* em 1964. O livro começava pelo capítulo zero que foi uma grande maldade de Roger Godement porque dava a ideia de que se tratava do ponto inicial e eu devo ter gasto talvez tanto tempo para ler o capítulo zero como para ler o resto do livro. Eu queria lhe dizer que o primeiro capítulo, sobre os *números naturais*, certamente, é o mais difícil e que você deve considerá-lo como uma abertura de conversação, fazer uma leitura do mesmo, anotar alguns tópicos para pensar neles depois, mas sobretudo aceitar o que dizia Leopold Kronecker, que "*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*". E vou voltar a este frase outras vezes,

ela é muito importante para evitar que você perca seu tempo inutilmente. Tenho grande apreço por Roger Godement mas ele me atrapalhou um bocado.

Não permita que eu o *atrapalhe*, ponha em discussão o que você encontrar no que eu escrever e decida se deve *aceitar ou provar*, ou *deixar para provar em outro momento*. O conhecimento não é *linear*, o que para mim for evidente pode ser muito complicado para você e *vice-versa*. Eu insisto, não permita que eu o atrapalhe!

1.1.1 E programação?

Programação não é o meu objetivo neste livro, mas acho que vou poder *ajudá-la* a se iniciar em programação usando `python3`.

Na verdade eu vou usar e mostrar exemplos das linguagens de programação

- `python3`, vou lhe mostrar apenas exemplos.
- `gnuplot` um programa destinado a fazer gráficos, poderosíssimo e que tem uma linguagem de programação muito simples dentro do programa. Embora `gnuplot` não seja considerada uma linguagem de programação, eu o uso com frequência como linguagem de programação. Vale a pena dominar `gnuplot`, vou lhe mostrar apenas exemplos.

E como vou fazer isto? Vou incluir pequenos programas e ao mesmo mostrar-lhe como vai poder rodá-los usando `python3`. Para isto suponho que você tenha `python3` instalado no computador, e se você usar `Debian/gnu/linux` ou uma distribuição compatível com esta, aqui está a receita:

```
sudo apt install python3
```

e se você estiver usando uma distribuição do tipo `Debian` provavelmente o sistema lhe vai dizer “a versão mais recente de `python3` já está instalada.” Então basta digitar `python3` e sair rodando os exemplos que eu lhe vou oferecer.

Mas obtenha um livro on-line sobre `python3` para que você avance mais rápido, considere o meu auxílio apenas como motivação porque este livro não é um livro sobre programação. Programação aqui serão apenas pequenos exemplos e, entendo, motivação para que você aprenda a programar, como eu aprendi, como *auto-didata em programação*, quando tinha 40 anos e hoje sou um *programador*.

Vá fundo que você me passa, mas corra porque eu continuo correndo!

1.2 Uma tentativa histórica sobre os números

Os números são os objetos básicos da Matemática que popularmente é chamada de “*ciências dos números*” embora hoje ela seja muito mais do que isto, confira *álgebra, análise, geometria, estatística e lógica* que são as divisões clássicas da Matemática embora seja difícil classificar todos os tópicos da Matemática apenas entre estas divisões. Confira *divisões da Matemática* da *American Mathematical Society*.

Os números, em particular os *números naturais* cujo conjunto é designado pelo símbolo \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (1.1)$$

são a base de tudo em Matemática e em computação. Uma imagem, uma fotografia digital, é feita duma codificação construída com números. É uma codificação que um programa adequado pode ler e reproduzir a imagem.

Na figura (fig. 1.1), página 4, você pode ver o *código fonte* duma imagem em que aparecem números na *base hexadecimal* que é a codificação numérica usada hoje nos computadores em lugar da antiga *codificação binária*.

6. russo odin, dva, tre, tchitere, piati, sex, cem, vocem, deviati, deciasi.

Claro, os russos ainda usam um alfabeto diferente do nosso, o cirílico.

São nomes, aparentemente, *tomados ao acaso* mas que tem algumas semelhanças mesmo entre as línguas como o 6 que é praticamente o mesmo nas seis línguas listadas acima. O 1 é semelhante em quase todas elas assim como o 2, 3. Depois seguem-se 11, 12, . . . , 20 que novamente *tem aparência de terem sido inventados* como modificações dos dez primeiros. Certamente há justificativas históricas para que a Humanidade os tenham inventado com os nomes que eles tem.

Posso deixar para os historiadores, e talvez o que vou dizer já seja bem conhecido e discutido, o formato dos vinte primeiros números sugere que durante muito tempo, a Humanidade não precisou de contar além de 20, ou ainda que *20 deve ter sido durante muito tempo um número muito grande para as necessidades da Humanidade*. E somente quando esta necessidade se tornou significativa para ir além de 20 é que as distintas culturas da Humanidade corrigiram a lógica usada para os números 1, 2, . . . , 19 para adotar uma lógica regular para os números que vão de 20 em diante, que é o que posso ver nas seis línguas que usei para comparar.

A partir de 21, se segue em *todas as línguas acima* uma regra lógica bem estruturada. Se você aprender a contar até 20 em qualquer uma destas línguas, a continuação a partir de 21 é um processo lógico que é fácil de dominar. Uma pequena exceção é o francês

- que chama 70 de *soixante dix* que significa *sessenta dez*,
- depois chama 80 de *quatre vingt* que significa *quatro vinte*
- e finalmente chama 90 de *quatre vingt dix* que significa *quatro vinte dez*.

E tem lógica, apenas muito complicada! No *quebequois* este problema foi contornado!

Seria interessante acrescentar aqui, se alguém me ajudar eu anexo, os 20 primeiros números naturais em *tupi guarani, árabe, chinês, japonês* para reforçar possivelmente a teoria que estabeleci acima de que estes 10 primeiros números representam o esforço máximo para aprender a contar e partir de 21 ficam todos os números dentro numa lógica simples. Por exemplo, a linguagem mais complicada das que listei acima, *russo*,

- 21 é *odin na dvadeciati*
- 22 é *dva na dvadeciati*
- 23 é *tre na dvadeciati*
- 24 é *tchitere na dvadeciati*

portanto, como nas outras línguas, a repetição dos primeiros nove números com um nome que foi *inventado* para a *segunda dezena*, em russo *dvadeciati* que é bem mais lógico que o nosso *vinte*.

Deixando de lado o francês em que 75 é *soixante dix cinq*, e segue a lógica complicada do francês, todas as línguas tem uma lógica clara para a numeração a partir de 21.

E o processo continua para a terceira dezena, quarta dezena, . . . até 99.

Depois vem 100 em que se dá um novo salto com nomes diferentes nelas todas, mas semelhantes entre algumas.

1. português cem 100, 110 cento e dez
2. espanhol cien 100, 110 ciento y diez
3. inglês hundred, 100, 110 hundred ten

Para mim! Uma garota de anos, na Russia, já fala sem erros!

4. francês cent 100, 110 cent dix
5. sueco hundra 100, 110 hundra tio
6. russo sto, 100, 110 sto deciasi

Depois 1000 é outro salto cultural,

1. português mil 1000, 1010 mil e dez
2. espanhol mil 1000, 1010 mil y diez
3. inglês thousand 1000, 1010 thousand ten
4. francês mil 1000, 1010 mil dix
5. sueco tusen 1000, 1010 tusen tio
6. russo ticiatchia 1000, 1010 ticiatchia deciasi

Mas a partir de 1.000.000 *absolutamente todas as línguas usam exatamente a mesma palavra com pequenas variações próprias de suas respectivas culturas*. Mas não sei se isto é verdade em *tupi guarani, árabe, chinês, japonês* porque nada sei destas línguas. E “*chinês*”, “*japonês*” é uma forma simplificada de se referir às centenas de “*dialetos*” que o povo da China, do Japão e dos demais países asiáticos fala.

1.3 Os elementos do conjunto \mathbf{N}

Mas insistindo, e acompanhando Kronecker, se aprendermos, ou aceitarmos os números naturais, o resto a gente constrói “*facilmente*”, e dou razão a Kronecker e para mim o ponto de partida, sem discussão é \mathbf{N} apenas descrevendo, listando os seus elementos:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2)$$

Mas é difícil ser tão drástico e eu preciso fazer alguns *comentários* fazendo-lhe o convite: *salte os comentários se lhe parecerem desnecessários*, entenda que eles ficam aqui para quem os considerarem relevantes.

Vou incluir em \mathbf{N} também o zero. Aqui há uma divergência entre os matemáticos, uns dizem que $0 \notin \mathbf{N}$, e com certa razão, na ausência cabritos os pastores não devem ter se preocupado em fazer qualquer registro, portanto o zero não seria “*natural*”. Para mim o zero é um *número natural* e portanto eu digo que $0 \in \mathbf{N}$, e tenho uma forte razão, sem o zero o conjunto \mathbf{N} ficaria mais deficiente do que já é, com o zero, melhora um pouco. E depois, quem definiu \mathbf{N} com maior exatidão foi o matemático italiano, *Peano* que estabeleceu uma lista de 9 axiomas para estabelecer quais eram as regras do comportamento dos números naturais, e um dos *axiomas* estabelece que “ \mathbf{N} tem um primeiro elemento”. Interessante, os *axiomas de Peano* valem para qualquer número tomado como primeiro número, experimente, comece com 3 e os os *axiomas de Peano* valem *sem retoques* para

$$\mathbf{N} = \{3, 4, 5, 6, \dots\} \quad (1.3)$$

Eu prefiro começar do zero...

O zero é uma forte abstração, da mesma forma como o conjunto vazio. São dois conceitos matemáticos que é difícil de se produzirem com objetos da *Natureza*, mas a Matemática não pode viver sem eles, e nem a *Natureza*! São abstrações importantes.

Os números, em Matemática, se classificam entre as seguintes conjuntos:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \quad (1.4)$$

chamados, respectivamente,

1. *naturais*
2. *inteiros*,
3. *racionais*,
4. *reais*,
5. *complexos*.

Os números naturais são um objeto mais próprios da *lógica matemática*, os inteiros são mais próprios da *álgebra*. Os números racionais, reais e complexos são estudados mais intensamente no *Cálculo Diferencial e Integral* e na *análise matemática*.

Os números complexos criaram um ramo da análise matemática que é chamada de *análise complexa* e que está à base da *teoria das funções* e da *teoria das funções holomorfas* ou *teoria das funções analíticas*.

Confira também

- número algébrico, confira algébrico, número
- número complexo, confira complexo, número C
- número natural, confira natural, número N;
- número racional, confira racional, número Q;
- número real, confira real, número R;
- número transcendente, confira transcendente, número R

Você pode ver um pequeno vídeo sobre os números naturais que se encontra publicado numa página da Sobral Matemática, procure o link

www.sobralmatematica.org/aveiro/Numeros.mov

Lá você pode encontrar outros formatos, escolha algum que lhe seja possível ver em seu dispositivo.

Esta talvez seja a razão porque os matemáticos se dividem quando se discute se o *zero* é um número natural. Alguns preferem dizer que não. De fato o zero é uma *abstração*. Quem nada tivesse nada teria para contabilizar e portanto o *zero* é pouco natural. Eu prefiro incluir o zero como *número natural* e a minha justificativa é a lei do cancelamento

$$a + b = c + b \Rightarrow b = c - a + b \Rightarrow c - a = 0; \quad (1.5)$$

Os números naturais são *fracamente* definidos por nove axiomas de Peano. É comum apresentar os axiomas de Peano agrupados segundo uma certa aplicação.

1. **N não é vazio** O conjunto dos números naturais não é vazio e portanto contém pelo menos um elemento cujo símbolo é 0. Para Peano, este elemento seria 1 portanto eu estou *modificando* os axiomas de Peano. Este é um dos pontos críticos dos axiomas de Peano, nada impediria de considerar que o primeiro elemento de \mathbf{N} fosse o número inteiro -3 ou 3 e toda a axiomática de Peano funcionaria. Na verdade os axiomas de Peano são a formulação do *princípio da indução finita* e \mathbf{N} é um dos possíveis resultados da aplicação deste princípio. Este seria a ideia de *Leopold Kronecker*, aceitar os axiomas de Peano como a construção de \mathbf{N} , então os números naturais são uma aplicação do *princípio da indução finita* e assim nada há a ser demonstrado: *existe um conjunto chamado N!*

Fracamente, porque os axiomas de Peano também se aplicam ao conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Na verdade Peano definiu *indução finita*.

2. Da igualdade: Estes axiomas definem o conceito de *relação de equivalência*.

(a) reflexividade

$$(\forall x)(x \in \mathbf{N})x = x; \quad (1.6)$$

(b) transitividade

$$(\forall x, y, z)(x, y, z \in \mathbf{N})x = y \text{ e } y = z \text{ implica } x = z; \quad (1.7)$$

(c) simetria

$$(\forall x, y)(x, y \in \mathbf{N})x = y \text{ implica que } y = x; \quad (1.8)$$

3. Fechado para igualdade Se

$$a \in \mathbf{N} \text{ e } b = a \text{ então } b \in \mathbf{N}. \quad (1.9)$$

O uso deste axioma ocorre em situações como operações com frações, se o resultado final for, por exemplo, $\frac{3a}{a}$, com $a \neq 0$ então $\frac{3a}{a} \equiv 3$, e como $3 \in \mathbf{N}$ não há razão para considerar estes dois objetos como diferentes e ambos pertencem ao conjunto \mathbf{N} .

4. A operação sucessor Existe uma operação, s , chamada de *sucessor* com as seguintes propriedades:

- (a) $s(0) = 1; s(n) \in \mathbf{N}$ para todo $n \in \mathbf{N}$;
- (b) $s(s(0)) = 2; s^n(0) = n$;
- (c) Para qualquer $n \in \mathbf{N}; s(n) = 0$ é falso;
- (d) s é injetiva: $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$;

5. O princípio da indução finita

Considere K um subconjunto de \mathbf{N} que tenha as propriedades seguintes:

- (a) $0 \in K$;
- (b) $q \in K \Rightarrow s(q) \in K$

então $K = \mathbf{N}$.

Teorema 1 (infinitude dos números naturais) \mathbf{N} é infinito

Dem:

Hipótese: \mathbf{N} tem um maior elemento, a .

$$s(s(a)) < a; \quad (1.10)$$

$$s(s(a)) = s(a) + 1 = a + 1 + 1 = a + 2 < a \Rightarrow 2 < 0; \quad (1.11)$$

porque

$$s(a) = a + 1 \text{ e } s(s(a)) = s(a) + 1 = a + 1 + 1 = a + 2;$$

Contradição porque \mathbf{N} tem apenas números positivos com $2 < 0$ então \mathbf{N} não pode ter um maior elemento e é assim infinito.

q.e.d.

A construção feita por Peano é minuciosa, ele pensou em todos os detalhes, e inclusive, a construção de Peano foi em parte produzida independentemente por Frege sem que nenhum dos dois soubesse dos trabalhos do outro. Ainda assim é possível perceber que o conceito *conjunto infinito* se mantém vago uma vez que ele depende de uma *aplicação repetida, indefinidamente, de uma certa operação* e esta

Algumas linguagens de computação definem $x++ := x + 1$, o sucessor de x . Divirta-se, redefina (a),(b),(c),(d) como um exercício. Tao fez isto em suas notas de aula.

Não perca tempo pensando na relação de equivalência. Em algum momento ela vai se mostrar essencial.

“ação” não poderia ser nunca executada. Observações deste tipo conduziram aos trabalhos de um dos fundadores da computação, Turing, e seu célebre teste, a *máquina de Turing*.

A Matemática, resolve problemas práticos, mas ela está longe de ser uma teoria perfeita ou exata! Talvez isto seja o seu aspecto mais forte, as suas falhas, uma permanente fonte de inspiração das pesquisas.

Os números naturais têm uma deficiência operatória em relação às duas operações nele definidas, adição e multiplicação, o que levou sucessivamente à construção do conjunto dos números inteiros e depois dos números racionais.

Além da adição, o conjunto dos números naturais admitem a operação de multiplicação e as propriedades da multiplicação são as mesmas da adição eis porque eu vou agora resumir as propriedades da adição num formato que vou copiar depois para descrever as propriedades da multiplicação:

Definição 1 (propriedade da) adição em \mathbb{N}

1. Existe um elemento neutro para adição em \mathbb{N} que é o zero, tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.
2. a adição é associativa, $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer números $a, b, c \in \mathbb{N}$.
3. a adição é comutativa, $a + b = b + a$ para quaisquer dois números naturais.

Expressar as propriedades por meio de *axiomas* parece uma pouco difícil de se aceitar à primeira vista. O primeiro axioma $a + 0 = a$ parece tão óbvio que nem precisaria ser estabelecido. Mas é quando se resolvem equações que se observa a importância de estipular os *axiomas* como as regras para que álgebra funcione. Deixe-me resolver uma equação para lhe dar um exemplo.

$$x + 3 = 7; \tag{1.12}$$

$$(x + 3) - 3 = 7 - 3; \text{ aqui tem um erro!}; \tag{1.13}$$

$$x = 4; \text{ solução correta, obtida por meios ilegais!}; \tag{1.14}$$

Encontrei a solução correta da equação, *entretanto usei de meios ilegais*. O número $-3 \notin \mathbb{N}$ não poderia aparecer nestas contas porque ele não existe no conjunto \mathbb{N} . Este é um erro muito comum que vem em consequência dum atalho muito usado “quando um número passa para o outro lado, troca de sinal”. Em \mathbb{N} não existe troca de sinal.

A única forma de resolver esta equação em \mathbb{N} é por tentativas, ou então, inventar uma nova operação chamada *subtração* em \mathbb{N} . Mesmo assim a solução tem que ser feita por tentativas o que prova que a subtração é uma operação mal definida em \mathbb{N} . Ela não tem as *propriedades da adição*, não é *comutativa* e nem *associativa*.

A multiplicação é outra propriedade definida no conjunto \mathbb{N} :

Definição 2 (propriedade da) multiplicação em \mathbb{N}

1. Existe um elemento neutro para multiplicação em \mathbb{N} que é o 1, tal que $a * 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.
2. a multiplicação é associativa, $a * (b * c) = (a * b) * c$ para quaisquer números $a, b, c \in \mathbb{N}$.
3. a multiplicação é comutativa, $a * b = b * a$ para quaisquer dois números naturais.

Eu simplesmente copieei a definição da *adição* e troquei por *multiplicação* e depois troquei $+$ por $*$, e troquei o zero pelo 1. As propriedades são as mesmas, e isto denuncia que estou diante duma *estrutura algébrica* coisa que você pode entender como um modelo. Existem dois exemplos deste *modelo*:

$$(\mathbb{N}, +) \text{ e } (\mathbb{N}, *) \tag{1.15}$$

Vou convidá-la para um pequeno voo em abstração e dizer-lhe que sempre que tivermos um conjunto A com uma operação, de tal modo que $(A, *)$ tenha estas três propriedades, se diz que $(A, *)$ é um *monoide*. Então \mathbf{N} é um *monoide* aditivo e também é um *monoide* multiplicativo.

Monoide é uma *estrutura algébrica*. E estamos cheios de estruturas algébricas à nossa volta, por exemplo, o conjunto das horas do relógio é um *monoide aditivo* e não tem sentido dizer-se que seja um *monoide multiplicativo*. Chame

$$\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad (1.16)$$

É um exercício que lhe deixo verificar as propriedades da *adição das horas* no relógio, você deve concluir que

$$(\mathcal{H}, +); + \text{ é a adição das horas} \quad (1.17)$$

$(\mathcal{H}, +)$ é um *monoide*.

Tome um desafio, resolva a equação $x + 7 = 3$ na *estrutura de monoide* das horas do relógio! É possível resolver de forma muito parecida como se fosse o conjunto dos *números inteiros*. Divirta-se! Afinal, aprendemos também para nos divertir!

Exemplo 1 (Importância prática da abstração) *Abstração é uma questão prática*

Acredite, e veja um exemplo de como abstração é uma questão prática que pode lhe economizar bilhões de reais. Somente espero que você não pretenda usar a abstração de forma tão pragmática. . .

Certamente você sentiu que existe muita abstração na explanação caracterizando as propriedades das operações numa série de itens que se assemelham à burocracia judiciária. . .

Este é o método axiomático de descrever a ciência, ele tem alguns defeitos, mas tem suas vantagens. Compare as duas definições seguintes de uma função definidas na linguagem de programação python3.

```
def F(n, a, b): return a*pow(n, 2) / 2 + n*(2*b-a) / 2.0;
```

```
def F(n, a, b): return n*(a*(n-1) + 2*b) / 2.0;
```

*As duas definições são equivalentes no sentido de que produzem o mesmo resultado o cálculo duma função do segundo grau em que a, b são duas constantes conhecidas. Na segunda expressão eu usei a distributividade para reduzir duas operações. Na primeira expressão há 8 operações, na segunda há seis operações, e isto é importante, pense num programa em que F está sendo chamada um bilhão de vezes, duma para outra há uma economia de 2 bilhões de operações! Acho que somente este exemplo deve mostrar-lhe a importância da abstração que o método axiomático nos fornece. Este é um exemplo de uma atividade muito importante em computação, ou em qualquer atividade em que hajam algoritmos em uso, a otimização do algoritmo. *indexabstração!otimização**

Acho que este pequeno exemplo justifica e pode auxiliar à estudante a aceitar o método axiomático na apresentação da Matemática. Os axiomas são as regras operatórias que se encontram por baixo dos programas de computadores portanto são eminentemente práticos.

Os números naturais são o modelo para a indução finita que é um método muito prático para fazer demonstrações baseadas numa indexação sobre \mathbf{N} e os axiomas de Peano são, na prática o modelo de demonstração por *indução finita*.

Vou escrever na próxima seção sobre os números inteiros, o conjunto \mathbf{Z} e sucessivamente sobre os demais conjuntos.

1.4 Que tal um primeiro programa?

Abra `python3`, e depois do comando que wu lhe der “*Digite*”, digite, sem acrescentar nada antes daquilo que estou sugerindo. Isto é um *problema* do `python3`, ele considera tabulação como um marcador de blocos lógicos . . .

Em cada item abaixo, eu começo com “*Digite*”, seguido do comando do `python3`. Digite apenas o comando depois do sinal `>>>` que é o indicativo do `python3` que ele espera um comando. Em seguido eu faço comentários sobre o que tiver ocorrido.

1. Digite `teste = []`;

E você criou uma lista vazia, um exemplo do *vazio* e vou mostrar-lhe que programação aceita o *vazio*, portanto o *vazio* é concreto!

Digite `soma = 0`;

Você criou na memória do `python3` uma variável, `soma` e lhe atribuiu o valor 0. Porque eu vou calcular uma soma em cima dos elementos do *vazio*, e o resultado vai ser zero. Dei uma valor inicial a `soma`, zero, porque vou fazer uma soma então a primeira parcela tem que ser zero.

Digite `for k in teste: soma = soma +k`;

E `python3` responde com ...esperando o próximo item do bloco, dê `enter`, o que vai cortar a entrada de dados e irá aparecer o sinal `>>>` com que `python3` lhe diz que aguarda novo comando.

Digite `soma`;

`python3` responde:

0

Ele calculou a *soma sobre um conjunto vazio*, o resultado é zero que é o elemento neutro da adição. Mais importante, *vazio* é um conceito concreto!

Vou agora repetir o exemplo *com a multiplicação*, e o produto sobre um conjunto *vazio* é 1, é esta a razão pela qual $0! = 1$ é o produto sobre um conjunto *vazio* o que resulta no elemento neutro da multiplicação, 1.

Vamos começar!

Digite `teste = []`;

Você reiniciou a variável `teste` com uma lista vazia. Agora

Digite `produto=1`;

Você criou na memória do `python3` uma variável, `produto` e lhe atribuiu o valor 1, o *elemento neutro da multiplicação*. Agora

Digite `for k in teste: produto = produto*k`;

Digite `produto`;

E `python3` responde

1

Ele fez o produto sobre um conjunto *vazio*, o resultado é o elemento neutro do produto, 1.

Você pode calcular $4!$ ou de qualquer outro número, observe como:

- `python3`
- `teste=[1,2,3,4]`;
- `produto = 1`;
- `for k in teste: produto = produto*k`;
- `enter` para terminar o `for`
- `produto`;

E você vai ver o valor de $4!$, troque

`teste=[1,2,3,4]`;

por

```
teste=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];
```

Para obter 10!.

Eu lhe mostrei que *vazio* é concreto e que *computação* precisa do *vazio*.

Vou lhe dar outro exemplo bem prático e que certamente você vai precisar com frequência e serve para que você se acostume a usar `python3`. É um programinha para calcular médias e vou fazer a coisa de modo um pouco diferente. Crie um arquivo com o nome `Media.py`, abaixo você tem uma cópia do meu, observe a tabulação, este é o principal defeito do `python3`, ele identifica as módulos com tabulação.

```
def media(contador):
soma = 0; dado=0;divisor=contador;
print('valor para calcular a média');
dado = float(input(dado));
contador=contador-1;soma = soma + dado;
while(contador):
    print('valor para calcular a média);
    dado = float(input(dado));
    soma = soma + dado;
    contador=contador-1;
print('A média é ',soma/divisor);
print('forneça o número de parcelas')
contador=0;
contador=int(input(contador));
media(contador);
```

Grave respeitando a tabulação!

Explicando `Media.py`.

- `def` é a palavra-chave do `python3` para definir uma função. Que é *função*, em programação? é o menor módulo dum grande programa, quer dizer, “programas” são aglomerados de *funções* chamadas dentro de uma *lógica adequada*!
- Eu defini a função `media` atrelando a ela uma *variável local*, `contador` que somente é conhecida dentro da função. Se você digitar `contador` fora da função, `python3` vai lhe dizer que “esta coisa não existe! Claro, `python3` usa uma linguagem diferente, faça um teste para ver. .

A função `media` termina com o comando “`print (soma/divisor) ;`” e observe que ele ficou no mesmo *nível de tabulação* do `while ()`.

Antes do `while ()`

- o programa cria as variáveis locais do programa, `soma = 0; dado=0;divisor=contador;`
- Emite uma mensagem `print ('valor para calcular a média');`
- Faz a leitura do primeiro valor `dado = float(input(dado));`
- Diminua o contador `contador contador=contador-1;soma = soma + dado;`

- Começa o `while()` com o restante dos itens para calcular a média. Ao esgotar `contador`, sai do `while()` e emite a mensagem final A média é com o valor calculado da média.

Observe, é `Media` e não `Média`!

Depois da definição da função `Media`, seguem-se os comandos para usar a função formando um programa completo.

1. `print('forneça o número de parcelas')`
2. `contador=0;`
3. `contador=int(input(contador));`
4. `media(contador);`

Como usar este programa? Simplérrimo! Claro, *simples* se você estiver usando uma distribuição Linux, abra um terminal, no mesmo diretório em que estiver gravada `Media.py` e digite:

```
python3 Media.py
```

O programa vai lhe pedir o número de itens para calcular a média e em seguida vai lhe pedir cada um dos itens até esgotar a sua lista de números e ao final. Experimente!

1.5 os números inteiros

Os **números inteiros** formam um conjunto que tem como símbolo \mathbf{Z} e é formado por todos os números naturais mais os inversos aditivos dos números naturais, \mathbf{N} .

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \quad (1.18)$$

$$-\mathbf{N} = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \quad (1.19)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup -\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \cup \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \quad (1.20)$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \quad (1.21)$$

Este conjunto provavelmente foi inventado para completar o conjunto \mathbf{N} dos números naturais de tal modo que se pudesse fazer a *contabilidade* incluindo as *dívidas*. Durante muito tempo estes novos elementos, os negativos, foram considerados como números espúrios como aconteceu com as demais ampliações dos conjuntos numéricos para se obtivessem os números fracionários, os reais e os complexos.

Hoje se vê o conjunto \mathbf{Z} junto com a operação de adição como uma estrutura algébrica em que qualquer equação, *envolvendo apenas a adição*, pode ser resolvida. Algumas vezes esta estrutura é indicada com o símbolo $(\mathbf{Z}, +)$ e suas propriedades são

Definição 3 (propriedades dos) inteiros com a adição

1. elemento neutro a adição tem um elemento neutro, o zero, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbf{Z}$.
2. inverso aditivo todo número inteiro a tem um inverso aditivo indicado com o símbolo $-a$ tal que $a + -a = 0$.
3. associatividade da adição a adição é associativa, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. comutatividade da adição $a + b = b + a$.

Observe que eu escrevi $a + -a = 0$, propositalmente, para me permitir este comentário. O símbolo $-a$ é um *único símbolo* representando o inverso aditivo do número a . Mas, como acontece em Matemática com frequência, os símbolos adquirem vida própria e a gíria matemática admitiu que $a + -a = a - a$ e que $-(-a) = a$ completando as regras da álgebra de $(\mathbf{Z}, +)$.

Algumas pessoas se chocam ao passar pela primeira vez por esta definição porque, por um lado, parecem fatos tão evidentes que não precisavam ser destacados. A associatividade parece desnecessária, também. Eu vou dar um exemplo resolvendo uma equação para mostrar o uso destas propriedades.

Exemplo 2 (resolvendo) uma equação

$$7 + x = 2; \quad (1.22)$$

$$-7 + (7 + x) = -7 + 2; \quad (1.23)$$

$$(-7 + 7) + x = -7 + 2 = -5; \quad (1.24)$$

$$0 + x = -7 + 2 = -5; \quad (1.25)$$

$$x = -5; \quad (1.26)$$

1. Na equação (eq.23) eu somei aos dois membros da equação o número -7 porque ele é o inverso aditivo de 7 e assim eu vou eliminar o 7 do primeiro membro.
2. Na equação (eq.24) eu usei a propriedade associativa para fazer com que -7 operasse diretamente com 7 . Se a equação estivesse sido escrita assim

$$x + 7 = 2 \Rightarrow x + (7 - 7) = 2 - 7 = -5$$

eu teria usado a simplificação habitual pela qual

$$(7 + -7) = (7 - 7)$$

3. Na equação (eq.25) substitui $7 - 7$ por zero.
4. Na equação (eq.26) eu simplifiquei concluindo que $x = -5$.

Ninguém resolve esta equação usando esta sequência de passos porque alguns atalhos foram incluídos na álgebra aparecendo algumas expressões, por um lado interessantes porque trazem mais agilidade, mas por outro perigosas porque podem conduzir a erros como “quando o número passa para o outro lado troca o sinal” fazendo com que simplifiquemos a solução da equação resumindo-a sequência incompleta:

$$7 + x = 2; \quad (1.27)$$

$$x = -7 + 2 = -5 \text{ o sete foi “passado” para o outro lado ;} \quad (1.28)$$

Quando se trabalha com duas operações, adição e multiplicação, aparece um erro comum de *troca sinal* onde esta troca é ilegal. Então você pode usar os atalhos, e resolver a equação do exemplo pela forma resumida que aparece acima, mas é preciso ter clareza do que estiver fazendo. Os professores tem grande dificuldade em convencer a sua audiência de que a forma correta de resolver uma equação é aquela em que todas as propriedades são usadas.

Uma forma de contornar o problema talvez seja

$$7 + x = 2; \quad (1.29)$$

$$x = -7 + 2 = -5; \text{ porque } -7 \text{ é inverso aditivo de } 7; \quad (1.30)$$

$$x = -5; \text{ porque } -7 + 7 = 0 \text{ e } 0 + x = x; \quad (1.31)$$

incluindo observações que substituam as passagens que ficaram faltando. Este cuidado pode prevenir o erro que mencionei acima de inversão de sinal, na multiplicação, quando da *passagem para o outro lado*.

Compare a equação (eq.29), resolvida em \mathbf{Z} , com a mesma equação agora resolvida em \mathbf{N} , no conjunto dos números naturais.

$$7 + x = 2; \quad (1.32)$$

$$x = -7 + 2 = -5; \text{ ilegal, porque } -7 \notin \mathbf{N}; \quad (1.33)$$

$$x = -5; \text{ resultado impossível, porque } -5 \notin \mathbf{N}; \quad (1.34)$$

Em \mathbf{N} esta equação é impossível e foi esta a razão pela qual a Humanidade inventou \mathbf{Z} . O conjunto dos inteiros, com adição tem uma estrutura algébrica completa que recebe o nome de grupo. Se diz, *grupo aditivo dos inteiros*.

Obviamente que os *números negativos*, $-\mathbf{N}$, não foram inventados para resolver equações, muito provavelmente eles foram inventados pelos contadores para resolver questões de *caixa: deve e haver*. Eles precisavam de expandir os números, inventar os números negativos, para que pudessem *expressar as dívidas*.

Um pouco acima eu falei em trabalhar com duas operações em \mathbf{Z} , porque também existe uma outra operação, *a multiplicação*. E tem mais outras, *a divisão e a subtração*. No conjunto \mathbf{Z} se pode definir a multiplicação mas ela vai ficar tão deficiente quanto ela é no conjunto dos números naturais, \mathbf{N} .

Definição 4 (propriedades da) multiplicação em \mathbf{Z}

1. *existe um elemento neutro em \mathbf{Z} relativamente à multiplicação, 1.*
2. *a multiplicação é associativa, $a * (b * c) = (a * b) * c$.*
3. *a multiplicação é comutativa, $a * b = (b * a)$.*

Comparando com as propriedades da adição, falta *elemento inverso* relativamente à multiplicação. É o mesmo defeito que tem o conjunto \mathbf{N} relativamente às duas operações, adição e multiplicação. Falta o *elemento inverso* relativamente a estas duas operações.

Este defeito vai dar origem ao conjunto das frações, que é o conjunto \mathbf{Q} .

Falei que $(\mathbf{Z}, +)$ era o grupo aditivo dos números inteiros. Deixe-me dar-lhe exemplo de outro grupo que faz parte de sua vida diária, para que você entenda porque é interessante salientar que existe uma estrutura, a de *grupo*. O conjunto

$$\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad (1.35)$$

tem as mesmas propriedades que o grupo $(\mathbf{Z}, +)$ tem:

1. elemento neutro é a hora 12, que somada com qualquer outra reproduz a *outra*: $12 + 4 = 4$.
2. elemento inverso aditivo Toda hora tem o seu inverso aditivo, que é o complemento para chegar em 12: $4 + 8 = 12$ então $(4, 8)$ é um par de elementos inversos, como também o são

$$(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6)$$

E você vê um caso curioso, um elemento que é inverso aditivo de si próprio: 6.

3. propriedade associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. propriedade comutativa $a + b = b + a$.

Deixe-me resolver uma equação no conjunto das horas, e vai ficar claro o que eu já lhe falei antes: *vou precisar de usar as propriedades.*

$$x + 7 = 3; \tag{1.36}$$

$$(x + 7) + 5 = 3 + 5; \text{ porque o inverso aditivo de 7 é 5; } \tag{1.37}$$

$$x + (7 + 5) = 3 + 5; \text{ propriedade associativa; } \tag{1.38}$$

$$x + 12 = x = 3 + 5 = 8; 12 \text{ é o elemento neutro das horas; } \tag{1.39}$$

$$x = 8; \tag{1.40}$$

Não dá para resolver esta equação usando a regra “*passando para o outro lado se troca o sinal*” porque no conjunto das horas não tem troca de sinal.

O conjunto dos números inteiros é muito rico em propriedades. Primeiro tem duas operações, a adição, com a qual forma a *estrutura de grupo* e a multiplicação com a qual tem uma estrutura um pouco mais pobre que se chama de *monoide*, porque lhe falta o inverso multiplicativo.

Mas tem uma nova propriedade que é a *distributividade* da multiplicação relativamente à adição:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \tag{1.41}$$

Estou usando o “*asterisco*” como sinal de multiplicação, como se usa também nas máquinas de calcular ou em programas de computador.

Deixe-me fazer uma lista completa das propriedades de $(\mathbf{Z}, +, *)$

1. propriedades da adição $(\mathbf{Z}, +)$ é um grupo comutativo, aqui vai um pacote com 4 propriedades.
2. propriedades da multiplicação $(\mathbf{Z}, *)$ é um monoide comutativo, aqui vai um pacote com 3 propriedades.
3. A multiplicação é *distributiva* relativamente à adição: $a * (b + c) = a * b + a * c$.
4. O elemento neutro da adição anula, pela multiplicação, qualquer número inteiro: $0 * a = 0$ para qualquer que seja $a \in \mathbf{Z}$.

O $(\mathbf{Z}, +, *)$ é uma nova estrutura que recebe o nome de *anel*. Ao final vou dar mais alguns exemplos de estruturas para que não fique a ideia de somente existem estas que estão aparecendo junto com o conjunto dos inteiros.

As propriedades dos inteiros precisam ser demonstradas, mas para fazê-lo é preciso que se defina a adição e a multiplicação no conjunto \mathbf{Z} . Para fazerem-se demonstrações é preciso que se estabeleçam pontos de partida: definir quais são as *verdades básicas* a partir das quais os teoremas serão demonstrados. É uma frase atribuída a Leopold Kronecker: “*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*”. A construção dos números naturais é extremamente penosa e é mais prático dizer que eles são o princípio de tudo estabelecendo suas propriedades básicas que é um conjunto de axiomas comumente conhecidos como *axiomas de Peano*. Peano foi um matemático italiano que reuniu todas as afirmações que já tinham sido feitas sobre os números naturais num conjunto de axiomas. Confira os *axiomas de Peano*.

Considerando \mathbf{N} como ponto de partida, definido pelos *axiomas de Peano*, posso definir a adição em \mathbf{Z} . Para fazê-lo eu preciso de 4 sentenças definindo como somar dois números positivos, dois números negativos, um número positivo com outro negativo e como somar número negativo com outro positivo. Esta última sentença vai ser substituída pela afirmação de que a soma é comutativa.

Definição 5 (da adição) em \mathbf{Z} Sejam $x, y \in \mathbf{Z}$

1. se $x, y \geq 0$ então $x, y \in \mathbf{N}$ e $x + y$ é a soma definida em \mathbf{N} .
2. se $x, y \in -\mathbf{N}$ então $x + y = -(-x - y)$.
3. se $x \in \mathbf{N}$ e $y \in -\mathbf{N}$ então $-y \in \mathbf{N}$ e calculamos a diferença entre estes dois números naturais: $x - (-y) = d$. Observe que d é um número positivo, a diferença entre dois números naturais. E aqui tem dois casos a considerar:

$$\begin{cases} x \geq (-y) & \Rightarrow x + y = d; \\ x < (-y) & \Rightarrow x + y = -d; \end{cases}$$

Em geral esta sentença complicada é traduzida em linguagem mais simples, “se calcula a diferença entre os números *rebatidos* para \mathbf{N} e se dá a diferença o sinal do maior”. É o que está construído acima.

4. A soma é comutativa, o que resolve o caso em que $x \in -\mathbf{N}$ e $y \in \mathbf{N}$.

Quando eu estava para começar a definição da adição em \mathbf{Z} , eu me dei contas de que eu precisava de definir módulo foi quando eu usei a expressão “*rebatidos*”, que penso que é intuitiva porém não foi definida. Eu preciso de definir a função módulo que é quem rebate um número inteiro negativo para o conjunto \mathbf{N} . Eu poderia simplesmente redigir novamente esta texto colocando a definição do módulo antes da definição de adição. Mas preferi deixar este defeito e fazer uma crítica do mesmo para que você perceba como é difícil construir uma teoria. E se você encontrar outros furos lógicos neste texto eu agradeceria a bondade de me avisar. Dizem que quando Gauss morreu encontraram entre seus papéis dezenas de artigos praticamente prontos que ele não publicou porque ele era extremamente crítico e somente publicava aquilo que *considerava impecável*. A ciência é que se atrasou porque ele tinha muita coisa impecável que não publicou. Já Euler, primeiro publicava, e se houvesse erro, corrigia, e ganhamos muito com a corrente de Matemática que verteu dos dedos de Euler. Eu não pretendo me comparar com nenhum destes dois gigantes, apenas eu prefiro seguir as pegadas de Euler, escrever, publicar e deixar que outros mostrem que eu errei!

Então, definindo o módulo,

Definição 6 (do módulo) dum número inteiro

$$\begin{cases} x \in \mathbf{N} & \Rightarrow |x| = x; \\ x \in -\mathbf{N} & \Rightarrow |x| = -x; \end{cases}$$

Porque eu falei em *grupo* e *monoide* eu pude simplificar muito a descrição do conjunto dos inteiros com suas propriedades.

Tanto com os inteiros, como com os naturais, podemos fazer duas outras operações: dividir e subtrair. A subtração não tem tanto interesse com inteiros porque a adição fornece tudo que a subtração oferece e com boas propriedades. Por exemplo: $a - b \neq b - a$, a subtração não é comutativa. Não precisamos da subtração, mas na prática ela é útil.

A divisão também é defeituosa, mas muito útil e desde o gregos ela foi estudada e usada. E ela segue sendo importante, mesmo sendo defeituosa. Se você estiver perto dum computador no qual esteja instalado `Linux` como é habitual nas escolas públicas do Ceará, você pode fazer um teste interessante. É quase certo que no computador esteja instalada a linguagem de programa `Python`, abra um terminal e nele digite:

```
python
```

e você vai ver algo do tipo

```
Python 2.7.15rc1 (default, Nov 12 2018, 14:31:15)
[GCC 7.3.0] on linux2
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
```

se o Python estiver instalado como provavelmente está nas escolas públicas do Ceará.

Não se assuste com o inglês, e se acostume a ler inglês e aos poucos vai ver que não é difícil. Há relativamente poucas palavras em inglês muito diferentes das nossas palavras portuguesas. E vale a pena dominar a língua inglesa. Não porque os americanos sejam melhores do que nós, mas que porque são mais ricos, porque exploram o mundo todo, e assim tem mais coisas que nós, e nós temos o direito de usá-las.

Mas agora faça a experiência, no Python:

```
>>> 5/3
1
>>>
```

e o Python lhe disse que o resultado desta operação é 1. Não foi um erro, é que Python faz divisão inteira, como fizeram os gregos criando o *algoritmo de Euclides*:

$$D = q * d + r; D \text{ dividendo}, q \text{ quociente}, r \text{ resto}; \quad (1.42)$$

$$0 \leq r < q; D = q * d + r; \quad (1.43)$$

$$5 = q * 3 + r; \quad (1.44)$$

$$5 = 1 * 3 + 2; \quad (1.45)$$

Na divisão Python dá como resposta o *quociente* da divisão do *dividendo* pelo *quociente*. Se você quiser que Python se comporte como uma calculadora você tem que transformar pelo menos um dos números em decimal:

```
>>> 5.0/3
1.6666666666666667
>>>
```

O meu objetivo não é trabalhar com Python. Eu usei esta linguagem de programação apenas para motivar uma discussão sobre o *algoritmo de Euclides para divisão*.

O algoritmo de Euclides para divisão é ensinado nas escolas, confira a figura (fig ??), página ??, e satisfaz à equação (eq.42) e cujo resultado correspondente à figura (fig ??) que apresentei na equação (eq.44).

Para calcular *quociente e resto* fazemos *tentativas*, experimentamos um número inicial para ser o *quociente* que multiplicamos pelo *divisor*. Se o resultado passar do *dividendo* tiramos uma unidade do *quociente* e repetimos o processo até que a multiplicação produza um número inferior ao *dividendo*. Subtraímos o produto do *dividendo* e este resultado é o resto da divisão. É a equação (eq.42) que define todo este processo com uma única regra: *resto* é um número positivo, ou nulo, que deve ser menor do que o *quociente*.

Quando o resto for zero se diz que o *dividendo* é divisível pelo *divisor*, ou que *dividendo* é um múltiplo do divisor. A divisão é rica de conceitos, deixe-me listar alguns:

1. múltiplo, se diz dum número que deixa resto zero na divisão por outro. Por exemplo 8 é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de cinco.
2. número inteiro positivo primo é um número que que não pode ser decomposto em fatores. Por exemplo $6 = 2 * 3$ portanto 6 não é primo. Os primeiros números primos são

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 21, 23, 29, 31, 37 ...

e é um teorema da aritmética que o conjunto dos números primos é infinito. Se prova este teorema por absurdo, supondo que exista um último número primo. Seja N este último número primo, então qualquer número natural $p > N$ tem fatores que se encontram no conjunto finito dos números primos $2, 3, 5, \dots, N$.

Preciso demonstrar que é falsa a sentença “O conjunto dos números naturais a partir de $p = N + 1$, isto é, $N + 1$ e seus sucessores todos tem fatores tirados do conjunto finito dos números primos”.

Para isto eu preciso formatar o conjunto finito dos números primos. Seja então

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots, N\} \text{ o conjunto dos números primos;} \quad (1.46)$$

$$\mathcal{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k = N\}; \quad (1.47)$$

quer dizer que o conjunto finito dos números primos tem k elementos e eles estão todos identificados como elementos da sequência que aparece na equação (eq.47).

Deixe-me definir R como o produto dos números primos mais uma unidade

$$R = + \prod_{j=1}^k p_j; \quad (1.48)$$

A divisão de P por qualquer dos números primos do conjunto finito de números primos \mathcal{P} deixa resto 1 e portanto

- (a) P é um novo número primo, ou
- (b) o conjunto finito dos números primos \mathcal{P} está incompleto e tem pelo menos um outro número primo que é fator de R

contradizendo assim que exista um conjunto finito de números primos.

Entenda melhor esta demonstração, considere os números primos obtidos pelo crivo de Eratóstenes rolado até 89 então

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89\} \quad (1.49)$$

então o produto destes números primos é

$$P = 34117814408143994555770301050771349071$$

e o número primo 32983 é um fator de P .

$$34117814408143994555770301050771349071 = \quad (1.50)$$

$$= 32983 * 75209 * 461093 * 29828588600288736211501; \quad (1.51)$$

Eu obtive a fatoração de P usando o programa `factor` que é distribuído com Debian/Gnu/Linux.

Então existe pelo menos um número primos, 32983, que não estava listado naquele crivo de Eratóstenes.

Este é o teorema fundamental da Aritmética que reza que o conjunto dos números primos é infinito, e sua demonstração de faz por absurdo. Se supõe que exista uma quantidade finita de números primos, e assim se cria um crivo de Eratóstenes descrevendo todos os números primos, o conjunto $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\infty, \dots, \mathcal{P}_\parallel\}$. O produto dos elementos de \mathcal{P} mais um é o número R que vai deixar resto 1 com todos os números primos daquele crivo de Eratóstenes que assim não contém todos os números primos. O teorema fundamental da Aritmética alimenta uma atividade muito intensa de pesquisa em Matemática

que hoje vive em torno do resultado do matemático chinês *Yitang Zhang* que conseguiu construir *progressão aritmética* onde estão localizados todos os números primos entre os seus termos determinando assim um salto máximo existente entre dois números primos.

O resultado de *Yitang Zhang* foi logo melhorado, usando-se para isto os seus próprios métodos, e determinando um salto entre dois números primos menor do que ele havia obtido.

Aqui está um *crivo de Eratóstenes* que obtive rodando programa escrito em `python` dentro do qual eu usei o programa `factor` distribuído com Debian/Gnu/Linux

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227,
229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389,
397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,
479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571,
577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653,
659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,
757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853,
857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947,
953, 967, 971, 977, 983, 991, 997
```

Este é um resultado de Inteligência Humana, um programa escrito por mim, usando uma linguagem de programação construída por seres humanos, `python`, inicialmente construída por *Guido Rossi* com apoio de uma multidão de programadores que formam a *comunidade python* e fiz uso dum programa cujo autor desconheço, `factor` que vem junto com a minha distribuição Debian/gnu/linux.

1.6 os números racionais

Os **números racionais** são as frações e a referência a um número que significa uma parte dum inteiro, algumas vezes designada como *fração própria* em oposição às *frações impróprias* que são frações tão boas como as próprias apenas chamadas assim porque representam números racionais que não são inteiros mas que são, em módulo, maior do que 1. É um exemplo de defeito do linguajar matemático oriundo dum época em que as frações não eram consideradas números em todo o seu direito.

Uma fração é um objeto da forma $\frac{p}{q}$ em que $p, q \in \mathbf{Z}; q \neq 0$ e que representa um número racional.

A história é uma arte muito difícil e um exemplo disto é o *triângulo de Pascal*, denominado em homenagem a Blaise Pascal que viveu no século 16, mas, aparentemente, os matemáticos chineses já o conheciam pelo menos desde o século 12 de quando se sabe dum livro de Matemática chinesa fazendo referência ao mesmo duzentos anos antes de Pascal. Também parece que a geometria, dita dos gregos, era conhecida por outros povos anteriores aos helenos que, apenas teriam compilado de forma organizada aquilo que chegou até nós como *geometria euclidiana*.

Isto para afirmar, sem me sentir obrigado a grandes justificativas que, num certo momento da história humana, provavelmente na Idade Média, se começou a conceber que objetos como $\frac{1}{3}$ *seriam números*. O uso do condicional tem sentido porque até recentemente as escolas ensinavam que $\frac{1}{3}$ seria uma *fração imprópria* sugerindo que não seria bem uma fração! Os números negativos ainda hoje são tratados *negativamente* e os números complexos nem sempre fazem parte do currículo do Ensino Médio ... para não mencionar os *quatérnions* que, possivelmente, há gente que nem sabe que existem.

Então fazendo uma história romaneada, deixe-me dizer que inventamos os objetos do tipo $\frac{1}{n}$ quando $n \in \mathbf{N}; n \neq 0$ para representar os inversos multiplicativos dos número naturais, com exceção do zero, e aos poucos construímos uma aritmética com estes novos objetos com as seguintes regras:

Tem preconceito
nas ciências!

Um erro!
Corrigido!

1. O símbolo $\frac{p}{q}$ representa um número sempre que $q \neq 0$ em que os membros $p, q \in \mathbf{Z}$. Há o hábito de designar p como *numerador* e q como *denominador*. A razão destes nomes vem da ideia intuitiva da invenção das frações em que $\frac{2}{3}$ significaria a quantidade 2 de uma coisa chamada “terço” donde o 2 é o “numerador” enquanto que 3 dá o nome, “denominador”.
2. O inverso aditivo do número $\frac{p}{q}$ é o número $\frac{-p}{q}$ que também pôde ser escrito como $-\frac{p}{q}$ e então o sinal $-$ é um modificador de tal modo que $a + (-a) = 0$.
3. Vale regra $-(-a) = a$;
4. O zero Sempre que $q \neq 0$, $\frac{0}{q} = 0 \in \mathbf{N}$ e aqui guarde como observação para uso posterior, então existe uma quantidade imensa de representantes do zero e isto é um problema que preciso resolver!
5. Sempre se pode reduzir uma fração à sua expressão mais simples eliminando fatores comuns ao *numerador* e ao *denominador*. Assim

$$\frac{8}{80} = \frac{2^3}{2^4 5} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10} \quad (1.52)$$

ou seja, se fatora numerador e denominador e assim se eliminam os fatores comuns para obter a forma irredutível duma fração. Esta operação cria um problema de que vou tratar ao final criticando todo o processo. Agora se tem pelos menos dois objetos representando a mesma coisa, a fração simplificada e anterior que pode ser simplificada:

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

6. Esta regra de simplificação pode ser usada ao reverso para permitir a definição da soma de frações. Para somar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

se acrescentam fatores comuns até obter denominadores iguais:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q}{qp} + \frac{p}{pq} \quad (1.53)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q}{pq} + \frac{p}{pq} = \frac{1}{pq}(q + p) \quad (1.54)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q+p}{pq} \quad (1.55)$$

porque temos q objetos do tipo $\frac{1}{pq}$ e p objetos do tipo $\frac{1}{pq}$. Estou usando, a comutatividade da multiplicação de números naturais, na lista de operações acima junto à regra que me permite eliminar ou incluir fatores comuns e finalmente, silenciosamente, estou usando *distributividade* da multiplicação em relação a adição que vou incluir como a próxima regra.

7. Vale a distributividade da multiplicação relativamente à soma.
8. Posso agora deduzir da regra anterior uma regra geral para soma de frações

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm}{nq} + \frac{np}{nq} \quad (1.56)$$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm+np}{nq} \quad (1.57)$$

sendo a regra:

- multiplicam-se os denominadores para formar o novo denominador;

- multiplicam-se em cruz, numeradores e denominadores e se os somam para formar o novo numerador.
- o resultado nem sempre será uma fração na forma mais simples, e este um problema de que tenho que tratar em seguida, mas mencionei antes *como simplificar uma fração eliminando os fatores comuns* ao numerador e ao denominador.

A figura (1.3), página 22, apresenta um algoritmo gráfico para ilustrar a regra de soma de frações.

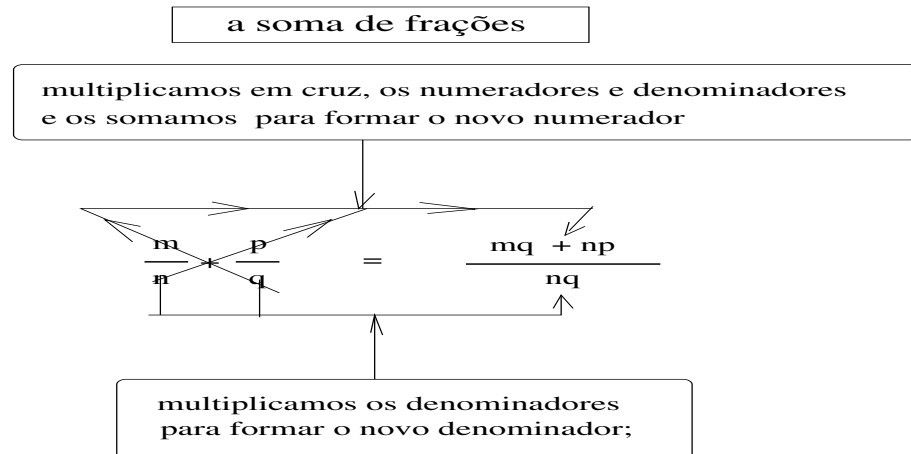


Figura 1.3: gráfico mostrando a soma de frações

O principal objetivo era conseguir que toda fração tivesse um inverso multiplicativo:

$$n \neq 0 \text{ e } m \neq 0 \implies \frac{n}{m} \frac{m}{n} = \frac{mn}{mn} = 1 \quad (1.58)$$

não sendo necessário indicar que $m \neq 0$ porque já excluí a possibilidade de haver frações com denominador nulo.

O conjunto das frações é o conjunto dos números racionais e é designado com o símbolo \mathbf{Q} .

Resumindo, valem para este novo conjunto de objetos, \mathbf{Q} , todas as propriedades

1. A-1 No conjunto \mathbf{Q} existe um elemento neutro relativamente à **adição**.
2. A-2 Existe um inverso para todo número racional, relativamente à **adição** (inverso aditivo).
3. A-3 A *adição* é comutativa.
4. A-4 A *adição* é associativa.
5. M-1 Existe um elemento neutro relativamente à **multiplicação**.
6. M-2 Para todo número racional diferente de zero existe um inverso multiplicativo.
7. M-3 A *multiplicação* é comutativa.
8. M-4 A *multiplicação* é associativa.
9. AM-10 elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número natural resulta em zero.

10. AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

Agrupe as propriedades em três classes, da adição (A), da multiplicação (M), e relativas à adição e multiplicação (AM). Observe que as propriedades da adição são as mesmas que da multiplicação com um pequeno detalhe sobre a exceção do zero na multiplicação. Estas quatro propriedades são as que definem a *estrutura de grupo*. Tem-se aqui um *grupo aditivo*, um *grupo multiplicativo* e as duas propriedades que estabelecem relação entre estes dois grupos. São estas propriedades que fazem de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ um *corpo comutativo*, porque a multiplicação é comutativa.

Relação de equivalência

As *relações de equivalência* resolvem problemas formais de unicidade e outros problemas de identificação como é o caso de polígonos semelhantes que a geometria precisa de identificar. São objetos diferentes mas eles precisam ser “equivalentes”. A relação de equivalência é uma generalização da igualdade.

No caso das frações há uma infinidade de frações que representam o mesmo número, $\frac{n}{m} \equiv \frac{p}{q}$; $n \neq p$, por exemplo. Isto cria problemas para a Álgebra que precisa que o inverso dum número seja único, então como no caso dos triângulos semelhantes, é preciso identificar as frações que representem o mesmo número colocando-as todas numa mesma *classe de equivalência*. Mas duas frações iguais forma o que chamamos de *proporção* então o *produto dos meios é igual ao produto dos extremos* e assim se chega à regra de equivalência de frações:

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{p}{q} \iff nq = mp \quad (1.59)$$

é interessante observar que todas as frações equivalentes ficam sobre uma mesma reta determinada pela representação mais simples, pela fração irredutível, a figura (1.4) página 23, mostra as classes de equi-

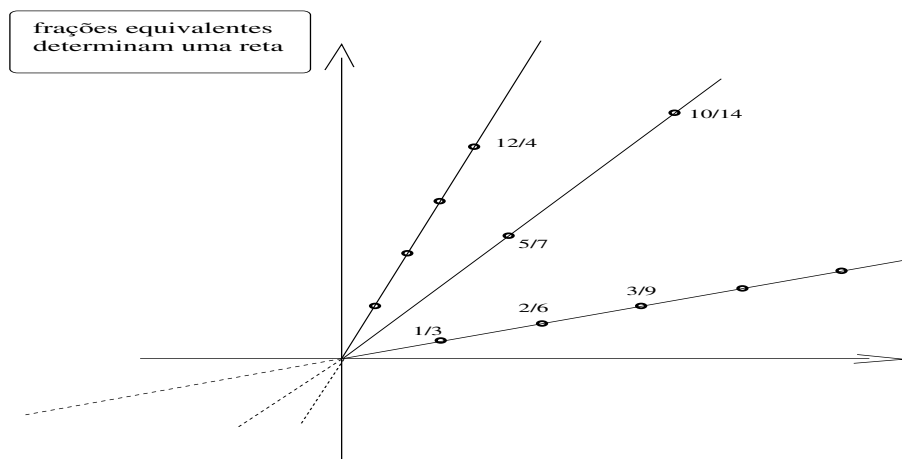


Figura 1.4: retas do *plano de Gauss* são classes de equivalência de frações

valência das frações como pontos das retas contidas no *plano de Gauss*, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Representação geométrica de \mathbb{Q}

Os números racionais tem uma propriedade de “densidade” que os inteiros não têm:

1. dados dois números racionais sempre tem outro número racional *entre* eles.
2. dados dois números racionais, sempre tem outro à esquerda;
3. dados dois números racionais, sempre tem outro à direita;

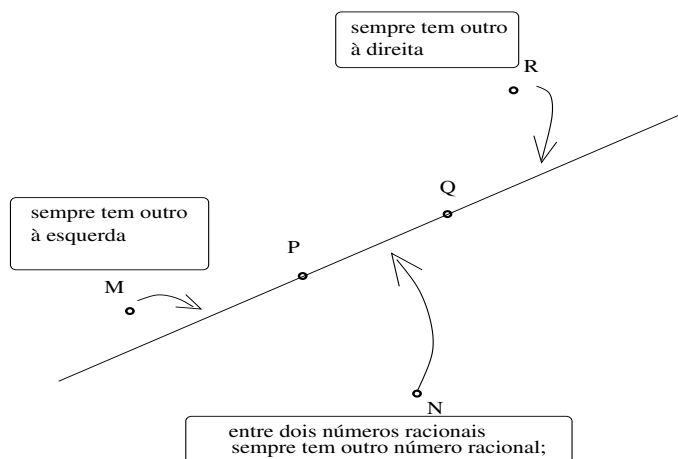


Figura 1.5: entre dois pontos, na reta ...

A figura (1.5), página 24, compara com o que acontece na reta a propriedade de densidade dos números racionais. Esta comparação sugere fazer uma interpretação geométrica dos números racionais.

1. Seleciona-se um ponto na reta para a dividir em duas semirretas: a *semirreta positiva* e a *semirreta negativa*. É o representante do zero.
2. Depois, com um compasso selecionam-se os inteiros à distâncias iguais, os inteiros positivos na semirreta positiva, e os inteiros negativos na semirreta negativa.
3. O espaço que sobra é para as frações que não são inteiros.
4. Depois você irá ver que que na reta ainda tem números que não são racionais, os números irracionais, que também encontram lugar na reta.

Então existe uma multitude de exemplares de retas representando \mathbb{Q} e simplesmente vou dizer que todas estas retas são equivalentes como representação de \mathbb{Q} , e isto vai me permitir a *definição geométrica* das operações aritméticas de \mathbb{Q} . Por exemplo, a figura (1.6) página 25, ilustra o produto 1.5×2 usando semelhança de triângulos. Escolhi duas retas para representar \mathbb{Q} e encontrei o resultado da multiplicação em uma das retas. Observe que precisei da relação de equivalência entre as retas numéricas para construir a multiplicação geométrica.

1.7 os números reais

Um **número real** é uma **dízima** que pode ser *periódica*, e então é um *número racional*, ou *não ser periódica*, e então é *número irracional*.

Há um pequeno erro na afirmação anterior que somente vou poder elucidar ao final deste texto, entretanto não custa nada alertá-la, dizendo-lhe qual é o erro mas pedindo que conviva com ele até que seja possível mostrar os detalhes. As *dízimas* são representantes das classes em que os números reais estão divididos. Como no caso dos números racionais, $\frac{1}{3}$ é o *melhor* representante da classe das frações que lhe são equivalentes, porque é uma *fração irredutível*. O mesmo eu vou poder dizer das *dízimas*, e o erro da frase inicial seria equivalente à afirmação “um número racional é uma fração irredutível”.

Deixe-me dar lhe os dois exemplos:

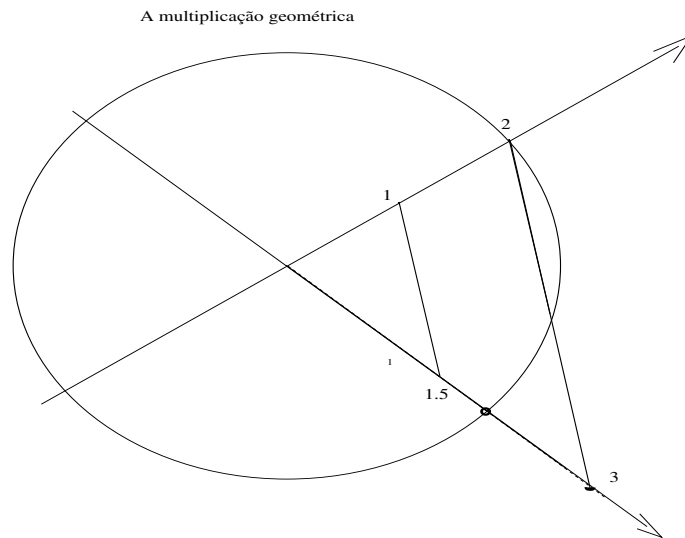


Figura 1.6: A multiplicação geométrica

1. $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots = 0.(3)$ é uma dízima periódica, com período (3) e você tem no começo a geratriz desta dízima, um número racional,
2. 3.14159265358979323848... que é a *constante de Arquimedes* que eu obtive usando `calc` com 20 casas decimais, é uma aproximação do número irracional π . Não é uma dízima periódica, os dígitos vão se suceder de uma forma “arbitrária” de tal modo que é impossível criar um algoritmo que mostre o termo de ordem n para qualquer valor de n . Não há nenhum padrão repetido. Existem fórmulas que geram os dígitos de π com alguma precisão, mas o valor é sempre *aproximado*.

Há três formas clássicas de construir o conjunto dos números reais partindo dos números racionais como *material primário*, no sentido de que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, o conjunto dos números racionais é um subconjunto do conjunto dos números reais

1. os cortes de Dedekind,
2. os intervalos encaixados, que é bem parecido com os *cortes*, e possivelmente também se deve a Dedekind,
3. as *sucessões de Cauchy*, que é o meu método preferido porque é baseado na estrutura algébrica que surge de forma natural da estrutura algébrica do conjunto dos números racionais. Nos outros casos é preciso construir a estrutura algébrica em cima dum *conjunto novo* e eu entendo que isto é muito mais difícil de fazer do que o surgimento dum *conjunto novo* oriundo das sucessões de números racionais que já tem uma estrutura algébrica bem justificada, e vou mostrar aqui *como se faz* usando este terceiro método.

Partindo do conjunto \mathbf{Q} , como *material primário*, é simples mostrar que existe um novo conjunto \mathbf{R} ; $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, usando uma *intuição geométrica*. Confira os detalhes em *números racionais* mas vou, rapidamente, repetir os passos essenciais aqui. Deixe-me dar um nome ao *conjunto das sucessões de números racionais* uma vez que vou estar sempre me referindo a este conjunto que será o meu material de trabalho. Seja S o *conjunto das sucessões de números racionais*.

O conjunto \mathbf{Q} dos números racionais tem as mesmas propriedades da reta na geometria euclidiana:

1. Entre dois “pontos” $x, y \in \mathbf{Q}$ sempre tem um ponto no *meio*, embora este conceito, “*meio*”, esteja indefinido na geometria euclidiana, ele é considerado um *axioma* o que dispensa uma definição. Em \mathbf{Q} este conceito pode ser melhor apresentado, dizendo-se que dados $x, y \in \mathbf{Q}$ qualquer *média* entre eles se encontra no segmento que eles determinam. Aqui, “*entre eles*” pressupõe a existência duma *relação de ordem* inexistente na reta da geometria euclidiana, mas existente em \mathbf{Q} . E a relação de ordem de \mathbf{Q} é facilmente transferida para o conjunto das sucessões de números racionais, S . Fiz referência a “qualquer média” porque há distintos tipos de média, *aritméticas, geométricas* . . .
2. Dados dois “pontos” $x, y \in \mathbf{Q}$ sempre tem um ponto fora do segmento determinado por estes dois pontos, a geometria euclidiana se refere ao segmento de reta determinado por dois pontos. Em que \mathbf{Q} esta regra é mais forte. Posso escolher “ $x \leq y$ ” e afirmar que existe um ponto $t < x$ e um ponto $w > y$,

$$t \leq x < y \leq w; \quad (1.60)$$

3. Ambas as propriedades podem iteradas garantindo que \mathbf{Q} é infinito entre dois dos seus elementos como fora do segmento que os dois elementos determinam. Esta é uma forma livre de fazer referência à *propriedade arquimediana* que qualquer reta possui, assim como \mathbf{Q} .

Estas propriedades permitem que se faça uma *identificação* entre \mathbf{Q} e um *subconjunto de qualquer reta* criando-se o conceito de *reta numérica*.

Acho que está passando do *momento* de dar um nome a este novo conjunto, o *conjunto dos números reais*: \mathbf{R} . Qualquer *reta numérica* é um representante de \mathbf{R} e de agora em diante eu vou usar a expressão *reta numérica* como equivalente ao símbolo \mathbf{R} que representa o *conjunto dos números reais*.

A geometria mostra que na *reta numérica* tem pontos que não pertencem a \mathbf{Q} , confira a figura (fig 1.7), página 26, em que posso desenhar uma sucessão de círculos de raio \sqrt{n} que, *com algumas exceções*, é um

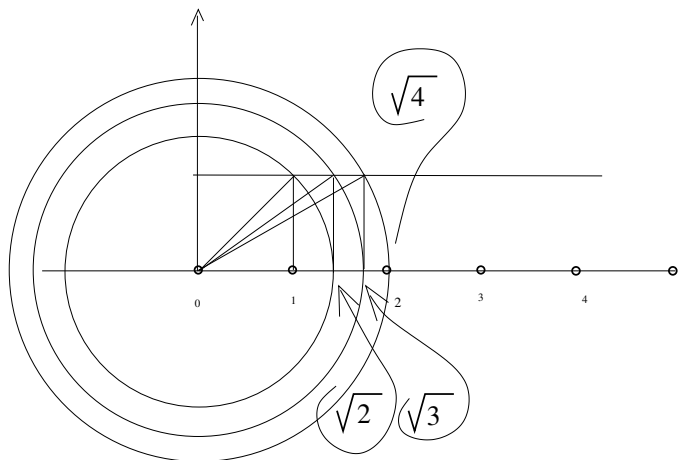


Figura 1.7:

número irracional. Os círculos oferecem o método de determinação geométrica de \sqrt{n} na *reta numérica*. Se você construir, na figura (fig 1.7), um triângulo retângulo de altura 1 com o cateto horizontal medindo x a hipotenusa, que é o raio do círculo, vai medir $\sqrt{x^2 + 1}$ então o círculo com este raio vai encontrar o eixo OX . O último círculo desenhado foi obtido com $x = \sqrt{3}$ que marcou no eixo OX o número 2.

Então a *reta numérica* é uma outra *coisa* diferente de \mathbf{Q} , é um novo conjunto que chamei de \mathbf{R} .

O exemplo mais comum, e o que aparece na figura (fig 1.7), página 26, é $\sqrt{2}$ cujo algoritmo cria de forma muito engenhosa uma *dízima não periódica*, embora o algoritmo não sirva como uma prova de que

$\sqrt{2}$ é *dízima não periódica*. Esta demonstração é feita por contradição,

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \text{ é uma fração irredutível;} \quad (1.61)$$

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2; \quad (1.62)$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ é par;} \quad (1.63)$$

$$p^2 \text{ é par} \Rightarrow p \text{ é par} \Rightarrow p = 2m; m \in \mathbf{N} \quad (1.64)$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{4m^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \frac{2m^2}{q^2} = 1 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \quad (1.65)$$

$$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par;} \quad (1.66)$$

$$p, q \text{ são pares} \Rightarrow \frac{p}{q} \text{ não é irredutível;} \quad (1.67)$$

Na equação (eq.67) eu cheguei a uma contradição porque eu parti da hipótese de que $x = \frac{p}{q}$ é uma *fração irredutível*.

Eu comecei dizendo que os *números* eram *dízimas* que se dividiam em duas classes:

- *dízimas periódicas* e as
- *dízimas não periódicas*.

As primeiras têm uma representação no formato $\frac{p}{q}$ que é a *geratriz* da *dízima*. As *dízimas não periódicas* não admitem uma geratriz porque, como os algarismos aparecem numa sequência imprevisível, é impossível aplicar-lhes o algoritmo da soma dos termos numa progressão geométrica que produz a geratriz no caso das *dízimas periódicas*.

Então na reta numérica tem pelos menos um número, $\sqrt{2}$, que não é uma *dízima periódica*. Claro, tem uma infinidade, para começar \sqrt{n} como a figura (fig 1.7), página 26 mostra sempre que n não for um quadrado perfeito, por exemplo, qualquer número primo, portanto uma infinidade. Outros dois exemplos menos intuitivos são π e e que nem mesmo são *números algébricos* coisa que \sqrt{n} é.

Esta linha de raciocínio leva naturalmente ao método de Dedekind para construção dos números reais, mas ela tem o defeito de oferecer uma grande dificuldade para introduzir no novo conjunto os métodos algébricos que existem em \mathbf{Q} . Somente para mostrar-lhe a razão da dificuldade do método de Dedekind, ele trabalha com um par de sucessões de números racionais, portanto, pelo menos, é duas vezes mais complicado do que trabalhar apenas com uma sucessão de números racionais. Eu vou deixar de lado este método, apenas guardando o fato de que o conjunto \mathbf{Q} tem uma representação geométrica que se chama de *reta numérica*, que é qualquer reta na qual se tenha eleito um *ponto* para representar o *zero* e outro *ponto* para representar 1, definindo, deste modo, as semirretas, *positiva* e *negativa*. O que leva a definir a *ordem* na *reta numérica*. Confira a figura (fig 1.8), página 27,

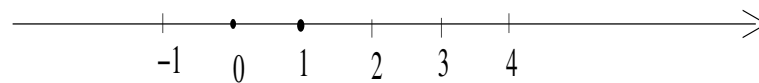


Figura 1.8: reta numérica

E eu vou aproveitar esta construção geométrica do *novo conjunto* que contém \mathbf{Q} para apresentar-lhe este *novo conjunto* de forma diferente. Mas se você for crítica, deverá estar observando que estou falando de três coisas sem estabelecer a conexão entre elas:

- *dízimas*,
- pontos da *reta numérica*,

- sucessões de números.

Mas como definir as operações neste novo conjunto? Para responder a esta questão é que eu preciso apresentar uma forma de construir o novo conjunto dos números reais aproveitando a estrutura algébrica existente, e conhecida, dos números racionais.

Alguma conexão eu já estabeleci quando mostrei que posso identificar os números racionais na *reta numérica*, a figura (fig 1.8), página 27, apresenta os inteiros, mas já fiz menção às médias que preenchem os intervalos entre dois inteiros com frações, as *dízimas periódicas*, e também já mostrei, geometricamente, que algumas *dízimas não periódicas* se encontram na *reta numérica*. Falta-me completar o quadro estabelecendo a estrutura algébrica da *reta numérica*.

- Primeiro mostrando que uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*. O conjunto das *dízimas*, que é \mathbf{R} , é um subconjunto de S que é o conjunto de todas as sucessões de números racionais.

$$\mathbf{R} \subset S; \tag{1.68}$$

Vou já mostrar que \mathbf{R} um subconjunto próprio de S , e com isto vou chegar ao conceito de *limite*. Este ponto é crítico, a partir dos números racionais, como material conhecido, ou ainda como *material primário* que vou usar para construir um novo conjunto, eu preciso como material para esta construção *do conjunto*, S das sucessões de números racionais que herdaram de maneira natural a estrutura algébrica de \mathbf{Q} e é deste conjunto que eu vou retirar um *subconjunto*, dos números reais. O processo de escolha é um novo conceito, *limite*. Desta forma eu estou colocando em funcionamento dois processos completamente integrados,

- a criação dum novo conjunto e
- apresentação dum novo conceito. .

Um número real é um limite e com isto eu vou eliminar um *doloroso processo* que é o estudo das propriedades do limite, são nada mais do que as propriedades dos números reais.

Vou já mostrar que \mathbf{R} um subconjunto próprio de S , e com isto vou chegar ao conceito de *limite*.

- Depois mostrando que em S está definida uma estrutura algébrica que vai ser então *estampada* em \mathbf{R} , deixando o projeto completo.

Sempre que eu *produzir* uma *dízima* o que estou *produzindo* é uma sucessão

$$\begin{cases} s_0 = 1, s_1 = 1.4, s_2 = 1.41, \dots s_{19} = 1.4142135623730950488, \dots \\ s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19} \in \mathbf{Q}, \dots; s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19}, \dots) = \sqrt{2}; \end{cases} \tag{1.69}$$

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = .3, t_2 = 0.33, \dots t_{19} = 0.333333333333333333, \dots \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19} \in \mathbf{Q}, \dots; t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19}, \dots) = \frac{1}{3}; \end{cases} \tag{1.70}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1, \dots, \sigma_k = (-1)^k, \dots; \\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots \sigma_k \in \mathbf{Q}, \dots; \sigma = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots); \end{cases} \tag{1.71}$$

quer dizer que o conjunto de *todas as dízimas* é um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais. Repetindo, uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*, mas *sucessão de números racionais* não precisa ser uma *dízima*. O terceiro exemplo, na equação (eq.71), é uma sucessão de números racionais que não é uma *dízima*.

Uma *dízima* é uma sucessão, na equação (eq.69) você tem uma *dízima não periódica* e na equação (eq.70) você tem uma *dízima periódica*.

Mas tem *sucessões de números racionais* que não são *dízimas*, que é o exemplo da sucessão da equação (eq.71), é uma sucessão de números racionais que não é uma *dízima*. O que diferencia estes dois conceitos no conjunto das sucessões, *dízimas* de *não dízimas* é um novo conceito, *limite*, sobre o qual eu pretendo oferecer-lhe uma introdução aqui. Este conceito é um dos mais difíceis que a estudante encontra quando começa a estudar a Matemática superior.

Mas fique alerta, “*difícil*” não é sinônimo de “*impossível*”! Aquilo que é difícil, o é porque representa um salto no conhecimento. Sim, o conhecimento é feito de saltos, nem sempre os dados se conectam facilmente. E *limite* representa um destes saltos. Mais a frente eu vou voltar a discutir o *salto lógico* que representa a passagem de \mathbf{Q} para \mathbf{R} , e ele representa este salto do conhecimento que você pode encontrar procurando pela palavra chave *salto de cardinalidade*. Quem descobriu este salto foi o matemático Cantor e que, ao morrer, começava a duvidar de sua descoberta que somente ficou devidamente esclarecida 100 anos depois num grande esforço que foi feito na década de 40 para entender os fundamentos da Matemática que estavam seriamente desestruturados por várias correntes de pensamento. Está é uma outra história que merece um artigo a parte.

Para romper este salto eu vou usar duma estratégia, dos exemplos de onde eu vou tirar a teoria. A Matemática é uma linguagem, e a melhor maneira de aprender uma linguagem é pelos exemplos, foi assim que você aprendeu a falar a sua língua materna, talvez português, como é o meu caso.

Primeiro eu vou definir um tipo particular de *limite*, na verdade uma *classe de limites*. Não se assuste com esta referência a uma *classe*, lembre-se que um número racional, uma fração, é uma classe:

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{2}{6} \equiv \frac{10}{30} \dots \quad (1.72)$$

e você convive muito bem com as classes de números racionais. A primeira fração que eu escrevi desta classe de números racionais, $\frac{1}{3}$ é um *representante* desta classe, a *fração irredutível* da classe. Mas todas as outras são tão boas como a primeira. Quer dizer que existe uma infinidade de representações para $\frac{1}{3}$, e você convive perfeitamente com isto. O conjunto dos números reais é formado também de classes e é o *limite* que caracteriza cada uma das classes, e agora eu vou apresentar-lhe a classe do zero, o limite zero.

A classe do zero

A palavra chave agora é *convergir*, que é quase que um sinônimo de *limite*. Eu vou definir a *classe das sucessões de números racionais que convergem para zero*. Começo com a definição de convergência para zero e mostro que o conjunto de tais sucessões não é vazio e tem uma estrutura algébrica interessante.

Eu vou usar esta classe para definir um tipo particular de *limite* que vai me permitir a construção da teoria dos limites que é necessária ao Cálculo Diferencial e Integral.

Deixe-me começar com um exemplo do qual vou tirar todos os dados para fazer uma definição.

$$t = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots); t_k = 0; \quad (1.73)$$

$$s = (s_k)_{k \in \mathbf{N}}; \begin{cases} k > 0 \Rightarrow s_k = \frac{1}{k}; \\ k = 0 \Rightarrow s_0 = 0; \end{cases} \quad (1.74)$$

A sucessão identicamente nula definida na equação (eq.73) é um exemplo de sucessão que converge para zero, é a sucessão constante zero. Um outro exemplo de sucessão que converge para zero está definida na equação (eq.74). em que eu incluí uma *regra de proteção* para o índice $k = 0$, entretanto a definição poderia ser arbitrária, porque o que interessa numa sucessão é o seu *comportamento para grandes valores do índice* e chama-se isto de *comportamento assintótico*.

Na figura (fig 1.9), página 30, você pode ver o gráfico da sucessão definida na (eq.74). Nela você também pode ver retas horizontais marcando a abertura dum “*paquímetro*” com diâmetros $d \in \{1, 0.5, 0.2, 0.1\}$, a última “*abertura*” ficou pouco visível.

Paquímetro é o instrumento que você pode ver na figura (1.10), página 31. É um instrumento de

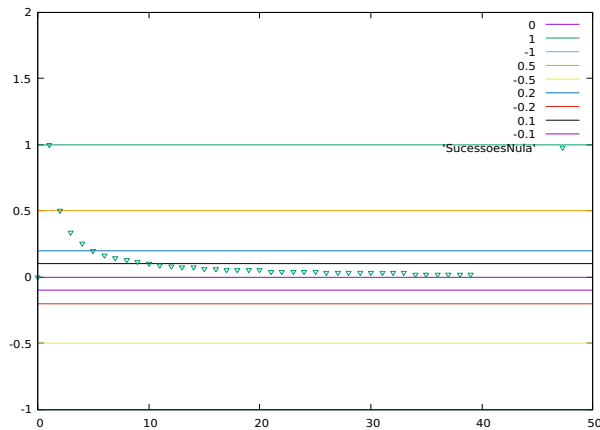


Figura 1.9:

alta precisão que serve para medir os diâmetros, interno ou externo, de figuras cilíndricas e usado pelos *torneiros mecânicos*.

Aqui eu estou usando um paquímetro para determinar quando

$$|s_k| < \epsilon; \epsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}; \quad (1.75)$$

e você pode verificar na figura

1. $\epsilon = 0.5$ vale para todo $k > 2$;

$$k > 2 \Rightarrow |s_k| < 0.5 = \epsilon;$$

2. $\epsilon = 0.2$ vale para todo $k > 5$;

$$k > 5 \Rightarrow |s_k| < 0.2 = \epsilon;$$

3. $\epsilon = 0.1$ vale para todo $k > 10$;

$$k > 10 \Rightarrow |s_k| < 0.1 = \epsilon;$$

Procure entender as “*traduções*” que eu fiz de cada sentença nos três casos que eu considerei. É esta *tradução* que eu vou usar na definição.

Eu estou querendo determinar a partir de qual índice k é verdade que “ $|s_k| < \epsilon$ ” e a figura me mostra três respostas para esta indagação.

Agora vou fazer a a definição de *sucessão que converge para zero* usando a experiência com sucessão da equação (eq.74).

Definição 7 (sucessão) que converge para zero Seja $s = (s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tal que

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists K \in \mathbf{N}) (k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon); \quad (1.76)$$

Então s_k converge para zero e se usa a notação

$$s_k \rightarrow 0; \quad (1.77)$$

para indicá-lo. Há também outra notação sobre a qual vou fazer comentários mais adiante.

O exemplo da equação (eq.74) me deu as três respostas listadas acima, mas não provou nada. Mas logo eu fazer esta demonstração.

Geometricamente, melhor dizendo, “*figurativamente*”, se você pegar um *paquímetro*, cuja imagem você pode ver na figura (1.10), página 31, você pode estabelecer uma abertura ϵ , como estabelece a definição e percorrer o gráfico duma sucessão até encontrar o índice K , a partir do qual a sucessão fica confinada numa faixa de raio ϵ em volta do eixo OX como mostra a figura (fig 1.10), página 31. O *paquímetro* serve para determinar *diâmetros*, aqui estou usando para encontrar a *largura* ϵ duma faixa em que os termos da sucessão ficam confinados a partir de um índice K . Se isto for possível, para qualquer que seja ϵ , você obteve

$$(k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon); \tag{1.78}$$

você encontrou o índice K que corresponde à abertura ϵ e a partir de K todos os termos da sucessão ficam confinados numa faixa de largura ϵ .

Agora eu preciso ter uma demonstração de que afirmação vale para valores arbitrário de ϵ , então a sucessão se encontra no conjunto S_0 . Preciso demonstrar por que exemplos nada provam.

Vou fazer *demonstrações*, e vou começar com exemplos simples para que você compreenda a *razão da coisa*. Deixe-me provar que a sucessão do exemplo apresentado na (eq.74) pertence ao conjunto S_0 .

$$\frac{1}{k} < \epsilon \Rightarrow k > \frac{1}{\epsilon}; \tag{1.79}$$

$$K = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor; \tag{1.80}$$

$$k > K \Rightarrow |\frac{1}{k}| < \epsilon \tag{1.81}$$

Então $K > \frac{1}{\epsilon}$, entretanto eu procuro o *menor inteiro* que satisfaz esta condição, porque eu preciso especificar um inteiro a partir do qual fica garantido que s_k entra dentro da faixa de raio ϵ que fica em volta do eixo OX porque estou definindo quando s_k tem limite zero.

Deixe-me trocar em miúdos o conteúdo da sentença da equação (eq.80). Você viu na figura (fig 1.9)

$$k > \frac{1}{0.5} = 2 \Rightarrow \frac{1}{k} < 0.5 \tag{1.82}$$

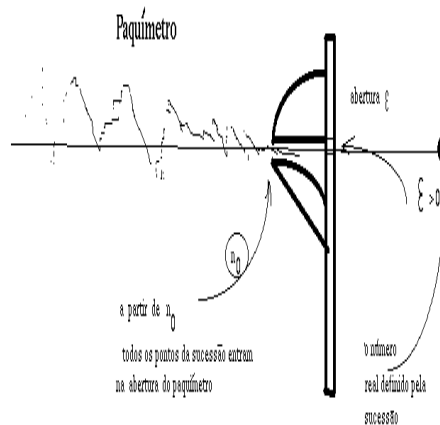


Figura 1.10: paquímetro e uma sucessão nula

mas nem sempre $\frac{1}{\epsilon}$ é um número inteiro e os índices das sucessões são números inteiros é por isto que eu preciso estipular o *menor inteiro que seja maior ou igual* $\frac{1}{\epsilon}$ que é o conteúdo da notação $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$. A maioria das linguagens de programação entendem este símbolo da Matemática que elas chamam de *ceil*, que significa *teto* em inglês, na *linguagem do império*.

- O menor inteiro que é maior ou igual a 0.5 é 1
- O menor inteiro que é maior ou igual a 1.5 é 2
- O menor inteiro que é maior ou igual a 2.5 é 3
- O menor inteiro que é maior ou igual a 3.5 é 4
- O menor inteiro que é maior ou igual a 4.5 é 5
- O menor inteiro que é maior ou igual a 5.5 é 6

- O menor inteiro que é maior ou igual a 6.5 é 7
- O menor inteiro que é maior ou igual a 7.5 é 8
- O menor inteiro que é maior ou igual a 8.5 é 9
- O menor inteiro que é maior ou igual a 9.5 é 10
- O menor inteiro que é maior ou igual a 10.5 é 11
- O menor inteiro que é maior ou igual a 11 é 11

para obter estes exemplos eu rodei o comando

```
for(k=0.5;k<11; k++) {
  print "
item O menor inteiro que é maior ou igual a ",
  "é ", ceil(k)
}
```

num terminal, executando `calc`. O último exemplo, como o número 11, eu acrescentei manualmente! Mas bastava acrescentar um `if()` para obter tudo automaticamente e depois apenas raspar e colar dentro do editor.

Na prática esta definição me permite encontrar uma *aproximação* para o *valor assintótico* que a sucessão representa, quer dizer um valor que eu posso colocar no lugar de $s_k = \frac{1}{k}$ para ser usado como *representante* para esta sucessão com um erro da ordem ϵ .

Esta frase não é fácil, e ela representa um primeiro passo para a compreensão do limite que Richard Courant dizia que “*era o limiar do ensino superior*, e ele falava isto em 1940... Continua ainda sendo a porta de entrada para o Cálculo. Se você passar por esta porteira o resto é bem mais simples. E eu vou justificar isto ao longo deste texto.

O que me interessa numa *sucessão que convirja para zero* é que ela tenha *propriedades*, e isto quer dizer, satisfaça a sentenças que possam ser traduzidas para um programa de computador que, pelo menos, mostrem graficamente a relação K, ϵ para um valor de ϵ estipulado.

Foi o que usei para obter dois dos gráficos que aparecem neste texto que foram produzidos com auxílio de duas linguagens de programação, `calc`, [**Calc**] para fazer as contas, e `gnuplot`, [**Gnuplot**], para produzir os gráficos. O programa que usei para obter estes gráficos pode ser baixado de [**PracianoPereiraCnum**]. O caso destes dois gráficos é um exemplo simples da *intrínseca praticidade* que tem o *formalismo matemático*.

Não somente para eu possa traduzir para um programa de computação, mas eu preciso de *sentenças* que caracterizem logicamente o conjunto que eu quero definir que eu preciso escrever formalmente para usar tanto em demonstrações como em programas de computação.

Vou estabelecer isto de forma algébrica. Como já dei dois exemplos de tais sucessões, posso tranquilamente falar que existe um conjunto de tais sucessões e dar-lhe um nome.

$$S_0 = \{s; s \text{ sucessão que converge para zero}\}; \quad (1.83)$$

e os dois exemplos acima mostram que $S_0 \neq \emptyset$

Propriedades do conjunto S_0 .

1. Para todo número $K \in \mathbf{Q}$, se $s \in S_0 \Rightarrow Ks \in S_0$.

E que significa esta afirmação? Significa que o conjunto S_0 é estável por multiplicação: $KS_0 \subset S_0$ para qualquer número racional K .

E aqui eu posso falar baixinho um segredo, $K * 0 = 0$? Sim, eu vou querer depois definir S_0 como a *classe do zero*! É isto que é *limite*, são *classes de equivalência* que definem números.

2. $s, t \in S_0 \Rightarrow s + t \in S_0$ que significa que S_0 é fechado para adições. Isto já começa a fornecer uma estrutura algébrica ao conjunto S_0 . Pode ser que $(S_0, +)$ seja um *grupo* com a operação de adição. A propriedade anterior confirma, porque se $s \in S_0$ então $-s \in S_0$ tomando agora $K = -1$. Quer dizer que todo elemento em S_0 tem um inverso aditivo.

Olha o segredo: $0 + 0 = 0; -0 = 0; K * 0 = 0 \dots$

3. A propriedade comutativa é nata, uma vez que estarei somando sucessões de números racionais, assim como as propriedades associativa e distributiva. Repetindo a soma de sucessões é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* do produto em relação à soma. Com isto cheguei a que $(S_0, +)$ é um *grupo* comutativo. Confira a definição de *grupo*, mas é a mesma estrutura que tem $(\mathbf{Z}, +)$ que é um *grupo*.
4. Se $s, t \in S_0 \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon$ quando eu escolher $\epsilon < 1$, para um valor máximo das escolhas de K que satisfizerem à condição para cada uma das sucessões s, t . Esta frase ficou complicada! Para cada uma das sucessões s, t e tenho índices K_1, K_2 que eu posso colocar na definição de limite e garantir que

$$|s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon \quad (1.84)$$

mas considere o maior dos dois K_1, K_2 e chame-o de K e agora vale

$$k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon; \quad (1.85)$$

$$k > K \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon; \quad (1.86)$$

$$k > K \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon; \quad (1.87)$$

Esta explicação extra que dei agora é um exemplo interessante, os autores muitas vezes atropelam as leitoras tirando conclusões curtas como eu fiz, antes de me corrigir. Desconfie sempre que você não entender um texto de Matemática, muito provavelmente o autor está atropelando, tente *abrir as contas* que é uma gíria muito usada entre os estudantes de Matemática quando encontram um resultado meio complicado. É porque ficaram escondidos os passos intermediários. Abra as contas!

Então (S_0, \cdot) é fechado para multiplicação isto faz com que $(S_0, +, \cdot)$ seja um anel. Ou seja este conjunto de sucessões que convergem para zero é uma estrutura algébrica semelhante à $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

E porque eu fiz a restrição $\epsilon < 1$? Porque interessa-me garantir que $s \in S_0$ então s é uma sucessão assintoticamente pequena, quer dizer, na desigualdade

$$|s_k| < \epsilon; \quad (1.88)$$

eu vou precisar de escolher valores pequenos para ϵ .

E olha o segredo, $S_0 * S_0 \subset S_0; 0 * 0 = 0$;

O maior sucesso de S_0 consiste em que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é um conjunto de sucessões que “*convergem para r*” que é a próxima definição. Esta frase é incomum nos textos de Matemática, ninguém costuma fazer previsões antes de estabelecer a definição, mas acho que cria um suspense pedagógico fazer desta maneira. Quero mostrar que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é o conjunto da sucessões que convergem para r e preciso agora definir o que significa uma sucessão convergir para r , o que vou fazer alterando a definição de convergência para zero. Depois vou voltar para provar que $S_0 + r$ é o conjunto das sucessões que convergem para r .

O trágico quando construímos Matemática e que nos vem ideias brilhantes, que funcionam, apenas não sabemos depois como produzi-las na prática, entretanto este é um item irrelevante para a Matemática. Neste caso eu simples não como calcular $S_0 + r; r \notin \mathbf{Q}$! Isto vai me forçar a encontrar outra saída.

Na busca desta saída eu vou agora definir limite expandindo a definição de limite zero, se achar complicado, leia logo o comentário que se segue à definição.

Definição 8 (sucessão) que converge para $r \in \mathbf{Q}$ Seja $s = (s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tal que

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists K \in \mathbf{N}) (k > K \Rightarrow |s_k - r| < \epsilon); \quad (1.89)$$

Agora eu coloco o *paquímetro* com a abertura em volta de r para descobrir a partir de índice K os termos da sucessão vão estar confinados numa *faixa* de diâmetro ϵ centrada em r .

Eu defini a convergência para $r \in \mathbf{Q}$, porém, como incluir nas contas $r \notin \mathbf{Q}$? Esta é uma *dificuldade psicológica* de quem está passando inicialmente pelo estudo do limite. Se estou “*construindo*”, como posso fazer uso dum elemento de um conjunto que ainda não está construído? o que significa $r \notin \mathbf{Q}$ nesta definição. Isto é mais do que um problema psicológico, é um problema de lógica. Deixe-me mostrar uma alternativa e desarme sua mente se souber que ela é difícil. Aliás, não espere nada fácil em Matemática, mas lembre-se que Matemática é uma construção de seres humanos, como você. E o que for difícil apenas exige mais concentração e trabalho, nada é *impossível*.

Se $r = \sqrt{2}$ ainda poderia ser possível fazer algumas contas alterando a expressão $|s_k - \sqrt{2}| < \epsilon$ para encontrar

$$k > K \Rightarrow |s_k - \sqrt{2}| < \epsilon \quad (1.90)$$

mas, se $r = \pi$ ficaria complicado! Avançando no curso de Cálculo você vai encontrar fórmulas que lhe vão permitir calcular um pedaço da dízima que fornece uma aproximação par π mas ainda assim vai ser trabalhoso operar com a desigualdade, dado um erro ϵ .

Preciso encontrar uma alternativa, e ela existe, e está no ponto de apresentá-la.

Exemplos sempre mostram o caminho para construir a teoria. Deixe-me começar com

$$r = \frac{4}{3} = 1.33333333333333333333 \dots \quad (1.91)$$

$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \quad (1.92)$$

acompanhe as contas

$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \quad (1.93)$$

$$s_{40} = 1.33333333333333333333333333333333333333; \quad (1.94)$$

$$|s_{40} - s_{20}| = 0.0000000000000000000033333333333333333333 < \frac{3}{10^{21}}; \quad (1.95)$$

$$|s_{40} - s_{20}| < \frac{3}{10^{21}}; \quad (1.96)$$

$$|s_{40} - s_{2000}| < \frac{3}{10^{21}}; \quad (1.97)$$

$$|s_{40} - s_{2000000}| < \frac{3}{10^{21}}; \quad (1.98)$$

you precisa ler os cálculos feitos nas equações (eq.95)- (eq.98) para entender o que vou agora comentar. O *erro* ao considerar o limite de s como sendo $s_{20} = 1.33333333333333333333$ é menor do que $\frac{3}{10^{21}}$.

Repetindo, $\frac{4}{3} \neq 1.33333333333333333333$ mas tomar 1.33333333333333333333 em lugar de $\frac{4}{3}$ representa cometer um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Claro, $\frac{4}{3} \in \mathbf{Q}$ e nós sabemos, os computadores sabem, fazer contas com este símbolo. O que *nem os computadores e nem nós* sabemos é fazer contas com π . E é esta a razão deste texto. Como é que vamos *falar com os computadores* e lhes passar um valor para π , ou qualquer outro número que não seja racional? A única forma de fazê-lo é passando um *valor aproximado* como

$$\frac{4}{3} \approx 1.33333333333333333333; \quad (1.99)$$

Repetindo, no caso dos números racionais eu posso passar a um programa de computador o seu valor exato $\frac{p}{q}$ que também é um valor simbólico. No caso de π eu tenho que usar

$$\pi \approx 3.14159265358979323848 \quad (1.100)$$

sabendo que estou cometendo um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Observe que eu sei que estou cometendo um erro desta ordem, o que ainda significa que eu tenho o controle do erro que estou cometendo. Isto ainda quer dizer que sei qual é o limite duma sucessão de números racionais que se aproxima de π e posso parar o processo algorítmico do cálculo de π quando for atingida a precisão que eu precisar.

Estes cálculos me deixam no ponto de mostrar-lhe o método para verificar se uma sucessão tem limite ou não, se ela é convergente ou não e finalmente se for convergente como tomar decisão pela escolha dum valor aproximado. As diferenças $|s_m - s_n|$ é que vão controlar a escolha de m como o ponto de decisão e então o limite $r \approx s_m$ e assim eu cheguei no critério de Cauchy para determinação de duas coisas:

1. se s_n é convergente,
2. a decisão de quando parar o algoritmo quando a precisão atingida for a desejada.

É raro um autor se referir ao critério de Cauchy como um método prático de aproximação. Usualmente ele é apresentado como um método teórico, o que ele é, mas é importante o seu aspecto de determinação da aproximação desejada, ou necessária. Deixe-me enunciar o critério de Cauchy que é simples reformulação das contas que eu fiz nas equações (eq.95)-(eq.98).

critério de Cauchy é uma condição de existência!

Definição 9 (critério) de Cauchy

$$(\forall \epsilon) (\exists K \in \mathbf{N}) (m, n > K \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon) \iff s_n \text{ converge}; \tag{1.101}$$

A sucessão s converge se e somente se satisfizer ao critério de Cauchy.

Observe que o critério de Cauchy garante que a sucessão converge mas fica silencioso a respeito do valor do limite. Quando o critério de Cauchy for verificado, então eu sei que qualquer um dos dois valores s_m, s_n podem ser usados como uma aproximação para o valor do limite com a garantia de que o erro cometido é da ordem de ϵ .

Um erro! Corrigido!

O critério de Cauchy é uma garantia de que o limite existe, ele estabelece quando um sucessão é convergente. É ele que divide as sucessões em duas grandes classes: a classe das sucessões convergentes, aquelas que definem dízimas e a classe das sucessões divergentes, aquelas que não definem dízimas.

Pensando no paquímetro a semântica da coisa fica ligeiramente diferente, agora o que estou verificando é todos os termos da sucessão, a partir de K ficam confinados numa faixa de raio ϵ e portanto o limite fica dentro desta faixa e em geral eu não vou conseguir calculá-lo exatamente.

Deixe-me dar-lhe um exemplo usando $\frac{4}{3}$, exatamente porque eu sei tudo a respeito deste símbolo. s_n é a dízima periódica que aparece na (eq.99). Eu quero que o erro máximo envolvido com uma aproximação seja 0.1 para ser modesto. . .

$$m, n > 3 \Rightarrow |s_m - s_n| < 0.1 = \epsilon; \tag{1.102}$$

$$|1.3333333333333333 - 1.3| = 0.03333333333333333 < 0.1; \tag{1.103}$$

então $s_1 = 1.3$ é o valor do limite com um erro $\epsilon = 0.1$, bem modesto.

Observe que eu evitei de usar os exemplos com π porque o algoritmo para determinar as decimais desta dízima é bem complicado e mais adiante, no Curso de Cálculo você irá encontrá-lo quando estiver estudando integral. Neste momento seria difícil de fazer uso deste exemplo.

Agora eu posso redefinir S_0 , como o conjunto de todos os elementos do anel das sucessões convergentes que têm limite zero. É a classe das sucessões de Cauchy que definem o zero. $\pi + S_0$ é a classe das sucessões de Cauchy que definem π , apenas eu não sei fazer esta conta.

Então eu vou encontrar uma saída bem a gosto dos Matemáticos que adoram brincar de *faz de contas*. Vou fazer de contas que eu sei, e é incrível como este método funciona, e por isto que Matemática é uma grande diversão, que infelizmente também serve para os banqueiros colocarem para funcionar o videogame que eles chamam de *mercado*.

Vou fazer exatamente a mesma coisa que se faz com os números racionais, com as frações, se define uma relação de equivalência. Agora vou usar o *critério de Cauchy* que é uma relação de equivalência.

Definição 10 (critério) *Cauchy como relação de equivalência* Considere duas sucessões, t se

$$(\forall \epsilon) (\exists K \in \mathbf{N}) m, n > K \Rightarrow (|s_m - t_m| < \epsilon) \iff s \equiv t; \quad (1.104)$$

Um erro!
Corrigido!

As duas sucessões, t são equivalentes à Cauchy. Se uma delas for convergente, a outra também será e terão o mesmo limite, ou melhor, definirão o mesmo número real. Se uma delas for divergente, a outra também será.

Agora S_0 é a classe do zero, é uma classe de equivalência desta relação recém definida. É uma classe de sucessões de Cauchy de números racionais. Embora esta definição possa, inicialmente, parecer esdrúxula, é precisa e exata. Compare com um número racional, que também é uma classe frações equivalentes, embora não seja isto dito com frequência. Em geral se diz, erradamente, que um número racional é uma fração $\frac{p}{q}$; $q \neq 0$, quando na verdade é uma classe de equivalência de tais frações.

Da mesma forma um número real é uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy um dos exemplos mais fáceis é o caso de *raiz de dois*.

π pode ser obtido de forma muito rudimentar com uma definição geométrica que os gregos tonaram muito conhecida, é mais simples do que $\sqrt{2}$, porque uma aproximação para π pode ser obtida com polígonos regulares convexos inscritos num círculo de raio 1, a sucessão dos perímetros destes polígonos é uma sucessão crescente para o limite que é π . Outra forma de obter uma aproximação para π é com polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio 1, resulta numa sequência decrescente para o limite que é π . Aqui você vê duas *sucessões de Cauchy*, que têm o mesmo limite, consequentemente duas sucessões de Cauchy equivalentes, dois exemplos da classe designada pelo símbolo π .

Na figura (fig 1.11), página 36, você pode ver duas sucessões, uma decrescente e a outra decrescente

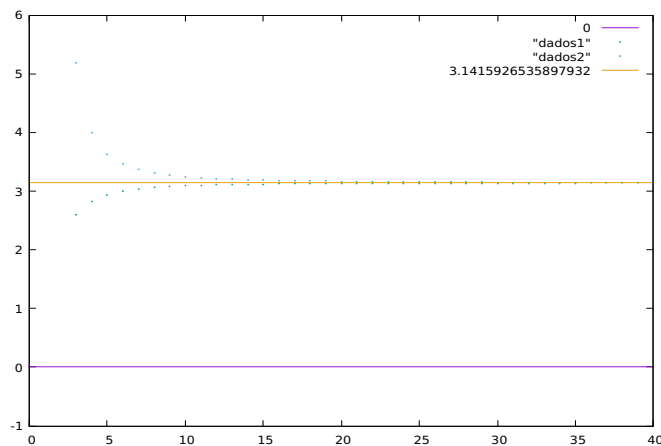


Figura 1.11: 2 dízimas que aproximam π

que convergem para π . Elas foram obtidas considerando os perímetros de polígonos regulares circunscritos e inscritos. Este é um exemplo *corrupção lógica*, o programa que rodei usa π para calcular o perímetro

dos polígonos e naturalmente esta não pode ser uma forma de construir uma sucessão que convirja para π . Satisfaz ao meu objetivo neste texto porque mostra, graficamente, duas sucessões que convergem para π uma por valores maiores e outra por valores menores.

Mas, como já disse, avançando no estudo das integrais você vai encontrar uma que fornece um algoritmo para calcular a constante de Arquimedes. Na figura (fig 1.11), a linha horizontal cheia representa a dízima π .

O programa você encontra em **[PracianoPereiraCnum]**.

Qualquer sucessão convergente de números racionais é uma sucessão de Cauchy. Outra forma de dizer isto é *toda dízima* é uma sucessão de números racionais convergente definindo um número real.

Para $\sqrt{2}$ se pode usar o algoritmo do cálculo da raiz escolhendo-se ora uma casa inferior ora uma casa superior, no algoritmo, para obter duas sucessões equivalentes que convergem para $\sqrt{2}$,

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \dots \quad (1.105)$$

$$2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, \dots \quad (1.106)$$

Esta é uma introdução à construção dos números reais, uma das três mais conhecidas que é a minha preferida: via sucessões de Cauchy. Fazendo uma rápida defesa das *sucessões de Cauchy*, ou melhor do *teste de Cauchy*, este teste provê uma aproximação para um número real com o erro estipulado ϵ :

$$\forall \epsilon > 0; \exists K \in \mathbf{N}; \quad (1.107)$$

$$n, m > K \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad (1.108)$$

querendo parar o processo de construção dum número real com precisão ϵ basta descobrir $K \in \mathbf{N}$ do teste de Cauchy, então qualquer $x_n; n > K$ é uma ϵ aproximação para o número real procurado. Portanto um método prático e não um difícil método teórico como algumas vezes é pintado o teste de Cauchy.

Os passos desta construção eu vou apenas mencionar como uma lista de exercícios, não muito fáceis, para a leitora interessada:

1. O conjunto de todas as sucessões de números racionais, seja S este conjunto, é uma álgebra com divisores de zero. Dê pelo menos um exemplo de divisor de zero.
2. O conjunto de todas as sucessões que convirjam para zero (logo sucessões de Cauchy) é um *ideal maximal* da álgebra S . Deixe-me chamar este ideal maximal de S_0 .
3. O quociente por um ideal maximal, numa álgebra, é um corpo, neste caso o corpo dos números reais: $S/S_0 = \mathbf{R}$.

Uma das consequências desta construção são as propriedades do *limite* que se tornam óbvias neste contexto e praticamente impossível de serem demonstradas, como se pretende, no Cálculo Diferencial e Integral a não ser que os exercícios acima sejam feitos.

Notação do limite

Eu fujo fortemente da regra no que diz respeito à notação do *limite*. Para começar o próprio conceito de limite deve ser discutido. O *limite* é um *operador* que se aplica a distintos tipos de função e você vai ver isto ao longo do Curso de Cálculo. No caso das sucessões, que são funções cujo domínio é o conjunto \mathbf{N} , interessa-me saber qual é o comportamento assintótico duma sucessão que é o seu *valor* no ∞ . Se ela tiver um valor no ∞ , quer dizer que *ela tem limite* ou ainda é convergente.

Então a notação que eu uso é

$$s \in S_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0; \quad (1.109)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1.333 \dots = 1.(3) = \frac{4}{3}; \quad (1.110)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3.1415926 \dots = \pi; \quad (1.111)$$

são exemplos do valor do operador *limite* atuando sobre algumas das dízimas conhecidas.

O salto de cardinalidade

Foi Cantor que descobriu o *salto de cardinalidade* e que tentou demonstrá-lo sem sucesso e nem mesmo convencer os matemáticos de sua época de havia um salto de cardinalidade, a tal ponto que ao final da vida nem mesmo ele acreditava em sua descoberta. Morreu doido!

Se um conjunto S tiver $n \in \mathbf{N}$ elementos, então o *conjunto das partes* de S , $\mathbf{P}(S)$ terá 2^n elementos. Isto é uma consequência imediata do binômio de Newton que descreve em cada linha as combinações de n elementos tomados $p - a - p$ porque dado um conjunto com n elementos os seus subconjuntos são as combinações dos seus elementos. Em outras palavras *combinação* é sinônimo de *subconjunto*.

Mais,

$$S \subset \mathbf{P}(S) \quad (1.112)$$

subconjunto próprio valendo logo para o \emptyset .

Uma sucessão é um *arranjo* dos elementos do conjunto de chegada contendo portanto todas as combinações dos elementos do conjunto de chegada como um subconjunto próprio então o conjunto S das sucessões de números racionais contém como subconjunto próprio o conjunto \mathbf{Q} e contém também como subconjunto próprio $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$.

Cantor descobriu que a cardinalidade de \mathbf{Q} e de $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ eram distintas e que, se eu pudesse escrever a desigualdade sem sentido

$$\text{card}(\mathbf{Q}) < \text{card}\mathbf{P}(\mathbf{Q}) \quad (1.113)$$

não havia nenhum conjunto com cardinalidade intermediária. Portanto havia um salto de cardinalidade. Na verdade a *cardinalidade* é uma classificação das *complexidades*. Eu entendo que cardinalidade e complexidade se equivalem. Cantor não conseguiu uma demonstração para sua descoberta e nem mesmo conseguiu convencer a ninguém que tal salto existia. Foram precisos passar 100 anos para que Paul Cohen completando a tese de Gödel e estabelecendo que não é possível ter em Matemática uma única teoria dos conjuntos e sim pelo menos duas, uma delas é a chamada teoria dos conjuntos de ZFC (Zermelo-Fraenkel). Na teoria dos conjuntos de ZFC o salto de cardinalidade é um axioma que Cantor estava tentando demonstrar.

É o que Richard Courant sentia e expressou dizendo que *limite*, quer dizer, *número real* era o limiar da Matemática Superior. Em boa parte é isto que torna tão difícil provar as propriedades do limite, na verdade o que se está tentando provar são as propriedades dos números reais que eu aqui contornei produzindo \mathbf{R} a partir dum conjunto que tem uma estrutura algébrica bem estabelecida e de fácil demonstração. \mathbf{R} herda as propriedades de \mathbf{Q} deixando de existir uma coisa chamada *propriedades do limite* que são simplesmente as propriedades de \mathbf{R} .

Finalizando, a cardinalidade de \mathbf{R} é um novo salto na escala de cardinalidades que é chamada de c a cardinalidade do contínuo.

1.8 a exponencial e o logaritmo complexos

Um número complexo é um número da forma $a + bi$

$$a + bi; \quad (1.114)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1} \quad (1.115)$$

Estes números surgem naturalmente como soluções de equações do segundo grau quando o *determinante de equação* é negativo então a *fórmula de Baskhara* produz os *números complexos*. Confira o exemplo,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (1.116)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{R} \quad (1.117)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac; \quad (1.118)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{(-1) - \Delta} = \pm i \sqrt{-\Delta}; i = \sqrt{-1} \quad (1.119)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm id}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{d}{2a} = a + bi; \quad (1.120)$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -11 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i \sqrt{11}; \quad (1.121)$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{3+i\sqrt{11}}{2}, \frac{3-i\sqrt{11}}{2} \right\}; \quad (1.122)$$

$$a + bi \in \left\{ \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2} \right\}; \quad (1.123)$$

Quando $\Delta < 0$ se define $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ confira equação (eq.119) fazendo aparecer os números com o formato $a + bi$; $a, b \in \mathbf{R}$, na equação (eq.120) ou ainda na equação (eq.122).

Observe que esta invenção expande uma propriedade dos números, agora

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \quad (1.124)$$

que somente valia para os números reais positivos e agora vale para qualquer número complexo.

O nome que estes números adquiriram caracteriza o preconceito que durante muito tempo eles carregaram quando eles não eram considerados números e inclusive esta denominação criou, e segue criando dificuldades na assimilação destes números no ensino da juventude. Confira *complexo, número* para obter mais informações sobre o conjunto dos números complexos, sua estrutura algébrica.

Praticamente tudo que se possa dizer sobre os números reais, também pode ser dito sobre os números complexos. Existe uma exceção importante a esta regra, que é sobre a relação de ordem. O conjunto dos números reais é um corpo ordenado, os conjunto dos números complexo não possui uma relação de ordem perfeita como é a ordem em \mathbf{R} : todo conjunto limitado de números reais tem um *supremo* e um *ínfimo*, e esta afirmação não pode ser feita para o conjunto dos números complexos. Tem mais coisa que tornam os dois conjuntos diferentes e vou mostrar isto quando tratar das *funções complexas* num próximo volume desta coleção.

Mas, para terminar, faça-lhe um alerta, todos os livros de Cálculo ignoram os números complexos e com isto ajudam a manter o terror injustificado que eles infundem nos estudantes. Fazer cálculos com os números complexos é apenas duas vezes mais difícil porque eles têm duas coordenadas, na verdade quatro vezes mais difícil, observando que o produto de números complexos envolve o cálculo de quatro expressões. E o ganho que se tem adotando os números complexo é imenso.

Capítulo 2

O espaço e as variedades lineares

2.1 O espaço cartesiano

Neste capítulo eu vou discutir o *espaço geométrico* o cenário em que as curvas vão ser analisadas. A *Geometria Analítica* foi criada para aplicar os métodos da álgebra e da aritmética às relações geométricas, comumente ligada ao nome de *René Descartes* que teria sido o idealizador do sistema de *coordenadas cartesianas*.

Meu ponto de partida será a *reta numérica*, \mathbf{R} seguida do *plano numérico*, designação que ninguém usa, ele se chama *plano cartesiano* mas é uma continuação da numerização da reta agora para o plano. É o produto cartesiano da *reta numérica* por ela mesma, o $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e finalmente, o $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, o *espaço cartesiano*.

A Geometria Analítica define as equações de alguns lugares geométricos, como retas, planos, círculos, elipses, parábolas, hipérbolas, as chamadas cônicas. E foi uma invenção revolucionária que alcançou muito além do que seus idealizadores podem ter pensado na época. Hoje eu posso definir retas, parábolas, planos, círculos, elipses, e hipérbolas com equações que podem ser usadas por programas de computador o que tornou possível as ousadas viagens espaciais que a Humanidade já fez pelo Universo.

Eu vou desenvolver as *ferramentas de descrição e medição do espaço* que serão utilizadas nos capítulos seguintes para *descrever* e usar os entes geométricos em programas de computador.

O sistema de coordenadas cartesianas basicamente identifica os pontos da *reta numérica* com um número real e é isto que chamamos de *coordenada* dum ponto na reta. Quer dizer que vou *numerizar a reta*. Depois o plano é o *produto cartesiano* de duas retas e conseqüentemente eu vou *numerizar o plano* e em seguida o espaço tridimensional. Assim vou poder descrever objetos geométricos com equações algébricas e usá-los em programas de computador.

Ao identificar um ponto, numa reta qualquer, como sendo o *zero*, à direita do qual, por convenção se identifica um outro ponto como sendo o 1 como você pode ver na figura (fig 2.1), página 41, então foi

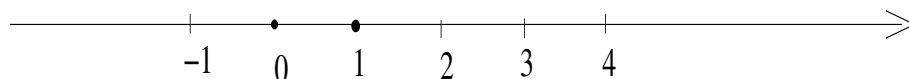


Figura 2.1: reta numérica, representação geométrica de \mathbf{R}

criado uma sistema para “numerizar a reta” ou “digitalizar a reta”. Desta forma a reta deixa de ser apenas um ente geométrico e passa agora a ser uma representação do conjunto dos números reais \mathbf{R} .

- Ao escolher um ponto para representar o zero eu divido a reta em duas semirretas.

- A escolha dum ponto para representar o número 1 seleciona uma das *semirretas* como a *semirreta positiva*, mas fez mais do que isto definiu um *segmento de reta* com medida 1 o que me permite propagar pela reta numérica todos os números inteiros usando, por exemplo, um compasso para marcar os inteiros positivos e negativos.
- Os números negativos são marcados na *semirreta negativa*, naturalmente.

É o que você está vendo na figura (fig 2.1), página 41.

A semelhança de triângulos me permite registrar a posição dos números racionais que não sejam inteiros, confira a figura (fig 2.2), página 42, onde você pode ver as frações da forma

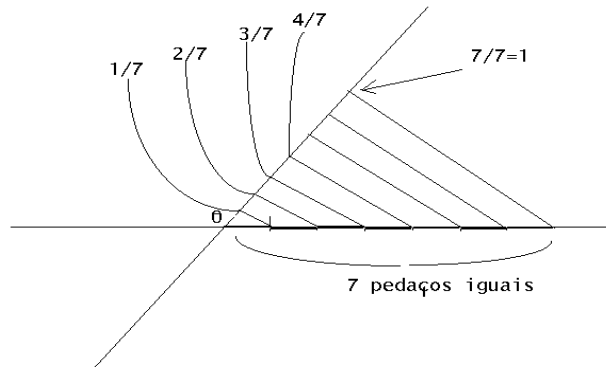


Figura 2.2: frações triângulos semelhantes

$$\frac{p}{7}; 0 \leq p \leq 7; \{0 = \frac{0}{7}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{7}{7} = 1\}; \quad (2.1)$$

Este *dispositivo*, que usa apenas a *semelhança de triângulos* me permite dividir qualquer segmento usando qualquer que seja o denominador com grande precisão. Na figura eu usei a divisão por 7 que não é das mais fáceis. Na reta que aparece *oblíqua*, eu selecionei um segmento que repeti 7 vezes e depois projetei a sequência de segmentos no intervalo $[0, 1]$ da reta horizontal, e você pode fazer isto com qualquer *denominador*...

A *reta numérica* herda da *reta geométrica* uma propriedade importante dos segmentos de reta, confira a figura (fig 2.3), página 42,

São dois objetos que na prática identificamos. É isto a essência da Geometria Analítica.

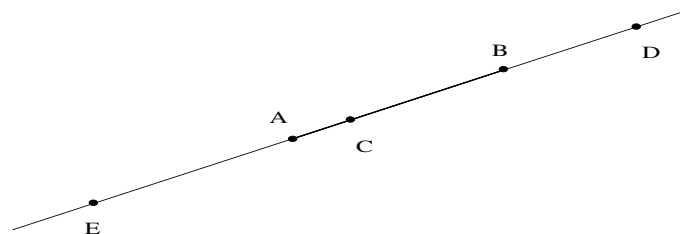


Figura 2.3: segmentos de reta na reta orientada

- dois pontos diferentes, A e B , determinam um segmento de reta,
- no segmento de reta \overline{AB} tem um ponto, C diferente dos extremos,
- e existe um ponto D que fica fora do segmento.
- Como a reta real é orientada, agora ela se chama de *reta numérica*, então o ponto que fica fora do segmento de reta, que agora chamamos de *intervalo*, pode ser maior do que B ou menor do que A , confira a figura (fig 2.3).

A propriedade arquimediana da reta

Para os números a propriedade adquire a redação “*entre dois números diferentes quaisquer, sempre tem outro entre eles, um terceiro que é maior dos que estes dois e um quarto que é menor do que eles todos*”.

Isto é consequência da escolha do 0 e do 1 criando uma *ordem na reta*.

Em símbolos ficaria assim, em que \mathbf{R} representa a reta numérica

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists c \in \mathbf{R})(a \leq c \leq b); \quad (2.2)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists d \in \mathbf{R})(a \leq b \leq d); \quad (2.3)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists e \in \mathbf{R})(e \leq a \leq b \leq e); \quad (2.4)$$

e posso iterar esta propriedade indefinidamente *porque a reta é infinita*, conseqüentemente o espaço é infinito.

Todas as propriedades da *reta geométrica* se aplicam a *reta numérica*, mas a *reta numérica* é uma reta especializada que tem mais propriedades do que a *reta geométrica* o que a transforma no conjunto dos números reais.

A *reta numérica* é o conjunto \mathbf{R} .

Vou agora considerar um par de *retas numéricas* concorrentes no zero como mostra a figura (fig 2.4), página 44. Posso agora “numerizar” o plano. Com três retas podemos numerizar o espaço $3D$ e assim por diante. A figura (fig 2.4) é uma representação do produto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ criando o *plano numérico*. Mas esta denominação não é usada, o *plano numerizado* é chamado de *o plano coordenado* em oposição ao uso que se tem de chamar a *reta numerizada* de *reta numérica*.

2.2 Álgebra linear

Qualquer livro de *Álgebra linear* tem 400 páginas então você vai encontrar aqui o resumo necessário para fazer a Geometria Analítica. Se trata duma *álgebra vetorial*, *álgebra linear*, porque seus elementos básicos são os *vetores* em oposição ao primeiro capítulo em que os objetos básicos foram os números. Mas os vetores, como os números, fazem parte duma estrutura algébrica, o *espaço vetorial* é a *estrutura algébrica* dos vetores.

Um espaço vetorial é uma *álgebra*, uma estrutura *mais fraca*, que tem menos propriedades, do que \mathbf{R} que é um corpo onde se pode resolver qualquer equação do primeiro grau e algumas do segundo grau...

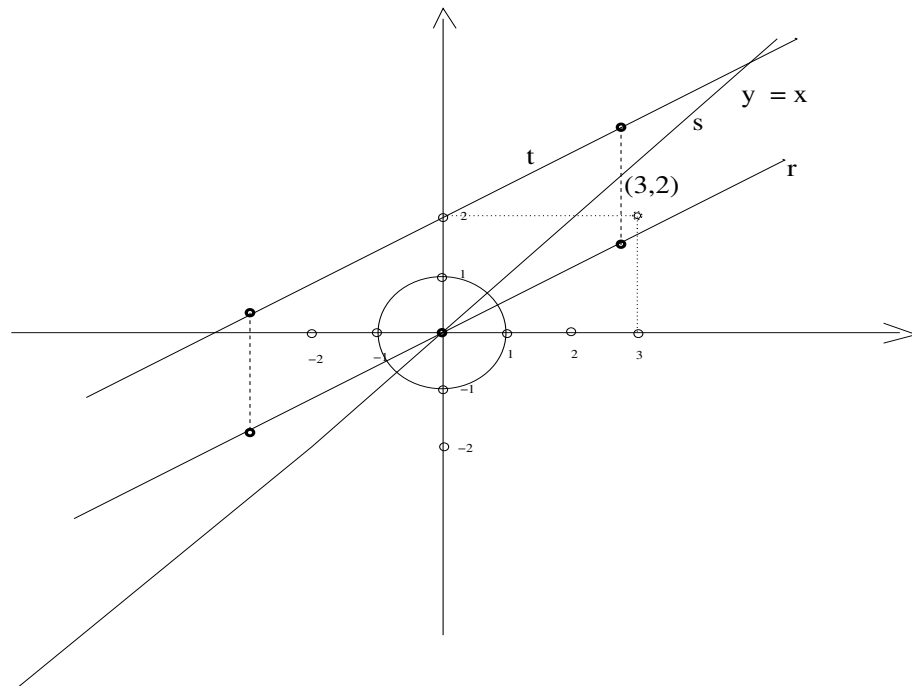


Figura 2.4: Sistema de coordenadas cartesianas

2.2.1 Exemplos de espaço vetorial

Deixe-me começar com alguns exemplos bem conhecidos para que você se sinta a vontade com a experiência que você já tem. Na verdade será esta a lógica da construção neste capítulo, eu vou apresentá-lhe conceitos alguns dos quais serão novos e então será mais fácil usar exemplos que apresentem os conceitos como se você estivesse aprendendo uma nova língua e os vocábulos estivessem lhe sendo apresentados com figuras, os exemplos, dentro de frases para que você adquira a lógica do uso dos novos conceitos. Espero que estar ajudando.

O plano complexo

No capítulo anterior eu lhe apresentei o conjunto dos números complexos como um conjunto numérico. Agora eu vou identificar cada número complexo com um vetor $u = x + iy$ e plano complexo é formado pelo *eixo real* e o *eixo imaginário* que são duas *direções independentes*:

$$u = x + iy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0; \quad (2.5)$$

Eu já identifique $i = \sqrt{-1}$ que não é um número real e é o que justifica a *independência* da equação anterior. Agora eu quero ver i como sendo o *vetor unitário* do *eixo imaginário* como 1 é o *vetor unitário* do *eixo real*. São as duas *direções independentes* do plano complexo.

Tudo que foi dito sobre os números complexos segue valendo agora para os números complexos como vetores, claro, os números complexos tem propriedades que os vetores não tem, eles são um caso particular de vetor.

Um aspecto importante dos números complexos, como vetores, é um subconjunto particular, o *círculo trigonométrico*, dos números complexos de módulo 1, S^1 . Todo número complexo tem uma *imagem*

sobre S^1 que pode ser obtida com o segmento de reta que liga o ponto $(x, y) = x + iy$ à origem, este segmento de reta corta S^1 determinando o ângulo de $x + iy$, que dizer que estou identificando os elementos de S^1 como ângulos.. A figura (fig 2.5), página 45 lhe mostra como posso determinar o *ângulo dum número complexo*, que agora se chama *argumento do número complexo*, com um segmento de reta ligando $u = a + ib$ à origem fica determinado um arco de S^1 que se origina no *elemento neutro* de S^1 que é 1, é o ângulo α na figura. O ângulo θ é o arco determinado por $v = c + di$. A sucessão de equações lhe mostra *duas formas equivalentes* do cálculo de $\langle u, v \rangle$

$$u, v \in S^1; u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (a, b); v = (\cos(\beta), \sin(\beta)) = (p, q); \tag{2.6}$$

$$u = (a, b) = \rho(\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \rho = \|u\|; \alpha = Arg(u); v = (p, q) = \sigma(\cos(\beta), \sin(\beta)); \sigma = \|v\|; \beta = Arg(v) \tag{2.7}$$

$$\langle u, v \rangle = ap + bq = \rho\sigma \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta); \tag{2.8}$$

$$\langle u, v \rangle = ap + bq = \|u\| \|v\| \cos(\gamma); \tag{2.9}$$

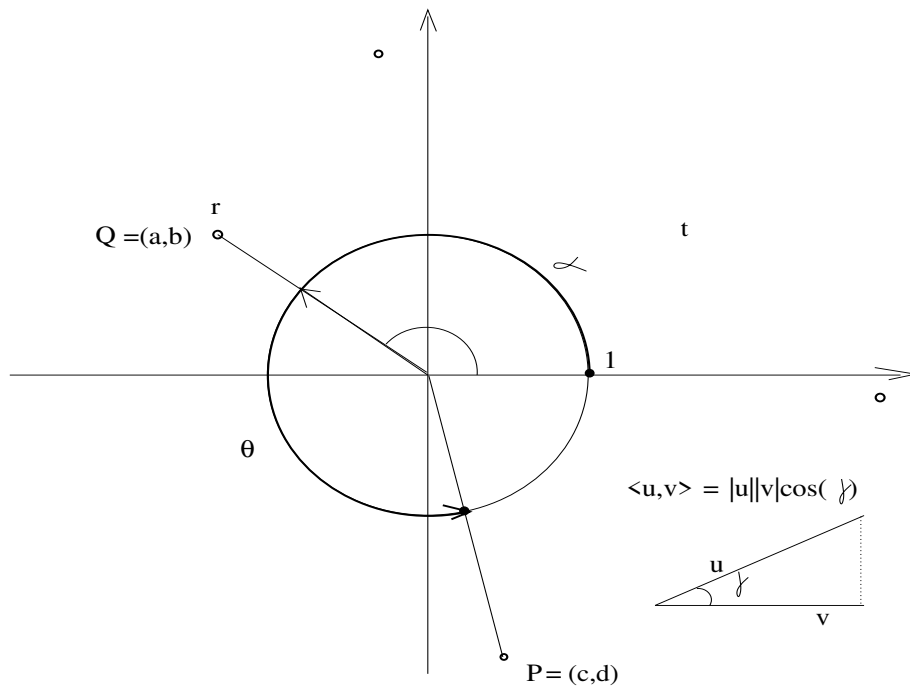


Figura 2.5: O círculo trigonométrico S^1

No primeiro capítulo eu lhe mostrei que, associado a qualquer número complexo existe um outro que é chamado de conjugado:

$$u = x + iy; \bar{u} = x - iy; u\bar{u} = x^2 + y^2; \frac{u}{u\bar{u}} \in S^1; \tag{2.10}$$

o que lhe mostra uma forma algébrica de obter a imagem de u em S^1 .

O R^2

O plano cartesiano, $R \times R = R^2$ é um *espaço vetorial*. Agora eu vou me referir aos seus elementos como

$$u = (x, y), v = (a, b), w = (p, q) \in R^2; \tag{2.11}$$

porque \mathbf{R}^2 é o produto cartesiano de \mathbf{R} por \mathbf{R} que agora eu estou chamando $u = (x, y)$ de vetor. E posso somar vetores,

$$u = (x, y) + v = (a, b) = (x + a, y + b) = v + u; \in \mathbf{R}^2; \quad (2.12)$$

a soma é comutativa porque é definida usando a soma dos números reais que são as *coordenadas*.

A soma também é *associativa* também como consequência de que eu somo as *coordenadas* dos vetores.

$$u + (v + w) = (u + v) + w; (x, y) + ((a, b) + (p, q)) = (x + a, y + b) + (p, q) \in \mathbf{R}^2; \quad (2.13)$$

e vale a *propriedade associativa*.

A soma tem um elemento neutro, o *vetor nulo* que é o vetor $o = (0, 0)$ que somado a qualquer vetor o reproduz.

E todo vetor tem um inverso aditivo,

$$u = (x, y) + v = (-x, -y) = 0 = (0, 0) \in \mathbf{R}^2; \quad (2.14)$$

Estas propriedades são as mesmas que a estrutura aditiva $(\mathbf{R}, +)$ que se chama de *grupo* portanto $(\mathbf{R}^2, +)$ é um grupo aditivo.

Além da soma existe o *produto por um escalar*

$$u = (x, y) \in \mathbf{R}^2; \alpha \in \mathbf{R} \text{ então } \alpha u = (\alpha x, \alpha y) \in \mathbf{R}^2; \quad (2.15)$$

Tudo que eu disser sobre \mathbf{R}^2 vale para \mathbf{C} como espaço vetorial sobre o corpo dos reais, os escalares.

Qualquer vetor pode ser multiplicado por um escalar produzindo um outro vetor. A Física do Ensino Médio fala que os vetores são *segmentos de reta orientados*, confira a figura (fig 2.6), página 46, que lhe

escalar que dizer
número em oposição à vetor.

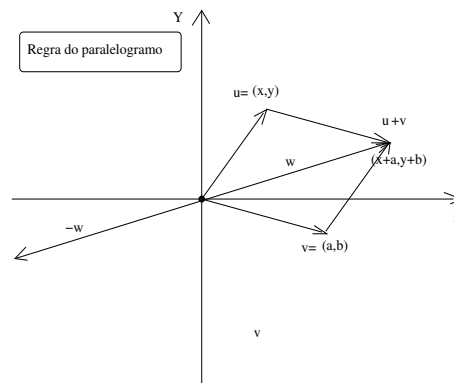


Figura 2.6: Regra do paralelogramo

mostra, geometricamente, a soma dos vetores u, v .

Não precisamos da *regra do paralelogramo* mas ela ajuda no estímulo visual e prova, geometricamente, a comutatividade porque o paralelogramo é simétrico em relação à diagonal que é o resultado da soma de vetores. Usando a *regra do paralelogramo* você pode construir uma complicada figura geométrica para provar a propriedade associativa da adição, entretanto, novamente, não precisamos da *regra do paralelogramo* porque a adição de vetores foi definida à base das coordenadas que são números reais.

Eu usei a figura (fig 2.6), página 46 para nela representar a multiplicação do vetor w pelo escalar -1 produzindo o *inverso aditivo* de w e você pode aplicar a *regra do paralelogramo* para verificar que a soma resulta no vetor nulo.

Ângulo e distância no \mathbf{R}^2

Vou começar a discutir estes dois conceitos, *ângulo* e *distância* no espaço de dimensão 2, um plano, e você vai ver que estes dois conceitos são restritos às variedades lineares de dimensão 2 ou 1, mesmo quando o problema for *espacial*, em dimensão maior.

Uma das razões pela qual *precisamos* de vetores é porque eles nos oferecem o conceito de ângulo. A outra razão, e logo vou lhe mostrar, é tão importante quanto *ângulo* é o cálculo da *distância entre objetos no espaço*. E o cálculo do *ângulo* está envolvido no cálculo da *distância*.

A forma como vou usar ângulo é associando dois vetores a dois objetos, por exemplo duas retas, para determinar o ângulo entre *os dois objetos*. Para isto vou precisar de saber calcular o ângulo entre dois vetores. Na verdade eu vou agora *redefinir* *ângulo* e depois vou mostrar que a nova definição é compatível com aquela que fiz no conjunto dos números complexos. Os vetores *tem um comprimento*, que é chamado de *módulo*, que vou usar para calcular a distância entre os objetos.

Ângulo é o *número* que mede o arco determinado no *transferidor* \mathbf{S}^1 por dois números complexos. Abandonando os *números complexos*, ângulo é o *número* que mede o arco determinado no *transferidor* \mathbf{S}^1 por dois vetores no plano.

Dados dois vetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ eu quero apresentar o número que diga qual é o ângulo entre os vetores u e v , e para isto vou criar uma operação que produz este número, acompanhe as contas sobre as quais farei comentários em seguida, entretanto as verifique com atenção porque elas contém muita informação.

$$u = (a, b), v = (c, d); (u, v) \mapsto ac + bd \in \mathbf{R}; \quad (2.16)$$

$$\langle u, v \rangle = ac + bd \in \mathbf{R}; \quad (2.17)$$

$$u \mapsto \|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \frac{u}{\|u\|} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbf{S}^1; \quad (2.18)$$

$$v \mapsto \|v\| = \sqrt{c^2 + d^2}; \frac{v}{\|v\|} = (\cos(\beta), \sin(\beta)) \in \mathbf{S}^1; \quad (2.19)$$

$$\langle (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) \rangle = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta); \quad (2.20)$$

$$\langle (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) \rangle = \cos(\alpha - \beta); \quad (2.21)$$

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} = \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos(\alpha - \beta) \quad (2.22)$$

A operação definida na equação (eq.17) se chama *produto escalar*, ou ainda *produto interno*, e eu prefiro o primeiro nome porque entendo que o segundo nome nada diz e então, neste livro, não vou voltar a usar esta denominação que é tradução literal do inglês onde também não vejo nenhuma significação para ela. O *produto escalar* de dois vetores produz um *escalar*, e é esta a razão do nome *produto escalar* para dois vetores.

Nas equações (eq.18) e (eq.19) eu defini *módulo* dos vetores u e v respectivamente.

Projetei os vetores no círculo trigonométrico, \mathbf{S}^1 , dividindo-os pelos respectivos módulos, e calculei o *produto escalar* de suas imagens resultando numa fórmula da trigonometria que me dá $\cos(\alpha - \beta)$. A última equação, (eq.22), apresenta uma forma equivalente de calcular o *produto escalar* associando os módulos dos vetores e o ângulo entre e assim mostro como posso, usando o *produto escalar*, calcular o $\cos(\alpha - \beta)$ e assim obter o ângulo $\alpha - \beta$ que é o ângulo entre os vetores $u = (a, b), v = (c, d)$

$$\text{acos}\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}\right) = \alpha - \beta; \quad (2.23)$$

é o ângulo entre os vetores $u = (a, b), v = (c, d)$, módulo 2π , porque *você pode entender* que os vetores tenham rodado diversas vezes em torno do seu ponto de contacto... portanto, a menos de 2π o ângulo entre $u = (a, b), v = (c, d)$ é dado pela equação (eq.23).

Se você confundir $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ com dois números complexos você vai encontrar o mesmo resultado como ângulo entre os dois números complexos. A diferença, a melhor para esta nova definição, é que *ela vale para vetores em qualquer dimensão*.

Nesta seção eu defini *ângulo entre dois vetores* e o módulo dum vetor. Como *ângulo* é um conceito do plano, dois vetores definem um plano em qualquer dimensão, então a definição de ângulo vai servir para quaisquer vetores em qualquer dimensão. O módulo é o comprimento da diagonal do paralelogramo usado para o cálculo geométrico da soma de dois vetores, novamente uma figura plana facilmente adaptada a qualquer dimensão. Eu já disse que *não precisamos da regra do paralelogramo* para somar vetores e estou fazendo uso dela apenas para lhe garantir que a soma de dois vetores é uma questão plana. . .

Deixe-me terminar este exemplo com uma fórmula simplificada para o cálculo do módulo do vetor u

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}; \quad (2.24)$$

que é útil com frequência.

E a distância entre dois pontos P, Q é o módulo do segmento de reta \overline{PQ} que eu posso entender como \vec{PQ} , um segmento orientado com origem P e ponto final Q . Então a diferença entre os vetores \vec{P}, \vec{Q} será um segmento orientado tendo como ponto inicial a origem e pode ser escrito com duas coordenadas para referenciá-lo, veja as contas

$$\vec{P} = u = (a, b); \vec{Q} = v = (m, n); \quad (2.25)$$

$$\overline{PQ} = \vec{PQ} = u - v = (a - m, b - n); \quad (2.26)$$

$$d(P, Q) = \|u - v\| = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}; \quad (2.27)$$

2.3 Variedades lineares

O conceito *variedade* foi introduzido para romper a prisão em que Geometria Euclidiana nos manteve por séculos. *Variedade* é um objeto geométrico, portanto uma reta é uma variedade, um círculo é uma variedade, um plano é uma variedade.

Há uma diferença entre círculo e reta: retas são *variedades lineares* e círculos são *variedades não lineares*. Eu vou adotar a forma como um professor de línguas dá aulas incrementando o vocabulário com exemplos. Então vou dar exemplos de *variedades* e aos poucos este conceito vai se tornar nativo no seu vocabulário matemático.

Como o objetivo da Geometria Analítica é algebrizar e numerizar os entes geométricos, então o próximo passo é encontrar a equação da reta. Mas reta é uma *variedade linear de dimensão 1*. Um novo conceito, *dimensão*! Também é mais fácil dar exemplos para que você adquira este novo conceito.

No primeiro capítulo descrevi *os números* terminando com dois tipos de números, os números reais que se identificaram com uma reta, uma variedade dimensão 1 e os números complexos que se identificaram com um *plano*, uma variedade dimensão 2. O “espaço”, como pensavam os gregos, é o

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad (2.28)$$

uma *variedade linear de dimensão 3*.

Então eu já lhe apresentei alguns exemplos e vou agora somar estas ideias em conjunto:

- Um ponto é *variedade de dimensão zero*, eu vou dizer que é uma *variedade linear de dimensão 0*, mas também pode ser uma *variedade não linear de dimensão 0*, funciona! E funciona porque um ponto pode ser visto como um círculo de raio zero.
- Uma reta é uma *variedade linear de dimensão 1*.

- Um círculo é uma *variedade não linear de dimensão 1*. As curvas são *variedades de dimensão 1*, se o raio não for nulo. . .
- Um plano é uma *variedade linear de dimensão 2*, porque num plano há uma infinidade de retas com distintos ângulos entre elas. Mas eu ainda preciso mostrar como vou calcular o ângulo entre retas. Neste momento estou usando a sua experiência e se eu lhe pedisse que traçasse num papel duas retas que tivessem entre si um ângulo reto, você saberia desenhar, portanto você sabe que existe ângulos entre retas que estejam no mesmo plano. É isto que caracteriza o plano como uma *variedade linear de dimensão 2*, nele há retas que têm ângulos diferentes de zero, entre elas.
- O “espaço”, \mathbf{R}^3 é uma *variedade linear de dimensão 3*, porque eu posso ter *retas reversas*, quer dizer, duas retas que não se encontram num mesmo plano e, conseqüentemente, eu posso ter planos distintos dentro do \mathbf{R}^3 então a dimensão do \mathbf{R}^3 tem que ser maior do que 2. Como seria um exemplo de $u \in \mathbf{R}^3$? Acho que você aceitaria que eu lhe disse que $u = (x, y, z)$ um objeto determinado por três coordenadas. Os elementos de \mathbf{R}^3 são desta forma, eu preciso de *três informações independentes* para determinar um elemento do \mathbf{R}^3 é o que caracteriza que \mathbf{R}^3 tem dimensão 3. Além disto ele contém retas e planos que seria uma forma de caracterizar \mathbf{R}^3 como uma variedade linear de dimensão 3.
- duas retas perpendiculares determinam um plano, e um plano é uma variedade linear de dimensão 2, dois planos perpendiculares determinam o “espaço”, \mathbf{R}^3 , que assim é uma variedade linear de dimensão 3. Quando eu souber escrever equações de retas e planos, eu vou poder calcular ângulos entre estas variedades.

Estes conceitos antigos, agora traduzidos como variedades, podem ser mais adiante concretizada, neste momento, sei, são afirmações ainda vagas produzidas pela via de exemplos.

Então vou apresentar as equações das variedades lineares.

2.4 Equação duma variedade linear de dimensão 1

Dado um vetor $u \in \mathbf{R}^2$, $u = (a, b)$ seus múltiplos geram triângulos semelhantes é o que você pode ver na figura (fig 2.7), página 49, e, conseqüentemente, se encontram sobre uma mesma reta. Para

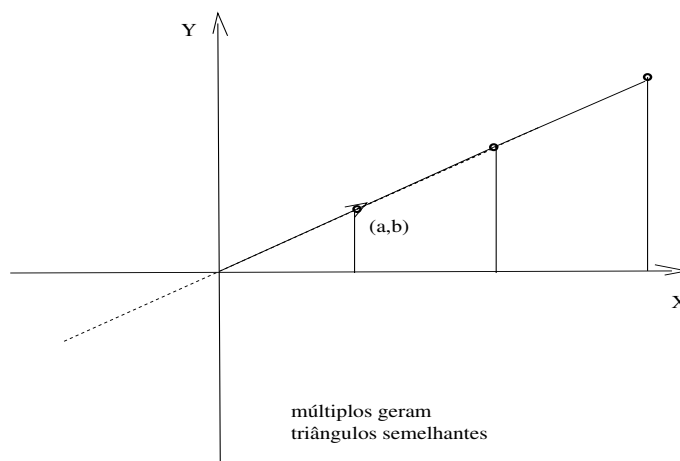


Figura 2.7: reta e proporcionalidade

Aqui entre o
coeficiente angular
de reta.

O autor está
errado, nós precisamos
do coeficiente angular...

demonstrá-lo, negue a afirmação: “eles não se encontram sobre a mesma reta”, então os catetos não são proporcionais, mas eles foram obtidos por multiplicação de constantes que produzem a mesma razão! Ou seja, não estarem sobre a mesma reta contradiz que eles sejam múltiplos portanto sendo múltiplos se encontram sobre uma mesma reta. Esta razão é o *coeficiente angular da reta* que contém estes vetores.

Vou falar do *coeficiente angular* de retas mas sou crítico a respeito: quando um módulo estiver navegando no espaço e precisar sair na direção duma reta, não vai haver *coeficiente angular* que seja útil... A figura (fig 2.8), página 50, lhe mostra como posso me livrar do *coeficiente angular* usando um vetor

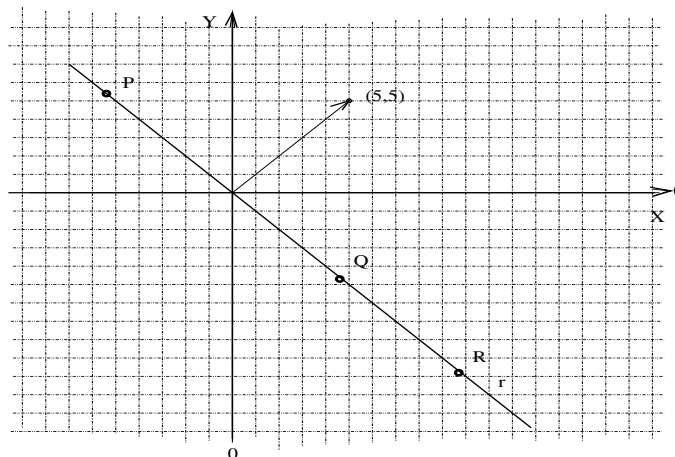


Figura 2.8: Vetor perpendicular a uma reta

perpendicular à reta que além do mais lhe oferece uma maneira simples de escrever a equação da reta

$$u = (A, B); u \perp r; \quad (2.29)$$

$$\text{equação da retar é } Ax + By + C = 0; \quad (2.30)$$

$$(p, q) \in r \Rightarrow Ap + Bq + C = 0 \Rightarrow C = -(Ap + Bq); \quad (2.31)$$

que lhe mostra como usando a direção do vetor \vec{u} mais um ponto $(p, q) \in r$ eu posso obter a equação cartesiana da reta r .

Na figura (fig 2.8), página 50, r passa na origem então

$$(p, q) = (0, 0) \in r \Rightarrow Ap + Bq + C = 0 \Rightarrow C = 0; \quad (2.32)$$

$$\text{equação da retar é } Ax + By = 0; \quad (2.33)$$

$$(0, 0) \in r \Rightarrow (A, B) \perp r \Rightarrow \text{equação da retar } Ax + By = 0; \quad (2.34)$$

O *produto escalar* vai me dá uma saída para evitar o *coeficiente angular*.

Uma variedade linear de dimensão 1, que passe na origem, é o lugar geométrico dos pontos do espaço que contém vetores com coordenadas proporcionais.

Esta propriedade vai me permitir de encontrar a equação duma *variedade linear de dimensão 1* que passe na origem. Qualquer ponto (x, y) sobre esta variedade é da forma $(\lambda a, \lambda b)$

$$x = \lambda a; y = \lambda b; \frac{y}{x} = \lambda; y = \lambda x; \quad (2.35)$$

esta fórmula não vale para retas que sejam perpendiculares ao eixo OX , criando uma exceção. Então eu vou encontrar uma outra forma de criar equações para *variedades lineares de dimensão 1* que passem na origem. λ é o *coeficiente angular* desta reta.

O *produto escalar* vai me dá uma saída para evitar o *coeficiente angular*, e eu insisto que a Geometria Analítica serve para muitas aplicações, com auxílio do Cálculo e das Equações Diferenciais, para escrever programas que gerenciem o tráfego dos módulos espaciais.

Mostrei como com o vetor $u = (A, B)$ podia estabelecer a condição para determinar o conjunto dos pontos do plano que sejam perpendiculares a u . Geometricamente é uma reta, certo? Quem o garante é a Geometria Euclidiana. Tome um ponto (x, y) genérico em cima desta reta e exigindo que ela passe na origem, então

$$\langle (x, y), (A, B) \rangle = 0 \quad (2.36)$$

porque dois vetores perpendiculares determinam o ângulo $\frac{\pi}{2}$ cujo cosseno é zero. Então

$$\langle (x, y), (A, B) \rangle = 0 \Rightarrow Ax + By = 0; \quad (2.37)$$

é a equação duma reta que seja perpendicular ao vetor $u = (A, B)$ e que passe na origem.

Agora não interessa qual é a *inclinação* de $u = (A, B)$, qualquer que seja $u = (A, B)$, a equação dum reta que lhe seja perpendicular e que passe na origem é $Ax + By = 0$. Você pode desenhar diversos exemplos e calcular equações de retas passando na origem perpendiculares a um dado vetor $u = (A, B)$.

Deixe-me fazer uma modificação na equação $Ax + By = 0$ para lhe mostrar a maneira prática de determinar a equação $Ax + By + C = 0$ duma reta que não passa na origem.

$$Ax + By + C = 0; C \neq 0; Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-(Ax + C)}{B}; \quad (2.38)$$

e eu obtive a equação duma variedade linear deslocada de $-\frac{C}{B}$ se $B \neq 0$. Se $B = 0$ posso repetir as contas dividindo agora por A . E uma das duas constantes, A ou B tem que ser diferente de zero do contrário este exemplo se trivializa, tudo é zero!

Defina agora a função do primeiro grau

$$B \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-(Ax + C)}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; B \neq 0; \Rightarrow f(0) = -\frac{C}{B}; \quad (2.39)$$

e a equação $Ax + By + C = 0$ é a equação duma reta perpendicular ao vetor $u = (A, B)$ que passa no ponto $(0, -\frac{C}{B})$. É também o gráfico da função $f(x) = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ e o número $-\frac{A}{B}$ é o coeficiente angular desta reta e depois no Cálculo você vai aprender que é a *derivada constante duma função do primeiro grau*. Se $B = 0$ refaça as contas dividindo por A e não tem sentido que sejam ambos, A, B nulos. O número $-\frac{C}{B}$ é chamado de coeficiente linear desta reta e estou fazendo este registro porque ainda estes dois “coeficientes” são muito usados na literatura e sobre tudo em questões de concursos. . .

Se uma reta, uma variedade linear de dimensão 1, não passar na origem sua equação é da forma $Ax + By + C = 0$ com $C \neq 0$. Em geral a afirmação que se faz é

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.40)$$

é a equação duma variedade linear de dimensão 1 que não passa na origem se $C \neq 0$, por uma questão de beleza no formato da equação e a Matemática é a ciência do belo. Mas, ela continua sendo perpendicular ao vetor $u = (A, B)$. Esta é a razão que esta formulação para encontrar a equação duma reta é mais eficiente, e é ela vai servir quando você estiver programando a viagem dum módulo espacial.

2.5 Distância entre objetos

Vou começar com o caso mais simples e depois vou fazer um comentário mostrando como este caso mais simples facilmente se generaliza para os casos mais complicados. Vou calcular a distância dum ponto a uma variedade linear de dimensão 1, o caso mais simples.

Neste livro vou ignorar que existem Geometrias não euclidianas. . . mas elas existem, a geometria da Terra não é euclidiana!

E, no espaço, será assim que um pr irá encontrar a equação da reta que sar.

2.5.1 Distância dum ponto a uma reta

Vou mostrar-lhe um *algoritmo* sob forma de equação matemática que depois vou traduzir para um *algoritmo computacional*, quer dizer, um programa escrito numa linguagem de programação, para calcular a *distância dum ponto a uma reta*.

A distância do ponto $P = (a, b)$ a reta r é obtida fazendo-se a projeção de P ao longo da reta s perpendicular à reta r , e seja Q esta projeção, $Q \in s$. A distância de P à reta r é a medida do segmento PQ .

O método vetorial para estabelecer a equação da reta torna imediato a passagem da equação da reta r para a equação da reta s , $s \perp r$, porque na equação da reta aparece o vetor (A, B) que lhe é perpendicular logo na equação da reta s , $s \perp r$ vão aparecer as coordenadas do vetor $(A, -B) \perp (A, B)$. E não importa qual seja a posição da reta e também não preciso fazer uso do *coeficiente angular*...

Confira como exemplo a figura (fig 2.9) em que aparecem as retas $3x + 4y - 1 = 0$, o ponto $P=(a,b)$ cuja distância à reta r vai ser calculada.

A primeira das figuras mostra a projeção Q , do ponto $P = (10, 10)$, ao paralelamente ao vetor $(3, 4)$ que é perpendicular à r . O ponto $P = (10, 10)$ determina a reta s , $s \perp r$ que vai encontrar a reta r no ponto Q e a *medida do segmento* PQ que é a distância de P à reta r .

As figuras (fig 2.9), página 52, lhe mostram exemplos em que a reta r e a reta s são modificadas

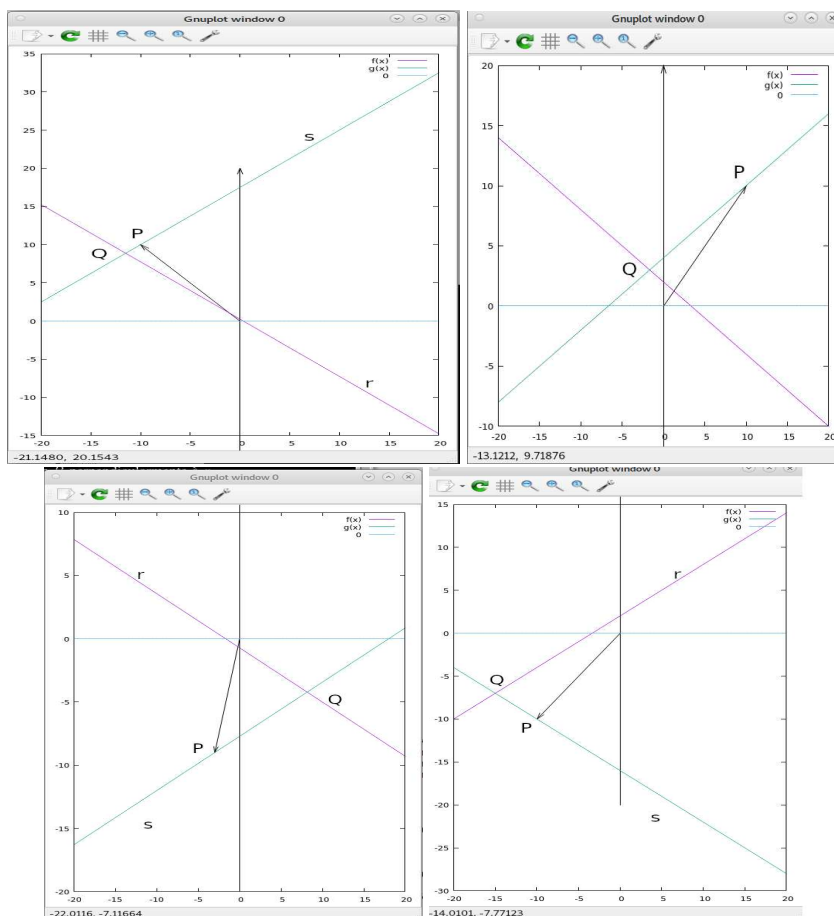


Figura 2.9: distância $d(P, r)$

sempre com a reta s passando por P perpendicularmente à r e determinando a projeção $Q \in s$ do ponto P .

Os cálculos para obter a distância do ponto $P = (-10, 10)$ a reta $r, 3x + 4y - 1 = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0; \\ 3x - 4y + C = 0 \perp r; \end{cases} ; \quad (2.41)$$

$$\text{selecionar a perpendicular que passe por } P = (-10, 10); \quad (2.42)$$

$$P = (-10, 10) \in s \perp r \Rightarrow C = 4b - 3a; \Rightarrow C = 40 + 30 = 70; \quad (2.43)$$

$$\text{resolvendo o sistema para encontrar o ponto } Q; \quad (2.44)$$

$$6x + C - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{C-1}{6} = -\frac{69}{6} = -11.5; \quad (2.45)$$

$$3x + 4y - 1 = 0; \Rightarrow -\frac{C-1}{2} + 4y - 1 = 0 \Rightarrow y = 8.875; \quad (2.46)$$

$$Q = (-11.5, 8.875) \in (\perp r); \quad (2.47)$$

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(-11.5 + 10)^2 + (8.875 - 10)^2}; \quad (2.48)$$

$$d(P, r) = 1.875; \quad (2.49)$$

Para testar, eu fiz as contas usando a linguagem de programação `calc` e mostro mais abaixo um programa que executa toda esta tarefa, dada uma reta r e um ponto P . Mas para construir o programa eu primeiro descrevi o problema em forma abstrata, transformando o exemplo num algoritmo para calcular a distância de um ponto P qualquer a uma reta r cuja equação seja

$$Ax + By + D = 0 \text{ a reta dada, } r; \quad (2.50)$$

$$P = (a, b) \text{ ponto cuja distância à reta } t \text{ quero calcular}; \quad (2.51)$$

$$Ax - By + C = 0 \text{ reta } s \perp r; Q \in s \cap r; P \in s; \quad (2.52)$$

$$Aa - Bb + C = 0 \Rightarrow C = -(Aa - Bb); \quad (2.53)$$

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0; \\ Ax - By + C = 0 \perp r; \end{cases} ; \quad (2.54)$$

$$2Ax + D + C = 0 \Rightarrow 2Ax = -(D + C) \Rightarrow x = -\frac{D+C}{2A}; \quad (2.55)$$

$$-By = -(Ax + C) \Rightarrow By = Ax + C \Rightarrow y = \frac{Ax+C}{B} =; \quad (2.56)$$

$$Q = (x, y); Q \in r \cap s; \quad (2.57)$$

$$d(P, Q) \text{ é a distância do ponto } P \text{ à reta } r; \quad (2.58)$$

Testando o algoritmo com os dados do exemplo anterior:

$$x = -\frac{C+D}{2A} = -11.5; \quad (2.59)$$

$$y = -\frac{Ax+C}{B} = -8.875; \quad (2.60)$$

$$Q = \left(-\frac{C+D}{2A}, -\frac{Ax+C}{B}\right) = \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

Transformei esta lista de equações (eq. 2.5.50) (eq. 2.5.58) no programa escrito em `calc`:

```
## emite uma mensagem e aguarda o enter.
define apeteco() {print "enter para continuar";
    local teste = 0; system('read teste');
}
```

```

## calcula distância entre dois ponto em dimensão 2
define distancia(P,Q) { ## recebe duas listas: dois pontos
    local y = power(pop(P)-pop(Q),2); ## calcula (p1-q1)^2
    y = y + power(pop(P)-pop(Q),2); ## soma com (p2-q2)^2
    y = sqrt(y); ## calcula a raiz quadrada
    return(y); ## devolve a distância entre P,Q
}
## gerencia o programa, chame Main()
define Main() {
    print "dados do P e da reta r cuja distância de P quero calcular";
    print "r = Ax + By + D = 0, forneça A,B,D"; print "\n";
    local A =0, B = 0, D = 0, C=0, a=0, b=0,x=0,y=0,P=list(a,b),Q=list(a,b)
    print "O valor de A"; scanf("%f", A); print 'A = ', A; print "\n";##A
    print "O valor de B"; scanf("%f", B); print 'B = ', B; print "\n";##B
    print "O valor de D"; scanf("%f", D); print 'D = ', D; print "\n";##D
    print "Coordenadas de P=(a,b) cuja distância à reta r deseja ";
    apeteco();
    print "O valor de a"; print "\n";scanf("%f", a);print 'a = ',a;##a
    print "O valor de b"; print "\n";scanf("%f", b);print 'b = ',b;##b
    print "s \perp r; s = Ax - By + C = 0, cálculo de C \n";
    ### A*a -B*b + C = 0 ==> C =B*b-A*a;
    C = B*b-A*a; printf("%s%f\n","O valor de C = ", C); ##C
    apeteco();
    print 'Resolvendo o sistema para encontrar o ponto Q';
    printf("s reta perpendicular à r é %fx - %fy + %f = 0",A,B, C);
    apeteco();
    print "resolvendo o sistema para encontrar Q in s \n";
    x = -(D+C)/(2*A);
    ## 2By + D - C = 0 \rimp y = -( D - C)/(2*B)
    y = -( D - C)/(2*B);
    print "O ponto Q na reta perpendicular passando por P é "
    printf("Q = (%f,%f)",x,y); Q = list(x,y);
    ## apeteco(); Testes usados com gnuplot
    ## print 'teste com as equações do primeiro grau com função'
    ## print 'f(x) = (Ax + D)/B';
    ## define f(x) {return (A*x + D)/B;};
    ## print y, f(x), 'devem ser dois valores iguais';
    ## apeteco();
    ## print 'g(x) = -(Ax + C)/B';
    ## define g(x) {return -(A*x + C)/B;};
    ## print y, g(x), 'devem ser dois valores iguais';
    ## system('read teste'); print "enter para continuar";
    print "calculando a distância d(P,Q) que é a distância de P a r"
    apeteco();
    Q = list(x,y);## a solução do sistema, r \CUP s
    P = list(a,b); ## o ponto cuja distância a r quero calcular
    print 'distância de P = (' ,a,',',b,')', ' a reta r é ', distancia(P,Q)
    apeteco();
}

```


Main() ## depois de lido o programa basta chamar Main()

Eu costumo escrever programas usando o estilo da linguagem C que consiste de algumas funções que serão chamadas por uma *função principal*, Main(), que funciona como um script, chamando as funções do programa com a lógica adequada.

Como um script
duma peça teatral...

No programa deixei sob comentário os comandos usados pelo gnuplot entretanto o arquivo DistanciaPontoReta. contém os dados para obter o gráfico com gnuplot, os dados devem ser atualizados a partir de um teste feito com DistanciaPontoReta.calc.

Experimentando o programa com

$$3x + 7y + 5 = 0; x = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{7} \approx 0.714285; P = (-3, -3); \quad (2.63)$$

Para usar este programa em calc, leia o programa depois de abri-lo um terminal do calc com o comando

read 'DistanciaPontoReta.calc' se o programa estiver gravado no arquivo com este nome, caso contrário use o nome que você tiver usado. Este comando também roda o programa dentro calc.

Forneça os dados como solicitado e o programa vai calcular o terceiro coeficiente da equação da reta s de modo que seja encontrada $Q \in r \cap s$. A reta s é perpendicular à reta r e foi determinada pelo ponto P portanto a interseção, Q , é o ponto que determina o segmento PQ perpendicular à r cujo comprimento é $d(P, r)$.

O programa DistanciaPontoReta.calc vai

- encontrar o ponto Q sobre a reta s perpendicular à reta r que passa em $P = (a, b)$.
- Calcular a distância $d(P, Q) = d(P, r)$;

Vou traduzir DistanciaPontoReta.calc para python3 porque é mais fácil encontrar python3 já instalado em caixinhas rodando Debian/gnu/linux ou outras distribuições gnu/linux.

Para visualizar, use DistanciaPontoReta.gnuplot, mas primeiro rode DistanciaPontoReta.calc para determinar a reta $s \perp r$ passando pelo ponto P . Ou rode primeiro DistanciaPontoReta.py.

Este é o arquivo DistanciaPontoReta.gnuplot.

```
## rode primeiro DistanciaPontoReta.calc com A,B,D,a,b;
## DistanciaPontoReta.calc vai calcular C, lance o valor abaixo.
## ou rode primeiro DistanciaPontoReta.py com A,B,D,a,b;
## DistanciaPontoReta.py vai calcular C, lance o valor abaixo.
A = 3; B = 4; D = -1;a=-10;b=10; C=70; ## lance aqui C
f(x) = -1.0*(A*x + D)/B ## transformando equação da reta em função
g(x) = 1.0*(A*x + C)/B ## transformando equação da reta em função
set pointsize 0.1
unset arrow; ## para limpar os vetores da memória do gnuplot
set xrange [-10:10]; set xrange [-20:20]; ## janela gráfica
set arrow from 0, -20 to 0, 20 head; ## eixo OY
set arrow from 0,0 to a,b head; ## vetor OP
plot f(x), g(x), 0 ## faz o gráfico
pause -2 'Aperte enter para continuar' ## mantém o gráfico visível.
```

2.6 Equação do plano

Um plano é uma *variedade linear de dimensão 2*, e não tem *coeficiente angular* porque num plano há uma infinidade de retas, cada uma com o seu *coeficiente angular* o que rouba este conceito do plano.

Excelente, agora eu posso começar exatamente do ponto final quando descrevi a equação duma *variedade linear de dimensão 1*, um plano é perpendicular a um dado vetor. Melhor, dado um vetor você pode se perguntar qual é a equação do plano que lhe é perpendicular. Da mesma forma como eu lhe mostrei o que acontece com as retas, há muitos planos que são perpendiculares ao vetor $u = (A, B, C)$, mas vou logo encontrar o caso mais simples, como fiz com a reta.

Há um hábito de dar nome aos planos letras gregas... Vou me submeter ao costume.

Vou considerar um plano π que passe na origem, ele é um subconjunto dos pontos (x, y, z) do “espaço” e eu vou exigir que sejam os pontos que formem um conjunto perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$ então

$$\langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0; \quad Q = (p, q, r) \in \pi \Rightarrow A(x - p) + B(y - q) + C(z - r) = 0$$

é a equação do plano que passa na origem e é perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$, e (eq. 2.65) é a equação do plano π registrando que o ponto $Q = (p, q, r)$ pertence ao plano π .

Da mesma forma como eu fiz com a reta, se eu somar uma constante D a esta equação, eu estarei deslocando o plano, portanto vou obter a equação de outro plano que é paralelo ao primitivo e portanto ainda perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$ e sua equação será

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.65)$$

e da mesma forma como eu fiz com a reta, eu posso definir uma função linear de duas variáveis a partir da equação (eq. 2.65), sempre supondo alguma das constantes A, B, C é diferente de zero, e vou escolher $A \neq 0$, tenho

$$f(x, y) = -\frac{By + Cz + D}{A} = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}; \quad (2.66)$$

E eu desprezei o *coeficiente angular* e agora me vejo forçado a reconsiderar a situação. No Cálculo você vai descobrir que o *coeficiente angular* é a derivada das funções lineares que são aquelas cujos gráficos são *variedades lineares*. E no caso das funções multivariadas, há vários coeficientes angulares que são as *derivadas parciais*. Mas você vai encontrar esta questão quando estiver estudando Cálculo. No espaço não existem *coeficientes angulares* e sim vetores perpendiculares às *variedades lineares*.

Também, o que é uma variedade linear depende em que dimensão você estiver trabalhando

$$2x - 7y + 5 = 0 \text{ é perpendicular ao vetor } (2, -7, 0, 0); \quad (2.67)$$

se você interpretar como uma variedade do \mathbf{R}^4 , então uma *variedade linear* de dimensão 3 porque você “se encontra num espaço de dimensão 4. Uma tal *variedade linear* se chama de *hiperplano* significando que ela é a *variedade linear* de dimensão máximo dentro do espaço em questão,

- Um ponto é um *hiperplano* duma reta, uma *variedade linear* de dimensão 1,
- Uma reta é um *hiperplano* dum plano, uma *variedade linear* de dimensão 2,
- Uma plano é um *hiperplano* dum “espaço”, uma *variedade linear* de dimensão 3,
- O “espaço” da Geometria Euclidiana é um *hiperplano* dum espaço de dimensão 4.

E cabe-lhe o direito de perguntar se não há aqui uma confusão proposital. Não há, precisamos com frequência de fazer referência à *variedade linear* de dimensão máxima dum determinado espaço e é então cômodo se referir a uma tal variedade como um *hiperplano* do espaço. É uma forma mais resumida de dizer “a variedade linear de dimensão máxima do espaço” em questão. Muito útil quando se trabalha com espaços de dimensão infinita quando é impossível subtrair uma unidade à dimensão. . .

Dados dois números reais x, y , a expressão (x, y) representa um ponto do espaço \mathbf{R}^2 , que é um plano ou uma *variedade linear de dimensão 2*, ou (x, y, z) , para três números reais dados, representa um ponto do espaço \mathbf{R}^3 , um espaço tridimensional, uma *variedade linear de dimensão 3*,

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_k \in \mathbf{R}; \quad P \in \mathbf{R}^n \text{ uma variedade linear de dimensão } n; \quad (2.68)$$

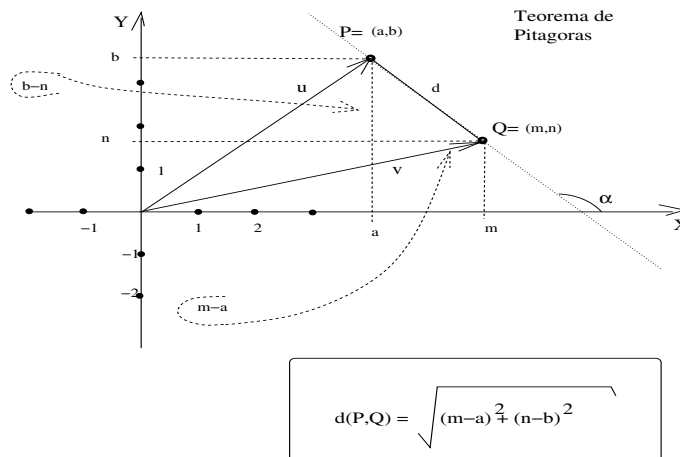


Figura 2.10: Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras

Dados dois pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P = (a, b)$ e $Q = (m, n)$, confira a figura (fig 2.10), página 57, posso calcular a distância entre eles usando o teorema de Pitágoras,

$$d(P, Q) = \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}; \quad (2.69)$$

O módulo das diferenças que aparecem na equação (eq. 69) medem o comprimento dos lados do triângulo retângulo que o segmento \overline{PQ} determina com retas paralelas aos eixos coordenados.

Os pontos P, Q também determinam dois vetores, u, v , do plano e o segmento de reta mede a diferença $u - v$ ou $v - u$. Como a diferença entre dois vetores é um vetor, eu posso calcular o módulo do vetor $u - v$ para obter a distância entre os pontos P, Q usando o produto escalar

$$u - v = (a - m, b - n); v - u = (m - a, n - b); \quad (2.70)$$

$$\|u - v\| = \|v - u\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} = d(P, Q); \quad (2.71)$$

e o resultado é o mesmo.

As propriedades da distância são

1. reflexividade $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
2. simetria $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. desigualdade triangular $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ a soma de dois lados é maior, ou igual, ao terceiro lado.

Qualquer função de duas variáveis que tenha estas propriedades define uma distância num conjunto M e é quando se diz que (M, d) é um espaço métrico. Esta frase sugere que há distintos meios de definir distância, o que é verdade. É a mesma coisa que dizer que existem diversas geometrias e vou logo lhe dar um exemplo bem simples de que esta diversidade é necessária.

Como todas as diversidades...

A companhia de energia elétrica, que não precisaria ser privada vai cabear o ponto de energia dum poste até sua casa. Para evitar que fiquem fios elétricos no ar, ela poderia conduzir os fios por dentro do poste até uma caixa no chão e desta para outra caixa também no chão para o outro lado da rua para finalmente chegar em sua casa onde deveria haver no chão a uma caixa de conexão onde os fios seriam conectados à sua casa. Tudo isto com segurança e beleza, sem fios espalhados pelo ar. A distância calculada não seria a "euclidiana" e sim a soma dos segmentos de linha reta usados para fazer este serviço. Esta distância é chamada *distância* l_1 .

A distância l_2 , é a distância euclidiana, definida na equação (eq. 69), que seria inútil para calcular a distância do ponto de energia elétrica até sua casa. O 2 se refere ao índice da raiz quadrada.

A distância é uma *propriedade bidimensional* porque envolve em suas propriedades no máximo três elementos do espaço que determinam um plano deste espaço, o que facilita muito nas demonstrações das propriedades mais gerais da distância. Para o \mathbf{R}^n a fórmula na equação (eq. 69) fica

$$\begin{cases} d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}; \\ P = (p_1, \dots, p_n); Q = (q_1, \dots, q_n); \end{cases} \quad (2.72)$$

2.6.1 distância do ponto $P = (a, b, c)$ ao plano π

Ao mostrar-lhe como calcular a distância dum ponto a uma reta eu lhe falei que seria o caso mais simples e que sua generalização seriam casos mais complexos. Vou lhe falar dum exemplo que fica fora do *escopo da Geometria Analítica* porque precisa das técnicas do Cálculo, aliás, eu já venho fazendo isto com frequência porque o objetivo da Geometria Analítica, hoje, é de uma preparação para o Cálculo e portanto criar motivação para o estudo do Cálculo está dentro do objetivo deste livro. E tenho usado exemplos de viagens espaciais, assunto bem “*momentoso*”, nas também passo-lhe a advertência de que Geometria Analítica é “*deficiente*” para resolver estes problemas.

Um módulo espacial destinado a fotografar a superfície dum planeta distante, tem que calcular a sua distância ao planeta para decidir se já se encontra dentro das condições dos seus aparelhos óticos para obter uma imagem de boa resolução. O módulo espacial é *um ponto* no Universo e sua distância a um planeta, que é relativamente grande, tem ser calculado relativamente a uma *variedade linear de dimensão dois* tangente ao planeta. É o Cálculo que vai lhe dar as técnicas para encontrar *variedades lineares tangentes*, retas tangentes, planos tangentes. Então neste momento eu vou lhe mostrar como calcular a distância dum ponto a um plano, e será no Cálculo que você vai aprender a encontrar planos tangentes e agora você sabe porque é preciso saber encontrá-los.

A distância dum ponto P a um plano depende da reta r perpendicular ao plano passando por P , tenho que procurar uma reta perpendicular ao plano *determinada* pelo ponto P . A geometria do Universo não é a euclidiana, é a *teoria da relatividade* que nos diz isto, mas para “pequenas distâncias”, como esta dum *módulo espacial* a um planeta, apenas alguns milhões de quilômetros, a *geometria euclidiana* funciona, como também funcionam as leis de Newton, embora um módulo em órbita dum planeta *se encontra em queda livre* e muita coisa já se explica com com *teoria da relatividade* como a ausência de peso dos astronautas. . . Mas, deixe-me voltar para Geometria Analítica e ficar na geometria euclidiana.

Tenho um plano, π , no espaço $\pi \in \mathbf{R}^3$, uma variedade linear de dimensão 2, e um ponto P cuja distância ao plano π eu quero calcular. Preciso duma reta que passe por P encontrando o plano π perpendicularmente no ponto Q e a distância de P ao plano π é $d(P, Q)$.

Vou repetir o parágrafo anterior colocando como uma *aplicação ao cálculo da distância dum módulo espacial a um planeta*. O módulo espacial é o ponto P e a distância de P ao planeta é obtida usando um plano tangente ao planete, e isto é coisa que vou vai entender melhor no Cálculo, mas estou lhe mostrando uma aplicação futura desta questão. É aqui que preciso da equação da reta s , no espaço, passando por P cuja interseção com o plano π , perpendicularmente, é o ponto Q e a distância de P ao objeto é $d(P, Q)$.

Portanto $s \parallel (A, B, C)$ que é o vetor perpendicular ao plano como foi visto na determinação da equação dum plano ou duma reta.

Deixe-me colocar os dados numa sequência de equações a partir das quais posso escrever o algoritmo computacional.

$$P = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3; \quad (2.73)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ o plano } \pi; (A, B, C) \perp \pi; \quad (2.74)$$

$$P \in s \perp \pi \Rightarrow s \parallel (A, B, C); \quad (2.75)$$

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x - a, y - b, z - c) = \lambda(A, B, C)\}; \quad (2.76)$$

$$Q = (m, n, q) \in s \Rightarrow (m - a, n - b, q - c) = \lambda(A, B, C); \quad (2.77)$$

$$\begin{cases} m - a = \lambda A \Rightarrow m = \lambda A + a; \\ n - b = \lambda B \Rightarrow n = \lambda B + b; \\ q - c = \lambda C \Rightarrow q = \lambda C + c; \\ Am + Bn + Cq + D = 0; \\ A(\lambda A + a) + B(\lambda B + b) + C(\lambda C + c) + D = 0; \\ A^2 \lambda A + Aa + B^2 \lambda B + Bb + C^2 \lambda C + Cc = -D; \\ (A^2 + B^2 + C^2)\lambda = -(D + Aa + Bb + Cc); \\ \lambda = -\frac{D + Aa + Bb + Cc}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{D + Aa + Bb + Cc}{\|(A, B, C)\|^2}; \end{cases} \quad (2.78)$$

$$Q = (m, n, q) = (\lambda A + a, \lambda B + b, \lambda C + c); \quad (2.79)$$

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2}; \quad (2.80)$$

$$d(P, \pi) = \|\lambda\| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \|\lambda\| \|(A, B, C)\|; \quad (2.81)$$

E a Geometria Analítica informa aos programadores do módulo espacial qual é a melhor posição para obter imagens do planeta, aguarde o Cálculo para saber o significado de $\|(A, B, C)\| \dots$

2.7 Produto vetorial

Vou apresentar-lhe o *produto vetorial* que ainda é chamado de *produto externo* porque dados dois vetores u, v o produto $u \times v \perp v$, é um vetor que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores u, v , e assim tem sentido chamá-lo de *produto externo*.

$$u \times v \perp v; u \times v \perp u; \quad (2.82)$$

é um vetor que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores u, v , e assim tem sentido chamá-lo de *produto externo*.

Da mesma forma como o *produto escalar* há duas formas equivalentes de definir $u \times v$. Eu vou colar as duas formas na próxima definição e em seguida vou mostrar que elas produzem o mesmo resultado.

Definição 11 (Produto Vetorial) *Produto Vetorial Dados dois vetores $\vec{u} = ((u_1, u_2, u_3)), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ o determinante formal*

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (2.83)$$

O *determinante formal*, porque não se trata dum “determinante” mas funciona como se fosse um “determinante”, estabelece como calcular os coeficientes de cada um dos vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ em $u \times v$.

Ao mesmo tempo as propriedades do *determinante* se transferem para para $u \times v$ que é *anticomutativo*, trocando a ordem de duas linhas dum determinante se lhe troca o sinal então

$$u \times v = -v \times u; u \times u = 0; \quad (2.84)$$

Vou aplicar a definição a dois vetores do círculo unitário \mathbf{S}^1 e como consequência vou obter uma outra caracterização do *produto vetorial*.

O *produto vetorial* é geométrico por natureza, não sei qual é a sua origem histórica, mas certamente, como muitas fórmulas da Matemática, ele deve ter surgido na Física e traduz efeitos físicos como por exemplos os efeitos eletromagnéticos ou da eletricidade. Depois a Matemática se apossou da definição que aparece mais a frente incorporada ao produto tensorial que é um tipo de *produto multilinear alternado*. É a razão pela qual estou colocando uma coordenada nula nos vetores \vec{u}, \vec{v} para caracterizar que são dois vetores do \mathbf{R}^3 , necessário para escrever corretamente o *determinante*.

$$\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0); \vec{v} = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0); \quad (2.85)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = \quad (2.86)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix}; \quad (2.87)$$

$$u \times v = \vec{k} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix} = \vec{k} (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\beta) \sin(\alpha)); \quad (2.88)$$

$$\vec{k} \sin(\beta - \alpha); \quad (2.89)$$

$$|u \times v| = |u||v| \sin(\beta - \alpha); \quad (2.90)$$

A última equação é verdadeira sob a condição de que $u, v \in \mathbf{S}^1$ mas posso agora refazer as contas com $u, v \in \mathbf{R}^2$ escritos na *forma polar* que é a recuperação de dois vetores quaisquer, do plano, a partir de sua projeção no círculo trigonométrico então

$$\vec{u} = |u|(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0); \vec{v} = |v|(\cos(\beta), \sin(\beta), 0); \quad (2.91)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |u| \cos(\alpha) & |u| \sin(\alpha) & 0 \\ |v| \cos(\beta) & |v| \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = \quad (2.92)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} |u| \sin(\alpha) & 0 \\ |v| \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} |u| \cos(\alpha) & 0 \\ |v| \cos(\beta) & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} |u| \cos(\alpha) & |u| \sin(\alpha) \\ |v| \cos(\beta) & |v| \sin(\beta) \end{vmatrix}; \quad (2.93)$$

$$u \times v = \vec{k} \begin{vmatrix} |u| \cos(\alpha) & |u| \sin(\alpha) \\ |v| \cos(\beta) & |v| \sin(\beta) \end{vmatrix} = \vec{k} |u||v| (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\beta) \sin(\alpha)) \vec{k} \sin(\beta - \alpha); \quad (2.94)$$

$$|u \times v| = |u||v| \sin(\beta - \alpha); \quad (2.95)$$

E assim eu obtive a expressão para o módulo do *produto externo*.

Esta formulação seria inválida para dois vetores $u, v \in \mathbf{R}^n$ para o cálculo de $u \times v$, mas um pequeno esforço de imaginação serve para adaptá-la para este caso uma vez que dois vetores determinam um espaço bidimensional dentro dum espaço de *qualquer dimensão*, então a expressão é válida e deixo esta extensão para sua imaginação...

Sumário das propriedades do produto externo

- $\|\vec{w}\| = |\vec{u} \times \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\gamma)$ em que γ é o ângulo entre os vetores \vec{u}, \vec{v} no círculo unitário do plano que eles determinam.

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ são colineares.
- Se os vetores \vec{u}, \vec{v} não forem colineares, então eles determinam um plano e os três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$, nesta ordem, formam um triedro orientado positivamente. Basta para isto mostrar que, tomados dois a dois, estes três vetores não colineares então eles são linearmente independentes e determinam um espaço de dimensão três.
- Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (2.96)$$

em que o “determinante” é apenas uma forma de calcular as coordenadas do novo vetor e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os *vetores da Física*. Desta forma o menor de ordem dois, identificado pelo vetor \vec{i} fornece a primeira coordenada de $\vec{u} \times \vec{v}$, e assim sucessivamente para o cálculo da segunda e terceira coordenada.

Eu preciso mostrar que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano determinado pelos vetores \vec{u}, \vec{v} mas isto é consequência direta da definição usando o determinante formal e já foi *praticamente feito* quando eu considerei acima dois vetores com a terceira coordenada nula obtendo, portanto elementos do plano determinado por \vec{i}, \vec{j} resultando num vetor que é múltiplo do vetor \vec{k} que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores \vec{i}, \vec{j} .

Se os vetores \vec{u}, \vec{v} forem colineares, quando o “determinante” é nulo e portanto $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

O “determinante” utilizado na definição para o cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$ tem um lado positivo porque mostra uma propriedade fundamental do produto vetorial, a anticomutatividade:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad (2.97)$$

pela troca de linhas no determinante.

Mas tem um lado negativo com a sugestão de que se trate dum produto restrito à dimensão três. Algumas vezes se chama este produto de *produto exterior* porque o resultado é um vetor perpendicular ao plano determinado pelos dois fatores, e isto vale em qualquer dimensão: $u, v, u \times v$ forma um triedro positivamente orientado se u, v forem linearmente independentes. Se não forem linearmente independentes o produto vetorial é nulo porque dois vetores linearmente dependentes se encontram sobre uma mesma reta e portanto o seno do ângulo entre eles é zero, consequência da propriedade do módulo de $u \times v$.

Na figura (fig 2.11), página 62, se pode ver que o significado geométrico do produto vetorial de dois vetores

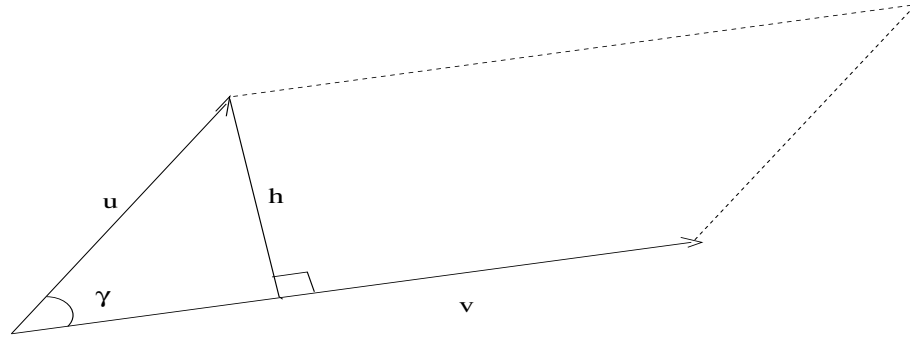
$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\gamma) \quad (2.98)$$

Eles determinam um losango quando se copia, paralelamente, os segmentos que correspondem aos vetores e a projeção de \vec{u} sobre a perpendicular à reta suporte de \vec{v} vale $\|u\| \sin(\gamma)$. O produto $\|u\|\|v\|\sin(\gamma)$ é a área deste losango determinado pelos vetores \vec{u}, \vec{v} .

Área do losango

Para verificar o módulo do *produto vetorial*, deixe-me observar que os vetores \vec{u}, \vec{v} determinam um espaço de dimensão 2, se forem l.i. que vou supor que sejam inicialmente, e portanto eu posso transportá-los sob forma de equivalência geométrica para o plano complexo e assim obter dois vetores da forma $re^{i\alpha}, se^{i\beta}$ que os representem. O produto vetorial destes dois vetores é igual, em módulo, ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\gamma)$$



$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \text{Área do losângulo}$$

Figura 2.11: $\vec{u} \times \vec{v} = \text{Área do losango}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos(\alpha) & r \sin(\alpha) & 0 \\ s \cos(\beta) & s \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = rs(\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta))k = \quad (2.99)$$

$$rs \sin(\alpha - \beta)k; \gamma = \alpha - \beta; \quad (2.100)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = rs|\sin(\alpha - \beta)| = rs|\sin(\alpha - \beta)| = rs|\sin(\gamma)| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\gamma) \quad (2.101)$$

Exemplos com os vetores do triedro fundamental da Física:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}; \text{triedro dos vetores unitários da Física;} \quad (2.102)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad (2.103)$$

$$\quad (2.104)$$

Se a dimensão do espaço E for maior ou igual a três, o *produto vetorial* é uma operação binária bilinear alternada (anticomutativa) em E . Esta afirmação é válida para \mathbf{R}^3 munido com o triedro da Física.

O produto vetorial não foi criado por acaso, ele permite sintetizar importantes propriedades físicas o que torna natural a sua definição com o “determinante” trazendo na primeira linha os três vetores da Física. A Matemática em seguida absorveu a definição que se originou na Física com o nome de “produto exterior” que é um exemplo de denominação de má qualidade se originando do fato de que $u \times v$ não pertence ao plano determinado por pelos dois fatores. Se a dimensão do espaço for maior ou igual a três o produto vetorial passa a ser uma operação binária, não comutativa, do espaço e *nada exterior*.

Entre as muitas propriedades do produto vetorial tem se a chamada *Regra BAC-CAB*

$$A \times (B \times C) \stackrel{?}{=} B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (2.105)$$

$$P = A \times (B \times C) = A \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \quad (2.106)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ (b_2 c_3 - b_3 c_2) & (b_3 c_1 - b_1 c_3) & (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{vmatrix} = \quad (2.107)$$

$$= (a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3), a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1), a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2)) = \quad (2.108)$$

$$= D - E \stackrel{?}{=} B(A \cdot C) - C(A \cdot B); \quad (2.109)$$

$$D = (b_1, b_2, b_3)(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3); E = (c_1, c_2, c_3)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3); \quad (2.110)$$

$$D = (b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3), b_2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3), b_3(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)) \quad (2.111)$$

$$E = (c_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), c_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), c_3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)); \quad (2.112)$$

$$D - E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} = A \times (B \times C) \stackrel{!}{=} P \quad (2.113)$$

Embora esta demonstração tenha sido feita no \mathbf{R}^3 ela segue válida em qualquer dimensão maior ou igual a três.

O produto vetorial foi concebido para lidar com espaços de dimensão três e uma forma de demonstrar as propriedades deste produto pode facilmente ser feita definindo os vetores como combinação linear dos vetores da Física para os quais valem

$$i \times j = k; j \times i = -k; j \times k = i; k \times j = -i; k \times i = j; i \times k = -j; \quad (2.114)$$

Os exercícios servirão para desenvolver a sua intuição a partir das ideias aqui expostas.

Exercícios 1 *Variedades* Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2, 3, 5, 7, 11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta gabarito, você pode encontrar o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o gabarito esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro. Quando for o caso de que uma resposta tenha que ser dada aproximadamente, o valor fornecido terá quatro dígitos depois do ponto, ou vírgula, decimal, para ser considerado correto.

1. Plano cartesiano Na figura (2.12), página 64, você tem o o plano cartesiano com quatro pontos marcados e alguns segmentos de reta traçados. O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes habitualmente referenciados com algarismos romanos, I, II, III, IV com a ordem crescendo no sentido positivo, anti-horário. Selecione as opções corretas nas afirmações abaixo.

Dos tempos em relógios tinham ponteiros...

- (2) (V)[](F)[] O segmento de reta \overline{PQ} se encontra no primeiro quadrante.
- (3) (V)[](F)[] O segmento de reta \overline{PQ} corta o eixo OY em sua parte negativa.
- (5) (V)[](F)[] O segmento de reta \overline{PQ} corta o eixo OY em sua parte positiva e atravessa do quadrante I para o quadrante II.
- (7) (V)[](F)[] O segmento de reta que se origina no ponto R aparentemente corta o segmento \overline{PS} perpendicularmente.
- (11) (V)[](F)[] O segmento de reta que se origina no ponto R aparentemente corta o segmento \overline{QS} formando ângulos agudos e obtusos.

gabarito:

2. Plano cartesiano Considere ainda a figura (2.12), página 64.

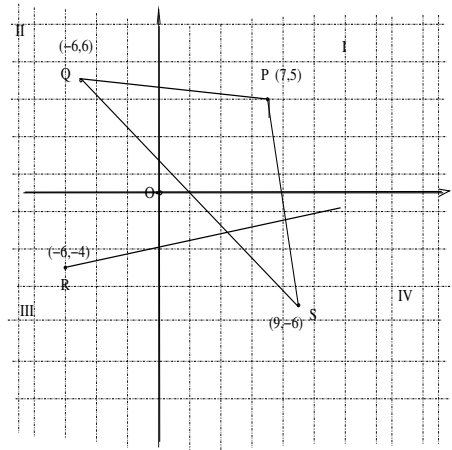


Figura 2.12: O plano cartesiano

- (2) (V)[](F)[] A distância entre P e S é $\sqrt{(7-9)^2 + (5-6)^2}$.
- (3) (V)[](F)[] A distância entre P e S é $\sqrt{(7+9)^2 + (5+6)^2}$.
- (5) (V)[](F)[] A distância entre S e Q é $\sqrt{(7+5)^2 + (5-6)^2}$.
- (7) (V)[](F)[] A distância entre S e Q é $\sqrt{(9+6)^2 + (6+6)^2}$.
- (11) (V)[](F)[] A distância entre S e Q é $\sqrt{(9-5)^2 + (6+6)^2}$.

gabarito: 21

3. Plano cartesiano Considere a figura (fig 2.13), página 64.

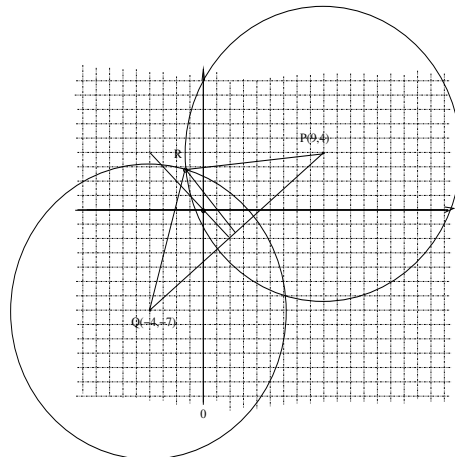


Figura 2.13: Segmentos de reta no plano cartesiano

- (2) (V)[](F)[] O ponto médio do segmento de reta \overline{PQ} é $(\frac{13}{2}, \frac{11}{2})$.

- (3) (V)[](F)[] O ponto médio do segmento de reta \overline{PQ} é $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
- (5) (V)[](F)[] O ponto médio do segmento de reta \overline{PQ} é $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.
- (7) (V)[](F)[] Com um compasso (eletrônico) eu tracei dois círculos com centro nos pontos P e Q . Traçando um segmento de reta que passe na interseção dos círculos eu posso obter o ponto médio do segmento \overline{PQ} .
- (11) (V)[](F)[] O segmento de reta que passa na interseção dos círculos com centro nos pontos P e Q vai cortar o segmento \overline{PQ} perpendicularmente no seu ponto médio.

gabarito: 385

4. Plano cartesiano Considere a figura (fig 2.13), página 64.

- (2) (V)[](F)[] O segmento de reta que passa na interseção dos círculos irá cortar o segmento \overline{PQ} exatamente ao meio se e somente se os raios dos círculos forem iguais.
- (3) (V)[](F)[] Traçando um triângulo que tenha por lado o segmento \overline{PQ} e o terceiro vértice um dos pontos de interseção dos círculos vai se obter um triângulo isósceles se os raios dos círculos forem iguais.
- (5) (V)[](F)[] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.13). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A altura do triângulo RPQ encontra o segmento \overline{PQ} em seu ponto médio.
- (7) (V)[](F)[] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.13). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A área do triângulo RPQ é menor do que $6\sqrt{13^2 + 11^2}\sqrt{2}$.
- (11) (V)[](F)[] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.13). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A área do triângulo RPQ é exatamente igual a $6\sqrt{13^2 + 11^2}\sqrt{2}$.

gabarito:

5. Equação da reta A figura (fig 2.15), página 66, apresenta o vetor $u = (5, 5)$ que é perpendicular à reta r .

- (2) (V)[](F)[] A equação da reta r na figura (fig 2.15) é $y - x = 0$.
- (3) (V)[](F)[] A equação da reta r na figura (fig 2.15) é $5y - 5x = 0$.
- (5) (V)[](F)[] A equação da reta r na figura (fig 2.15) é $5y = 5x$.
- (7) (V)[](F)[] A equação da reta r na figura (fig 2.15) é $5y = -5x$.
- (11) (V)[](F)[] A equação da reta r na figura (fig 2.15) é $y + x = 0$.

gabarito:

6. Coefficiente angular

A figura (fig 2.15), página 66, mostra a reta r que é perpendicular ao vetor $u = (5, 5)$.

- (2) (V)[](F)[] r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$.

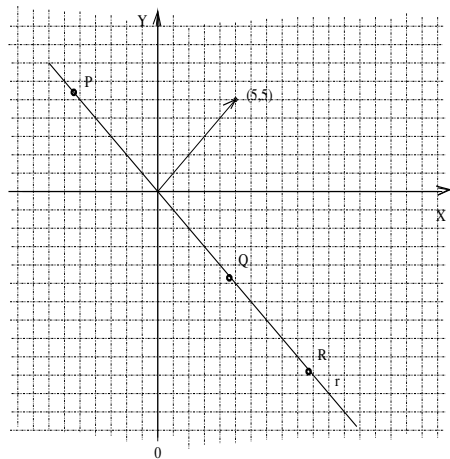


Figura 2.14: Equação da reta

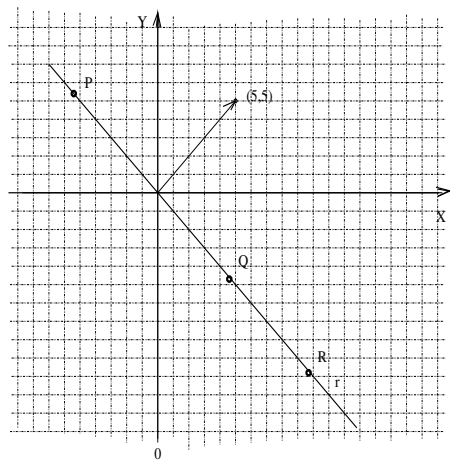


Figura 2.15: Equação da reta

- (3) (V)[](F)[] Como r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$ então sua equação é $x + y = 0$.
- (5) (V)[](F)[] Como r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$ e passa na origem então sua equação é $x + y = 0$.
- (7) (V)[](F)[] O coeficiente angular da reta r é -1 .
- (11) (V)[](F)[] Considere três pontos $P = (a, b)$, $Q = (p, q)$, $R = (m, n)$ escolhidos a esmo sobre a reta r . Então

$$\frac{b - q}{a - p} = \frac{q - n}{p - m} = \frac{n - b}{m - a} = -1; \quad (2.115)$$

gabarito: 770

7. Coefficiente angular Um quadrado de lado 5, com vértices P, Q, R, S lidos sequencialmente no sentido anti-horário, está centrado na origem com lados paralelos aos eixos coordenados.

- (2) $(V)[J(F)[]] P = (5, 0), Q = (5, 5), R = (-5, 0), S = (0, 5)$
 (3) $(V)[J(F)[]] P = (-5, 0), Q = (-5, -5), R = (-5, 5), S = (5, 5)$
 (5) $(V)[J(F)[]] P = (-5, 0), Q = (-5, -5), R = (-5, 5), S = (5, 5)$
 (7) $(V)[J(F)[]] P = (-2.5, -2.5), Q = (2, 5, -2.5), R = (2.5, 2.5), S = (-2.5, 2.5)$
 (11) $(V)[J(F)[]] P = (-2.5, -2.5), Q = (2, 5, 2.5), R = (-2.5, 2.5), S = (2.5, -2.5)$

gabarito:

8. distância entre dois pontos

Três vértices dum quadrilátero retângulo são $P = (4, 2), Q = (-1, -3), R = (4, -3)$

- (2) $(V)[J(F)[]] O$ quarto vértice S é $S = (1, 2)$
 (3) $(V)[J(F)[]] O$ quarto vértice S é $S = (2, -1)$
 (5) $(V)[J(F)[]] O$ quarto vértice S é $S = (-2, 2)$
 (7) $(V)[J(F)[]] O$ quarto vértice S é $S = (-1, 2)$
 (11) $(V)[J(F)[]] O$ quarto vértice S é $S = (-1, 1)$

gabarito:

9. distância entre dois pontos Os três vértices dum triângulo são $P = (-5, 9), Q = (5, 9), R = (0, 0)$

- (2) $(V)[J(F)[]] O$ triângulo PQR é equilátero.
 (3) $(V)[J(F)[]] O$ Todos os lados do triângulo PQR têm medidas diferentes.
 (5) $(V)[J(F)[]] O$ A área do triângulo PQR é 90;
 (7) $(V)[J(F)[]] O$ triângulo PQR é isósceles.
 (11) $(V)[J(F)[]] O$ A área do triângulo PQR é 45;

gabarito:

10. Distância dum ponto a uma reta Considere no plano XOY a reta r de equação $3x - 7y + 10 = 0$.

- (2) $(V)[J(F)[]] O$ ponto $P = (-1, 5)$ não se encontra na reta r .
 (3) $(V)[J(F)[]] O$ ponto $P = (-1, 5)$ se encontra na reta r .
 (5) $(V)[J(F)[]] O$ ponto $P = (-1, 1)$ é um ponto da reta r .
 (7) $(V)[J(F)[]] O$ vetor $(7, 3)$ é paralelo à reta r .
 (11) $(V)[J(F)[]] O$ vetor $(3, -7)$ é perpendicular à reta r .

gabarito:

11. Distância dum ponto a um plano Considere no plano XOY a reta r de equação $3x - 7y + 10 = 0$.

(2) (V)] (F) [] A distância do ponto $P = (-1, 5)$ à reta r é

$$d(P, r) \approx 5.077 \text{ aproximadamente} \quad (2.116)$$

(3) (V)] (F) [] A distância do ponto $P = (-1, 5)$ à reta r é

$$d(P, r) 5, \text{ exatamente.} \quad (2.117)$$

(5) (V)] (F) [] A reta s , de equação $3x - 7y = 0$, é paralela à reta r . A distância entre as retas r, s é 10.

(7) (V)] (F) [] A reta s , de equação $3x - 7y = 0$, é paralela à reta r . A distância entre as retas r, s é aproximadamente 5.077.

(11) (V)] (F) [] A distância entre duas retas paralelas r, s é o comprimento dum segmento de reta \overline{PQ} tal que $P \in r, Q \in s$ e $\overline{PQ} \perp r$, o segmento de reta \overline{PQ} é perpendicular à reta s .

gabarito:

12. Equação do plano no \mathbf{R}^3 A equação linear $5x + 7y = 0$ representa um plano π do \mathbf{R}^3 .

(2) (V)] (F) [] Um vetor perpendicular ao plano π é o vetor $(7, -5, 0)$

(3) (V)] (F) [] Um vetor perpendicular ao plano π é o vetor $(5, 7, 0)$

(5) (V)] (F) [] O ponto $(1, 10, 8)$ pertence ao plano π .

(7) (V)] (F) [] O ponto $(-7, 5, 0)$ pertence ao plano π .

(11) (V)] (F) [] A distância do ponto $P = (5, 7)$ ao plano π é $\sqrt{5^2 + 7^2}$.

gabarito:

13. Equação do plano no \mathbf{R}^3

A equação do plano π é $z = 0$

(2) (V)] (F) [] A distância do ponto $(0, 0, 1)$ ao plano π é 1.

(3) (V)] (F) [] O ponto $(1, 1)$ pertence ao ao plano π .

(5) (V)] (F) [] O ponto $(0, 1)$ pertence ao ao plano π .

(7) (V)] (F) [] O vetor $(0, 0, 10)$ é perpendicular ao plano π .

(11) (V)] (F) [] A distância do ponto $(1, 1, 1)$ ao plano π é 1.

gabarito:

14. Equação do plano no \mathbf{R}^3

A equação do plano π é $-z = 0$.

(2) (V)] (F) [] A distância do ponto $(0, 0, 1)$ ao plano π é 1.

(3) (V)] (F) [] O ponto $(0, 1)$ pertence ao ao plano π .

(5) (V)] (F) [] O ponto $(1, 1)$ pertence ao ao plano π .

- (7) (V) [](F) [] O vetor $(0, 0, 1)$ é perpendicular ao plano π .
 (11) (V) [](F) [] A distância do ponto $(1, 1, 3)$ ao plano π é 3.

gabarito:

15. distância Os pontos $(1, 3), (7, 3), (9, 8), (3, 8)$ determinam o quadrilátero Q .

- (2) (V) [](F) [] Q é um paralelogramo.
 (3) (V) [](F) [] A área de Q é 30.
 (5) (V) [](F) [] A área de Q é 40.
 (7) (V) [](F) [] Q é um retângulo.
 (11) (V) [](F) [] Q é um quadrado.

gabarito:

16. distância dum ponto a um plano

A equação do plano π é $5x + 7y + 3z + 10 = 0$

- (2) (V) [](F) [] O vetor $(-5, -7, -3)$ é perpendicular ao plano π .
 (3) (V) [](F) [] A distância do ponto $P = (3, 4, 5)$ ao plano π é aproximadamente 7.4639.
 (5) (V) [](F) [] Dado um ponto $P = (a, b, c)$ a reta s que passa por P , perpendicularmente ao plano π , é paralela ao vetor $\vec{V} = (A, B, C) = (5, 7, 3)$. A equação vetorial da reta s é

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x, y, z) = \lambda(5, 7, 3); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.118)$$

- (7) (V) [](F) [] Dado um ponto $P = (a, b, c)$ a reta s que passa por P , perpendicularmente ao plano π , é paralela ao vetor $\vec{V} = (A, B, C) = (5, 7, 3)$. A equação vetorial da reta s é

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x - a, y - b, z - c) = \lambda(5, 7, 3); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.119)$$

- (11) (V) [](F) [] A distância do plano π à origem é aproximadamente 1.0976.

gabarito:

17. distância dum ponto a um plano São dados três pontos $A = (-1, 1, 7), B = \text{list}(3, 4, 7), C = \text{list}(5, -1, 7)$

- (2) (V) [](F) [] O triângulo ABC é equilátero.
 (3) (V) [](F) [] O triângulo ABC é isósceles.
 (5) (V) [](F) [] O triângulo ABC é escaleno.
 (7) (V) [](F) [] Os pontos A, B, C determinam um plano paralelo ao plano XOY .
 (11) (V) [](F) [] A equação do plano determinado pelos pontos A, B, C é $z = 7$.

gabarito:

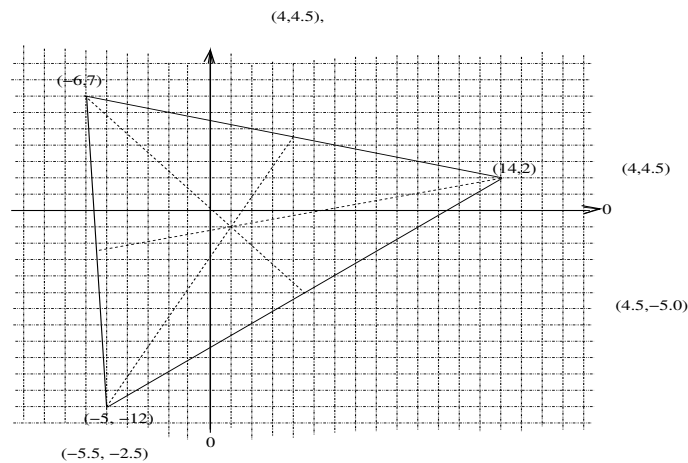


Figura 2.16: Triângulo

18. distância dum ponto a um plano A figura (fig 2.16), página 70, lhe mostra um triângulo de vértices $P = (-6, 7)$, $Q = (-5, -12)$, $R = (14, 2)$.

(2) (V) [] (F) [] O triângulo PQR é escaleno.

(3) (V) [] (F) [] O ponto de encontro das bissetrizes no triângulo PQR é $(1, -1)$

(5) (V) [] (F) [] O triângulo $P_1Q_1R_1$

$$P = (-6, 7), Q = (-5, -12), R = (14, 2); \quad (2.120)$$

$$P_1 = (0, 0), Q_1 = (1, -19), R = (20, -5); \quad (2.121)$$

$$(2.122)$$

é idêntico ao triângulo PQR mas foi deslocado por uma translação de tal forma que um dos vértices se encontra na origem.

(7) (V) [] (F) [] A área do triângulo $P_1Q_1R_1$ é igual a área do triângulo PQR e vale $\frac{375}{2}$

(11) (V) [] (F) [] A área do triângulo PQR é $\frac{D}{2} = \frac{\det(M)}{2}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -19 & 0 \\ 20 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

gabarito:

19. distância dum ponto a um plano Considere a expressão

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; A(x - 3) + B(y - 4) + C(z - 5) = 0\} \quad (2.124)$$

(2) (V) [] (F) [] Se A, B, C forem três constantes dadas, S é um plano.

(3) (V) [] (F) [] Se A, B forem duas constantes dadas, e $C \in [-1, 1]$ S é uma família de planos determinada pelo vetor (A, B, C) passando pelo ponto $P = (3, 4, 5)$.

(5) (V) [] (F) [] Se A, B forem duas constantes dadas, e $C \in [-1,1]$ S é uma família de planos determinada pelo parâmetro $C \in [-1,1]$.

$$A(x-3) + B(y-4) + C(z-5) = 0; \quad (2.125)$$

$$(z-5) = -\frac{A(x-3) + B(y-4)}{C}; \quad (2.126)$$

$$z = 5 - \frac{A(x-3) + B(y-4)}{C} = -\frac{A}{C}(x-3) - \frac{B}{C}(y-4); \quad (2.127)$$

$$F(x, y) = 5 - \frac{A}{S}(x-3) - \frac{B}{S}(y-4); \quad (2.128)$$

$$G(x, y) = 5 - \frac{A}{T}(x-3) - \frac{B}{T}(y-4); \quad (2.129)$$

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{(AS - AT)(x-3)}{ST} + \frac{(BT - BS)(y-4)}{ST}; \quad (2.130)$$

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{(AS - AT)(x-3) - (BT - BS)(y-4)}{ST}; \quad (2.131)$$

$$\begin{cases} 5 - \frac{A}{C}(x-3) - \frac{B}{C}(y-4) = F(x, y); \\ 5 - \frac{A}{D}(x-3) - \frac{B}{D}(y-4) = G(x, y); \\ \frac{(AS-AT)(x-3)}{ST} + \frac{(BT-BS)(y-4)}{ST} = \frac{(AS-AT)(x-3) - (BT-BS)(y-4)}{ST}; \\ \frac{(AS-AT)(x-3)}{ST} - \frac{(AS-AT)(x-3) + \frac{(BT-BS)(y-4)}{ST} + (BT-BS)(y-4)}{ST}; \end{cases} \quad (2.132)$$

(7) (V) [] (F) []

(11) (V) [] (F) []

gabarito:

20. distância dum ponto a um plano A base de um triângulo é o segmento de reta vai do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(a, 0)$ e a diferença das distâncias entre estes dois pontos e o terceiro vértice (x, y) é constante.

(2) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $2ax + a^2$

(3) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax - a^2$

(5) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax + 2a^2$

(7) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-ax + a^2$

(11) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax + a^2$

gabarito:

Capítulo 3

O círculo e a elipse no plano

3.1 Círculo e elipse

Se você desenhar numa folha, *com um compasso*, um círculo e depois inclinar a folha um pouco *vai ver uma elipse* em lugar do círculo. Quer dizer que uma elipse é um *círculo deformado*. A aparência que lhe passo com esta introdução é de que círculos são irrelevantes e nem mereciam ser tratados, e *estou lhe passando uma informação falsa*. Embora não haja nenhum círculo, ou esfera, em todo o Universo, assim como não há retas, estas equações são importantes no processo de construção de aproximações que é coisa que você encontrar no Cálculo ou quando escrever programas para conduzir módulos espaciais

...

O círculo é uma variedade não linear de dimensão 1, é uma curva fechada assim como a elipse.

Ocorre que, apesar de que no Universo não haja uma única reta, e nem planos, retas, planos, círculos são essenciais para construir aproximações e foi por esta razão que o segundo capítulo se dedicou às retas e planos, as variedades lineares. A Matemática é uma ciência de modelos embora na prática os modelos que a Matemática constrói tenham que ser adaptados o que se chama de aproximação. Então vou continuar pela equação do círculo.

O círculo é uma cônica, quer dizer uma curva determinada pela interseção dum plano com um cone de duas folhas, e aqui estou me referindo a uma curva espacial porque um cone é um sólido, uma *variedade* dum espaço tridimensional. Confira também a *equação da elipse* para uma análise destas interseções, confira elipse, parábola, hipérbole ou reta...

Há uma *imprecisão* neste texto que será corrigida mais a frente, mas procure descobri-lo você mesma.

3.1.1 Equação geral do círculo

Da geometria, *círculo* é “o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dum ponto chamado *centro*”. Vou usar a definição de *distância entre dois pontos* para obter a equação dum círculo.

Deixe-me identificar o centro com as coordenadas $C = (a, b)$ e um ponto genérico, P , do plano com as coordenadas (x, y) . A frase da geometria que define círculo pode então ser traduzida algebricamente como

Definição 12 do Círculo de centro $C = (a, b)$ e raio r

$$d(P, C) = r; \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r; \quad (3.1)$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2; \quad (3.2)$$

em que r é a distância constante entre P e C .

A figura (fig 3.1), página 74, lhe apresenta a ideia, da geometria, contida na definição do círculo.

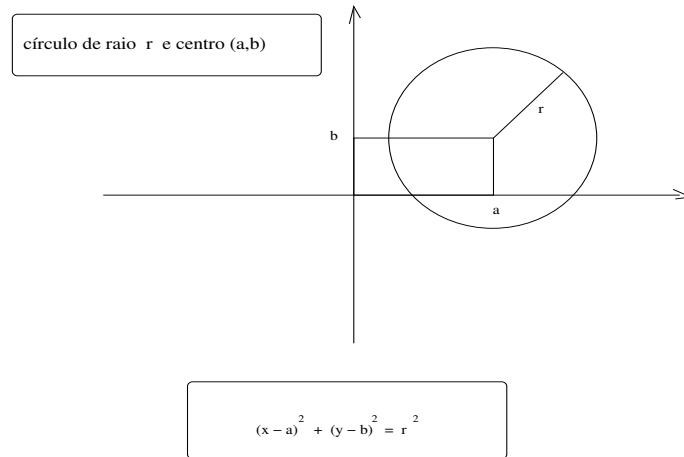


Figura 3.1: círculo de raio r e centro (a, b)

A expressão na equação (eq. 1) poderia ser considerada a equação do círculo, mas não é nesta forma que você vai encontrá-la, habitualmente, mas sim na forma

$$P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2; \quad (3.3)$$

entretanto qualquer uma das duas equações é perfeita para representar o círculo apenas no primeiro caso podem surgir problemas se for usada num programa de computador pela presença da raiz que exige que o seu “parâmetro”, o radicando, seja positivo.

Um caso importante da equação do círculo é quando a origem é o centro do círculo quando a equação fica

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0; \quad (3.4)$$

Basta que você substitua $a = 0, b = 0$ na equação (eq. 3) ou na equação (eq. 2).

3.1.2 Identificando um lugar geométrico

O objetivo da *geometria analítica* é duplo, por um lado, codificar em equações algumas figuras geométricas, as cônicas, e por outro lado, identificar numa expressão algébrica “geral” que tipo de figura algébrica se encontra codificada na expressão. Este segundo problema não é nada fácil e na verdade melhor faz parte do ambiente matemático mais amplo que é a *geometria algébrica*, mas é exatamente este segundo problema que aparece na maioria dos exercícios de *geometria analítica*: “*dado o polinômio*”.

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (3.5)$$

em que A, B, C, D, E são constantes dadas, quero saber qual é a cônica que a equação (eq. 5) “representa” ou se não representa nenhuma cônica.

Vou me especializar, neste momento com o caso do círculo para encontrar as regras e fazer esta identificação, partindo da expressão que se encontra na equação (eq. 5), se expandir esta equação, quando

vou encontrar a sequência de expressões

$$P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0; \quad (3.6)$$

$$P(x, y) = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0; \quad (3.7)$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0; \quad (3.8)$$

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (3.9)$$

$$\text{Se } A = B \text{ poderá ser um círculo, continuando...}; \quad (3.10)$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (3.11)$$

$$C = -2a; D = -2b; E = (-r^2 + a^2 + b^2); \quad (3.12)$$

$$a = -\frac{C}{2}; b = -\frac{D}{2}; E = -r^2 + a^2 + b^2; \quad (3.13)$$

$$-r^2 = E - (a^2 + b^2) \Rightarrow r^2 = (a^2 + b^2) - Er = \sqrt{a^2 + b^2 - E} \quad (3.14)$$

Na equação (eq.6) eu escrevi o modelo da equação do círculo de centro (a, b) . Na equação (eq.9) eu tenho a expressão que desejo testar, verificar se é ou não a equação dum círculo. Então na equações que seguem eu comecei a fazer a *completação de quadrados* para estabelecer as regras que os *coeficientes dados* A, B, C, D, E devem satisfazer para que $P(x, y) = 0$ seja a equação de um círculo. A condição $A = B$ é necessária, se for falsa a resposta imediata será “*Não pode ser um círculo*” que vai ser a *resposta dum programa* para testar se expressão na equação (eq.9) é a equação dum círculo. E se esta condição $A = B$ for verdadeira o programa vai responder “*Pode ser um círculo*” e o programa vai seguir testando acompanhando os cálculos feitos acima. Neste caso, para simplificar o programa, divido a equação toda por A quer dizer que o programa agora vai testar se

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (3.15)$$

e um círculo e vou passar os dados

$$A = 1; B = 1; C; D; E; \quad (3.16)$$

Comparando as duas equações deduzo que $A = B$ poderei ter um círculo, continuando... e se $A \neq B$ a expressão pode representar uma elipse, uma hipérbole ou nenhuma cônica. Estes outros casos vão ser tratados posteriormente e vou produzir os programas que farão os respectivos testes no momento certo.

As contas que vou fazer, semelhantes a estas feitas na equação (eq.6), costumam ser rotulados como *completação dos quadrados* porque se procura “compactar” uma expressão algébrica, fatorando-a, reversamente, para obter somas de quadrados ou produtos de expressões algébricas do primeiro grau.

$$P(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0; \quad (3.17)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0; \quad (3.18)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 - 4 = 0; \quad (3.19)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0; \quad (3.20)$$

$$P(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 4^2; \quad (3.21)$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2; \quad (3.22)$$

que é a representação algébrica do círculo de centro $C = (2, -3)$ e raio $r = 4$. Eu obtive esta mesma resposta usando o programa

```
define VerificaCirculo(A, B, C, D, E) {
  local a, b, r;
  if (A == B) { B=B/A; C=C/A; D=D/A; E=E/A;
```

```

A = B; ## divide toda equação por A
print A, B,C,D,E; ## mostra os coeficientes
print 'aperte enter para continuar';
system('read teste'); ## permite a leitura
print "Pode ser um círculo! Prosseguindo!";
a= -C/2; b = -D/2; ## calcula a,b
r = sqrt( a**2 + b**2 -E); ## calcula r
print 'É o círculo de centro (' ,a,' ,',b,') e raio ', r;
}
else print "Não pode ser um círculo, verifique se é uma elipse!";
}

```

Na sequência de contas das equações (eq. 17)-(eq. 22) usei uma técnica denominada *completação de quadrados* em vez de procurar identificar os coeficientes da equação geral (eq. 16). Quando se identifica $A = B$, é mais prático seguir por este método para verificar se a expressão representa um círculo.

Para dominar as técnicas envolvidas no trabalho com *geometria analítica*, como em qualquer disciplina ou atividade humana, a regra é bem simples: fazer uns mil exercícios... e você os encontra aos milhares em textos livres distribuídos na Internet. Aliás, esta regra vale para dominar qualquer assunto em Matemática, tem que diga que Matemática é *noventa por cento cálculo* e no máximo *dez por cento invenção* e mesmo as invenções são consequências de cálculos porque, de repente, aparece uma *expressão interessante no meio da calculeira*.

Mais acima, no texto, se encontra uma *imprecisão* ao dizer que uma expressão como $P(x, y)$ representa uma certa *variedade*. A falha consiste em não identificar a dimensão do espaço em que esta expressão “codifica” algum objeto.

Por exemplo, num espaço de dimensão 3,

$$x^2 + y^2 = 1; \quad (3.23)$$

representa o cilindro cuja base é o círculo unitário do plano XOY e a geratriz é o eixo OZ . Apenas mencionar esta equação, sem identificar o Universo em que ela estiver sendo considerada deixa uma indefinição. Este erro é muito comum nos textos, mas é difícil de ser corrigido sem criar uma redação muito complexa, em geral se admite, implicitamente, que se houver apenas duas variáveis, então a *dimensão do Universo* é dois.

É interessante *responder* a uma pergunta que sempre é feita. Porque a $P(x, y) = 0$ é que representa a *equação do círculo* e não apenas $P(x, y)$? É que escrevendo “apenas $P(x, y)$ ” você tem uma expressão livre que pode assumir qualquer valor em função dos valores dados às variáveis x, y e conseqüentemente $P(x, y)$ se refere a qualquer ponto (x, y, z) do \mathbf{R}^3 em que $z = P(x, y)$. A restrição $P(x, y) = 0$ limita esta expressão a $z = 0$. Outra forma de dizê-lo, é que $P(x, y) = 0$ corresponde ao sistema de equações

$$\begin{cases} z = P(x, y); \\ z = 0; \end{cases} \quad (3.24)$$

em que a primeira equação representa o gráfico da função bivariada $z = P(x, y)$ e a segunda equação representa o gráfico da função bivariada $z = 0$, o gráfico do plano XOY ou seja, a equação (eq. 24) representa a interseção de duas superfícies, *duas variedades de dimensão 2*, que pode ser uma curva. As curvas num espaço de dimensão maior, como aqui seria o \mathbf{R}^3 , são determinadas por interseção de superfícies. Assim, o erro mencionado acima fica amenizado com um sistema de equações como na equação (eq. 24).

A indefinição persiste... uma curva é uma variedade de dimensão 1 e a expressão $P(x, y) = 0$ apenas sugere que existam duas variáveis o que daria para calcular a dimensão por uma regra prática que diz que a dimensão é uma unidade menor do que o número de variáveis.

Ao escrever

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \quad (3.25)$$

não contém nenhuma informação sobre a variável z , ou significa que ela pode ter qualquer valor então esta expressão no \mathbf{R}^3 é um cilindro uma vez que não está estabelecida nenhuma restrição sobre a mesma e existem restrições apenas sobre os valores de x, y .

Entre escrever textos extremamente complicados termina valendo o bom senso que é determinado pelo contexto.

3.1.3 O círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico*, ou círculo unitário, \mathbf{S}^1 , é uma figura geométrica que aparece em muitas situações merecendo assim um tratamento especial. Eu costumo me referir a \mathbf{S}^1 como um transferidor. Posso partir da equação (eq. 4), basta dar o valor 1 ao $r = 1$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 = 1; \quad (3.26)$$

$$x = \cos(\theta); y = \sin(\theta); (x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)); \quad (3.27)$$

$$\rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \in \mathbf{C}; \quad (3.28)$$

A afirmação contida na equação (eq. 27) é a *relação fundamental da trigonometria* e vale sempre que a soma de dois quadrados for 1. Explicando melhor, se a soma de dois quadrados for 1, como na equação (eq. 26) então os números x, y são, respectivamente cosseno e seno de algum ângulo.

A equação (eq. 28) é a fórmula de Euler-De-Moivre comumente referida apenas como fórmula de Euler, mas *De-Moivre* a encontrou e provou de forma muito mais complicada alguns anos que *Euler*,

Tenho assim a forma polar do *círculo trigonométrico* quando $\rho = 1$, ou dum círculo qualquer quando $\rho \in \mathbf{R}^+$.

3.1.4 O poder da Geometria Analítica

Neste ponto eu posso lhe mostrar como é poderoso o método analítico, quando ele puder ser usado. A equação dum círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (3.29)$$

em que considere $A = B = 1$.

Quantas “*amostras*” eu preciso para determinar a equação dum círculo? Nesta equação há três incógnitas, C, D, E e dando valores a x, y eu posso obter um sistema de equações nas *variáveis* C, D, E .

Eu tenho três *incógnitas*, C, D, E , então eu preciso de uma *amostragem* com três elementos para construir um sistema de três equações e assim determinar as três *incógnitas*, C, D, E . Eu não posso dar um exemplo facilmente, porque esta *amostragem* tem que ser “*legal*”, não podem ser três pontos (x, y) quaisquer, eles têm que ser escolhidos em cima dum círculo, coisa que não tenho neste momento. . . então eu tenho que prosseguir *de forma abstrata*, é assim que entra a *abstração* em Matemática e mesmo noutros ramos do conhecimento, a gente continua como se tivesse as condições ideais e depois alguns testes terminam por nos colocar no trilhos. . . e você vai ver logo, nas linhas abaixo, que eu vou entrar nos trilhos.

Observe que eu já terminei o meu objetivo de mostrar como é poderoso o método analítico, se convença, releia e verifique que o que vou dizer encerra o assunto do que vou agora fazer um sumário.

Com uma *amostragem legal* de três elementos eu determino a equação dum círculo, observe a sequência.

- Um triângulo determina um círculo. Se eu precisava duma “*amostragem legal*”, ei-la, pegue um *triângulo qualquer* que ele determina um círculo. Isto é um teorema da Geometria Euclidiana nada fácil de demonstrar com os métodos da Geometria, e eu acabei de demonstrá-lo analiticamente, pegue um triângulo qualquer que ele determina um círculo e aplique a fórmula aos três vértices. Já tenho uma *amostragem legal*.
- Para todo triângulo existe um único círculo no qual ele está inscrito. É uma outra versão do teorema da Geometria citado acima. Nada fácil de demonstrar com os métodos da Geometria Euclidiana.
- Para determinar um círculo bastam três pontos, e aperte o cinto, e eles podem estar todos numa mesma linha reta, o resultado é a própria reta que um *círculo degenerado*. . . ou serem três pontos iguais, resulta num ponto que é um *círculo com raio zero, degenerado*. Tirando estes dois casos *degenerados*, fica a afirmação inicial de que todo triângulo determina um círculo.

3.1.5 O círculo e a ótica geométrica

Vou terminar a discussão sobre o círculo com uma propriedade geométrica que a *ótica geométrica* prova, experimentalmente, e eu vou usar este resultado experimental para enunciar uma outra forma de definir círculo que você somente vai poder ver *demonstrada* com rigor no Cálculo.

A figura (fig 3.2), página 78,

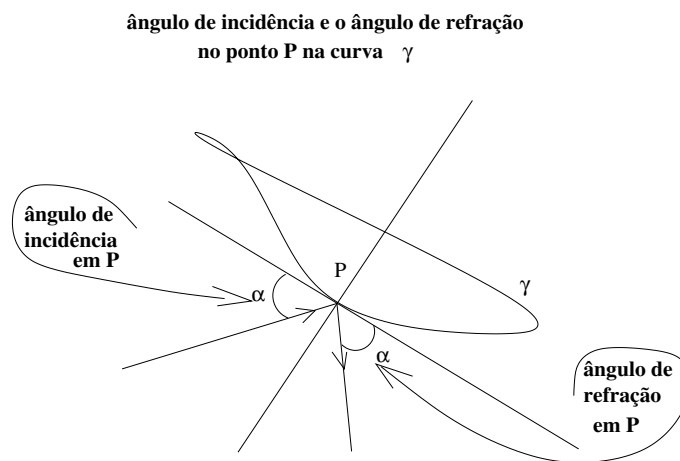


Figura 3.2:

mostra-lhe o ângulo de incidência e o ângulo de refração dum raio de luz que ao incidir sobre uma superfície polida sob um ângulo α se refrate segundo o mesmo ângulo α . Não vou entrar na questão da Física sobre o que é a luz, onda ou não, o que interessa é que os cálculos com *raios de luz* funcionam de acordo com a *ótica geométrica* que é o que me interessa aqui. Também não vou colocar na discussão que há modificação do *ângulo de refração* quando a luz atravessa distintos meios, vou considerar que tudo se passa dentro dum meio homogêneo, porque o que me interessa aqui é a superfície sobre a qual incide um raio de luz e saber o que acontece no caso específico de que seja uma superfície esférica, apesar de que eu esteja me restringindo ao caso de um curva, o círculo.

Na figura (fig 3.2) você vê uma curva, e poderia ser uma superfície polida, sobre a qual incide um *fecho de luz* segundo o ângulo α e o resultado é a luz se reflete de acordo com o mesmo ângulo de incidência, α . Na figura também aparece a reta tangente no ponto de incidência, e no Cálculo você vai ter a explicação exata de porque preciso da reta tangente para registrar o ângulo α , porque isto envolve

Este resultado depende do meio onde a luz se propaga.

a *derivada* que não pode ser meu assunto aqui. Esta questão do ângulo de incidência aparece no Ensino Médio onde não aparece a derivada portanto você tem todas as razões para aceitar o que estou propondo agora.

O que me interessa mesmo é o círculo e a *ótica geométrica* vai me ajudar a revelar uma importante propriedade desta curva que é um dos assuntos deste capítulo. A próxima figura, (fig 3.3), página 79, lhe mostra um círculo e agora o raio de luz, ao incidir sobre o círculo irá fazê-lo *sempre* na direção do centro do círculo, determinada pelo raio, vai se refletir na mesma direção, na direção determinada pelo raio o que significa que a tangente é perpendicular ao raio porque os ângulos de incidência e de reflexão são iguais a zero, $\alpha = 0$. Este é o resultado dum experimento da ótica geométrica.

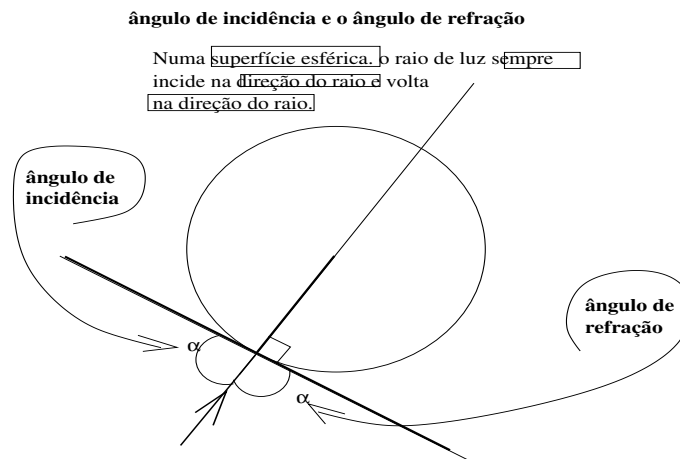


Figura 3.3:

Eu estou me valendo da *ótica geométrica* que somente pode *comprovar* experimentalmente: um raio de luz se reflete perpendicularmente à qualquer *superfície esférica*, diz a *ótica geométrica*. No Cálculo esta questão vai ser demonstrada com precisão, usando a *derivada implícita*, que não pode ser meu assunto aqui. No Cálculo você vai aprender a *equação diferencial* do círculo que leva facilmente à demonstração desta propriedade experimental da *ótica geométrica*. refletir sobre a mesma direção em que veio, a direção perpendicular à reta tangente. Este resultado experimental me diz que no círculo a tangente é perpendicular ao raio e o Cálculo vai lhe mostrar que esta é uma forma de definir círculo, a *única curva que em qualquer ponto a tangente é perpendicular ao raio*. Esta afirmação vale para qualquer superfície esférica que são as únicas que a *ótica geométrica* pode testar.

3.2 Equação da elipse

A *equação da elipse*, é uma expressão polinomial do segundo grau que descreve, no plano, uma elipse. É um item da *Geometria Analítica*.

A elipse é uma das cônicas e sua importância se encontra na Astronomia uma vez que é, aproximadamente, a forma das curvas descritas pelos astros em seus movimentos em torno dum polo de gravidade, como a Terra em volta do Sol ou da Lua em volta da Terra. Foi Kepler que corrigiu a teoria heliocêntrica de Copérnico analisando os dados que herdou de Tycho Brae. Copérnico afirmou que os astros percorriam uma órbita circular em volta do Sol.

Há várias formas de definir esta curva chamada elipse. Kepler, se beneficiando das medições que Tycho Brae fez ao longo de toda sua vida, conseguiu matar a charada que Copérnico havia deixado quando criou a teoria *heliocêntrica*, que quase lhe custou a vida nas mãos da cúpula da igreja católica, que impunha a “teoria” *geocêntrica*. Copérnico propôs que a rota dos planetas seriam círculos tendo o Sol como centro. Em sua teoria, entretanto, ficou o problema do movimento de Marte que parecia ter uma velocidade negativa relativamente a dos demais planetas, andava para trás. Analisando os dados coletados por Tycho Brae, Kepler concluiu que seriam elipses as rotas dos planetas em volta do Sol, e assim conseguiu resolver o problema deixado por Copérnico com a rota de Marte que é uma elipse com *excentricidade* um pouco maior do que a da Terra¹, e, em sua segunda lei, estabeleceu que “*se um planeta estivesse ligado ao Sol por uma linha, esta linha cobriria iguais áreas durante iguais intervalos de tempo*”. Observou também que o Sol estaria colocado num ponto fora do centro do movimento. Na figura (fig 3.4), página 80, você vê o caminho da Terra em volta do Sol, uma elipse em que o Sol ocupa

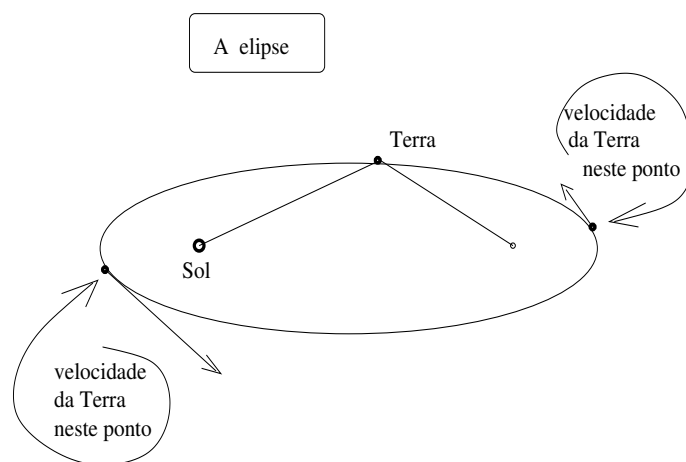


Figura 3.4: elipse é a rota da Terra em volta do Sol

um dos focos.

Um feito relativamente recente, pode motivá-la a compreender a equação da elipse. O módulo espacial Rosetta da agência espacial europeia, fez grande parte de sua viagem que durou 10 anos, para depositar um robot na superfície do cometa *67P/Churyumov-Gerasimenko*, usando a gravitação universal como força de propulsão. Este feito, que pode ser visto no link

<http://wp.me/psvm-2fu>

mostra como uma nave espacial pode obter propulsão da gravidade de um planeta para seguir sua viagem pelo Universo. Para fazer uso da gravidade é preciso compreender, entre outras coisas, a equação da trajetória dos astros e a elipse é um caso comum.

A definição geométrica da elipse é “*o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante*”. Então, você pode construir uma elipse com auxílio dum cordão com extremos fixos em dois pontos, os focos, fazendo a ponta dum lápis se movimentar mantendo o cordão esticado.

¹A excentricidade é a medida de como uma elipse distorce um círculo a ela relacionado, é a razão $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, em que $2a$ é soma das distâncias dum ponto sobre a elipse aos focos e $2c$ é a distância entre os focos. No círculo $c = 0$ zerando a excentricidade do círculo visto como elipse.

3.3 Espaçoave sul-coreana

Em 4 de janeiro de 2023 a Coreia anunciou o envio dum foguete para uma viagem de exploração da Lua. Estou traduzindo um texto distribuído na internet pelo ministério das Ciências da Coreia como um exemplo do uso da *elipse* em viagens interplanetárias, um exemplo concreto. Vou omitir alguns detalhes que são propaganda americana. Também estou omitindo detalhes de horário que não interessam para os fatos da Geometria Analítica. A palavra chave, é *Danuri*, o nome dado pelos coreanos ao foguete, se você quiser pesquisar na Internet e ver o texto de onde tirei os dados.

A primeira manobra foi enviar *Danuri* numa rota balística numa velocidade de 8.000 km/h e num certo momento reduzida para 7.500 km/h. Embora o texto não forneça dados mais precisos, se trata duma operação determinada pela *equação diferencial* que descreve a gravitação universal. Como o foguete perdeu massa, queimou combustível, então era preciso ajustar sua velocidade para encontrar a órbita que lhe correspondia em volta da Lua com a velocidade certa. Também é uma questão que pode ser bem explicada num texto de Cálculo, há uma velocidade certa, determinada pelo peso do objeto, para que ele entre em órbita no ponto de encontro com a mesma. *Danuri* pesava 678 quilos no momento de seu lançamento e parte deste peso seria do combustível. No momento relativo à sua distância da Lua, esta velocidade deveria ser corrigida para *Danuri* se aproximasse da *órbita desejada* com a *velocidade certa* para entrar em órbita do nosso satélite e foi o que ocorreu, “ficou confirmado que *Danuri* havia sido capturado pela atração gravitacional da Lua transformando-se num satélite lunar.” Esta questão, no Cálculo, pode ser tratada em diversos momentos, um deles é quando se estuda derivada descrevendo quando, no momento certo, a trajetória do foguete encontrou a órbita lunar que lhe correspondia dadas as condições de peso e velocidade, uma solução precisa duma *equação diferencial*, coisa que já mencionei anteriormente, as equações diferenciais são o instrumento certo para governar a trajetória de objetos em viagens espaciais, com o necessário uso de *programas de computação* para ajustar as órbitas.

No dia 28 de dezembro de 2022 o módulo espacial foi conduzido a quatro manobras que o levaram a uma *órbita circular* da Lua, e neste ponto eu acrescento que deve haver imprecisão na notícia porque não há trajetórias circulares, elas são necessariamente elípticas e podem ser, e deve ser o caso, com baixa *excentricidade* ou quase circular, como é o caso da Terra em sua trajetória em volta do Sol, é uma elipse quase circular. O resto da notícia fala dos objetivos da missão que você pode encontrar usando a chave mencionada acima e inclusive poderá ver fotos relacionadas à missão.

3.4 Cenário geométrico das cônicas

Esta seção talvez você deva omitir *num primeira leitura*, eu tentei torná-la didática, mas confesso que não tive sucesso. Melhor será esperar para quando você terminar de estudar todo o livro e queira retornar para reforçar esta discussão. Pular esta discussão não lhe tratará nenhum prejuízo para entender o resto da discussão sobre as cônicas.

As cônicas, círculo, elipse, parábola e hipérbole, são o resultado do corte feito num *cone de duas folhas* por um plano. É o que vou descrever aqui usando uma figura plana.

Vou mostrar que as cônicas se alteram na passagem entre círculos e parábolas. Por exemplo, uma elipse é apenas um círculo deformado e uma pequena deformação dada a um elipse faz surgir uma parábola. Inclusive isto tem aplicação na Astronomia ou melhor na exploração espacial em que uma nave espacial pode ser deixada *hibernando* numa elipse e repentinamente sair da elipse para uma parábola mudando a trajetória como foi o caso do projeto com a nave espacial Rosetta da agência espacial europeia, ou caso do módulo espacial *Danuri*, descrito na página 81, do ministério da Ciência da Coreia do Sul. Uma pequena alteração num plano que produz uma parábola e o resultado é uma hipérbole. Você vai ver, também, que existem *hipérboles degeneradas*.

Vou descrever a origem dos círculos, das elipses, das hipérbolas e das parábolas como interseções dum *cone de duas folhas*.

3.4.1 Singulares ou estáveis

As cônicas são geradas no espaço tridimensional quando um plano corta um *um cone de duas folhas*, portanto o cenário é tridimensional, o \mathbf{R}^3 , mas o resultado é projetado no plano no \mathbf{R}^2 . As cônicas são *curvas planas*.

Para estabelecer um *cenário* deixe-me fixar alguns “quadros” da geometria envolvendo um cone de duas folhas. Há duas classes de planos que delimitam os *eventos* produzindo círculos e parábolas e depois você verá que *elipses e hipérbolas* são variações destas duas curvas, na verdade os *eventos estáveis* cujos limites são os *eventos instáveis círculos e das parábolas*. . . mas você não precisa dar muita importância a esta frase se ainda não souber o que são *sistemas dinâmicos*, que é uma forma de entender as *equações diferenciais*. Este vocabulário é típico das *equações diferenciais*. Mas você não precisa saber resolver *equações diferenciais* para continuar lendo, apenas precisa saber que será quando você estudar este tipo de equações que esta figura vai adquirir uma coloração definitiva. Que sirva para alimentar o seu desejo de estudar estas equações num certo futuro.

Vou também definir um *plano codificador* de onde vou deduzir um *círculo codificador* obtendo uma forma mais efetiva e simples para classificar melhor os eventos e descrever todas as possibilidades de cônicas. Eu gostaria, pelo menos, que tudo ficasse simples.

As cônicas são obtidas pelo *plano codificador*. Alguns itens precisam ser esclarecidos antes que eu entre na *codificação geométrica*.

O *cone de duas folhas* é uma *superfície* gerada por uma reta, chamada *geratriz* que circula em torno de uma outra reta chamada *eixo do cone*. Estas duas retas, no espaço, se cortam num ponto V chamado *vértice do cone*. Confira a figura (fig. 3.5), página 82.

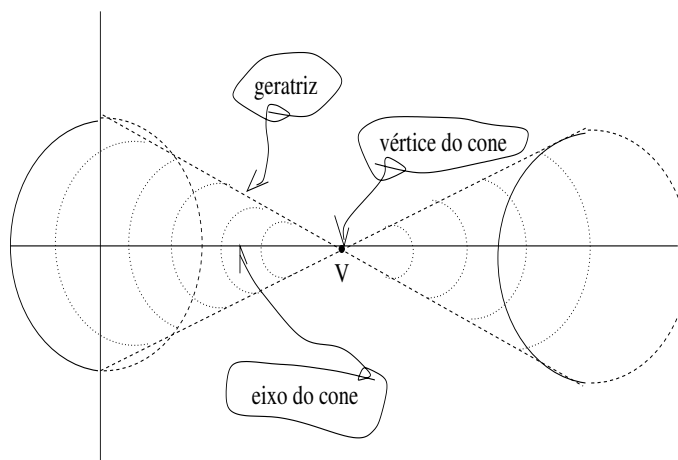


Figura 3.5: Cone de duas folhas

- círculo qualquer plano perpendicular ao eixo do cone, corta o cone segundo um círculo. Na figura (fig. 3.5) estou mostrando interseções de planos perpendiculares ao *eixo do cone*. Quer dizer que posso gerar uma infinidade de cônicas a partir da escolha dum certo plano. Para tornar mais simples a linguagem, eu vou passar a falar no *singular* me fixando num único plano, o *plano que vai determinar as cônicas deste texto*. Observe que este círculo é uma curva espacial mas se o eixo

do cono coincidir com o eixo OZ , sua projeção no plano XOY será um círculo e se o eixo do cone não for paralelo ao eixo OZ a projeção seria uma curva diferente. Então, *para não complicar*, vou também considerar que o eixo do cone é o eixo OZ . Aliás esta é uma regra importante na construção científica, *procurar identificar o caso mais simples a partir do qual todos os outros casos sejam obtidos por transformações adequadas*.

- parábola um plano tangente à superfície do cone em uma das *folhas*, contém uma imagem da *geratriz*, ou qualquer plano paralelo a ele. Um tal plano corta a superfície do cone segundo uma parábola se não contiver a *diretriz*. E vai cotar apenas uma das folhas. O caso do plano tangente à superfície do cone que são aqueles que contém a *diretriz*, é uma *situação limite* que pertence ao “caso da hipérbole”. Eu vou discutir este caso sob o título *hipérboles degeneradas*.
- *Caso limite ou solução singular* Se o plano for tangente à superfície do cone, o resultado é uma reta que se confunde com *geratriz* quando ela “passar” na reta tangente. Eu estou pensando no movimento de rotação *geratriz* em torno do eixo. Esta reta é uma *hipérbole degenerada*, linguagem da geometria. As Equações diferenciais chamam esta figura de um *caso limite*, uma solução singular dum *equação diferencial*. Por que *solução singular*? Porque qualquer toque no plano e ele deixa de ser tangente produzindo de volta uma parábola, num sentido, e no outro uma *hipérbole* porque estará cortando as duas folhas.

A teoria das *equações diferenciais* chamam estas soluções de singulares porque em geral elas não são soluções que se possam obter com cálculos algébricos, o Cálculo as chama de “*limites*”. Elas surgem rapidamente na passagem das parábolas para as hipérboles. É também o caso dos círculos que *aparecem abruptamente* dando lugar às elipses. Para as *equações diferenciais* elipses e hipérboles são *soluções estáveis*. Círculos e parábolas são *soluções singulares* que *aparecem* e “*instantaneamente*” desaparecem. O Cálculo pode explicar melhor estes efeitos.

Estes três casos mostram que é preciso relacionar ângulos entre planos. Vou agora precisar de fazer referência aos ângulos que um plano faria com os planos das duas classes descritas com as etiquetas *círculo* e *parábola*. Determinamos o ângulo entre dois planos usando duas retas perpendiculares, cada uma delas, a um dos planos. É o ângulo entre estas retas que define o ângulo entre os planos. O que determina a equação dum *variedade linear* é a reta que é perpendicular a ela, então o ângulo entre *duas variedades lineares* é o ângulo entre as respectivas retas que as determinam.

3.5 Plano codificador

Tem uma outra forma de codificar o cenário com projeções sobre um plano.

Existe *exatamente* um plano, deixe-me chamá-lo *plano codificador*, que é determinado pela *geratriz* e pelo eixo do cone, duas retas concorrentes no vértice V .

Posso *codificar todo o cenário* repetindo a análise que fiz anteriormente agora tendo como cenário o plano determinado pela *geratriz*, parada, junto com o eixo. Da mesma forma como eu descrevi no cenário anterior, estou me referindo a um plano que corta o eixo do cone no ponto Q . Usando *este plano* como vou passar a fazer, o *plano codificador* é o que aparece na figura (fig 3.7), página 86, com a etiqueta 0 para a classe do *círculo* e a etiqueta 1 para a classe da *parábola*, contendo as imagens da *geratriz* e do eixo do cone. A *geratriz* é única, mas ela roda no espaço produzindo duas imagens no *plano codificador*, duas retas concorrentes em V .

Deixe-me descrever a figura (fig 3.7), página 86, e partir para uma especialização da codificação que vai agora ficar restrita apenas ao círculo que aparece na figura (fig 3.7), o *círculo codificador*. Este círculo tem o centro em um ponto Q do eixo do cone e raio qualquer. Apenas para obter uma figura menos poluída

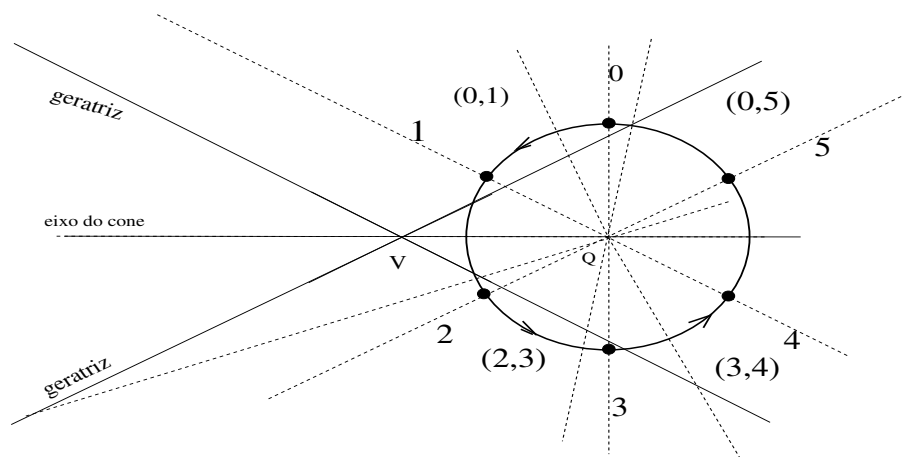


Figura 3.6: o círculo codificador

é bom selecionar o raio menor do que $d(Q, O)$ em que O é ponto de concorrência da diretriz e o eixo do cone. Este círculo é uma abstração que encontrei para descrever como se obtém todas as possíveis cônicas, ele é apenas uma referência ao movimento dum plano que corte o cone, este plano irá rodar de acordo com este círculo portanto se trata dum círculo centrado no ponto Q do eixo do cone mas que se encontra num plano perpendicular ao plano determinado pelas duas imagens da geratriz mencionadas acima. Portanto o ‘círculo codificador’ não faz parte das cônicas, ele apenas registra do movimento do plano que corta o cone de duas folhas, é um círculo que codifica as cônicas, repito, uma abstração que eu espero que descreva bem o que ocorre.

Melhor seria um filme que eu ainda não sei como produzir e se eu conseguir produzir, vou apagar todo este parágrafo anterior!

Nele, no círculo codificador, você pode identificar seis pontos que foram etiquetados com os números $\{0, 1, 3, 4, 5\}$ e que vou agora associar às cônicas que se podem obter, “seis” porque estou começando a etiquetar com zero.

- círculo A classe dos planos perpendiculares ao eixo marcada com os números 0, 3 e reduzida a uma reta perpendicular ao eixo do cone passando pelo centro do círculo codificador que aparece na figura (fig 3.7).

Qualquer reta perpendicular ao eixo do cone, na figura (fig 3.7) representa um plano desta classe que está agora reduzida as etiquetas 0, 3 do círculo codificador.

- parábola a classe dos planos cuja interseção produzem parábolas, marcada com os números 1, 2, 4, 5 e reduzida às duas retas paralelas à alguma das representações da geratriz, passando pelo centro do círculo codificador que aparece na figura (fig 3.7). A geratriz é única, mas ela roda no espaço e assim aparece no plano da figura (fig 3.7) duas vezes.

As imagens das diretrizes não pertencem a esta classe porque elas vão gerar *hipérboles degeneradas* de que vou tratar mais a frente. Observe que círculos e parábolas são determinados por pontos isolados do círculo codificador em comparação com as elipses e hipérboles que vão ficar determinadas por intervalos.

- o universo dos planos que nos interessam são os planos perpendiculares ao plano da (fig 3.7). Outra forma de fixar os planos interessantes é considerando a reta perpendicular ao plano codifica-

dor, (fig 3.7), passando pelo centro do *círculo codificador*: são os planos do espaço que contenham esta reta ou planos paralelos a estes.

O conjunto dos planos que contem um reta se chama *um feixe de planos*, portanto nos interessam todos os planos paralelos a um dos planos do feixe determinado pela reta perpendicular ao *círculo codificador* passando pelo seu centro.

Entenda os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 como etiquetas no *círculo codificador* que se vê na figura (fig 3.7). E agora estou partindo para forma ainda mais especializada (e simples) de codificar usando apenas pontos ou setores do *círculo codificador* que aparece na (fig 3.7).

Estes números, 0, 1, 2, 3, 4, 5 não seriam as melhores escolhas para etiquetar, talvez melhor fosse usar o ângulo da diretriz com o eixo do cone, entretanto isto dependeria da escolha da diretriz e implicaria numa maior complexidade da linguagem. A escolha que fiz usa a figura (fig 3.7) e portanto mostra, por semelhança de triângulos a dependência do ângulo que a diretriz faz com o eixo do cone. Enfim, fazer uma *codificação* implica em tomar uma decisão para escolher o código.

Todos os planos do universo que nos interessa, agora ficam classificados assim, usando apenas pontos ou segmentos de arco do *círculo codificador*:

- Os planos que produzem cônicas são os planos do feixe de planos determinado pela reta perpendicular ao *círculo codificador* passando pelo centro mesmo, ou planos paralelos a algum dos planos deste feixe.
- círculo os planos que determinam a reta etiquetada com 0, 3 ou uma sua paralela.
- parábola os planos que determinam as retas etiquetadas com 1, 2, 4, 5, ou uma paralela a ela, exce- tuando as imagens da geratriz, confira o item hipérbole.
- elipse os planos que determinarem com o centro do *círculo codificador* uma reta nos intervalos (0, 1), (2, 3), (3, 4), (0, 5) Estas etiquetas significam mesmo um intervalo aberto porque os extre- mos do intervalo ficam para círculo ou parábola. Como observei acima, círculos e parábolas ficam determinadas por pontos do *círculo codificador*. Estas figuras são muito instáveis, por exemplo um objeto astronômico raramente se encontra sobre uma trajetória do tipo círculo ou parábola. . . se isto ocorrer será por uma instabilidade que deve ser corrigida.
- hipérbole os planos do feixe que pertencerem ao complementar das opções anteriores, ou ainda, quando um plano determinar uma reta que passando pelo centro do círculo que não esteja nas clas- ses anteriores. Um plano da classe *parábola*, representa uma *situação limite* exatamente represen- tado pelos planos tangentes ao cone, eles determina *hipérboles degeneradas* que se reduzem a duas semi retas representadas por qualquer das diretrizes. Eu vou voltar a esta questão na construção da equação da hipérbole.
- retas A interseção dum plano com o cone pode ser uma reta, se ele for tangente à superfície do cone. Tecnicamente, tais retas seriam hipérboles degeneradas. Observe que as hipérboles têm dois ramos desconexos, neste caso seriam duas semi retas conetadas na origem. . . os dois ramos duma hipérbole degenerada.

É um bom exercício corrigir as etiquetas deste modelo transformando-as em ângulos no forma π -radianos usando o ângulo α entre uma das imagens da diretriz e o eixo do cone. O autor agradece se você lhe enviar esta a proposta e promete analisá-la para alteração do texto como uma contribuição sua.

Rota hiperbólica dum asteroide

Entre 2017 e 2023 o mundo dos astrônomos foi sacudido pela passagem dum asteroide incomum pela nossa vizinhança e que os astrônomos Darryl Seligman, Gregory Laughlin concluíram em um artigo publicado no Arkiv astro-ph arXiv:2005.12932 se tratar possivelmente dum bloco de gelo e hidrogênio destacado dalguma estrela longínqua, mas pertencente à nossa *via láctea*, que transitou nas vizinhanças do nosso Sol numa trajetória, *provavelmente hiperbólica* um fato raro, de ser observado, tanto a *trajetória hiperbólica* como um objeto externo ao sistema solar, na vizinhança onde vivemos. <https://arxiv.org/abs/2005.12932>

Eu tomei conhecimento desta visita de 2017 num artigo publicado na *Scientific American* de 03 de junho de 2020. O artigo referido menciona a conclusão a que chegaram os dois astrônomos, Darryl Seligman da Universidade de Chicago e Gregory Laughlin da Universidade de Yale, publicada num artigo, da *Astrophysical Journal Letters* mas que primeiro apareceu na *preprint da arXiv.org*. O objeto foi inicialmente chamado de 'Oumuamua, uma palavra havaiana para denominar visitantes trazendo notícias é o primeiro objeto inter estelar observado no nosso sistema solar e sua trajetória seria *hiperbólica*.

O plano que corta o cone, na figura (fig 3.10), página 89, foi selecionado no feixe de planos de modo que a reta com que ele corta o *círculo codificador* determine neste círculo um ângulo no intervalo $(0, 1)$, confira o *plano codificador* que aparece na figura (fig 3.7), página 86.

Para obter elipses basta alterar a posição do plano da posição 0. na figura (fig. 3.7), página 86,

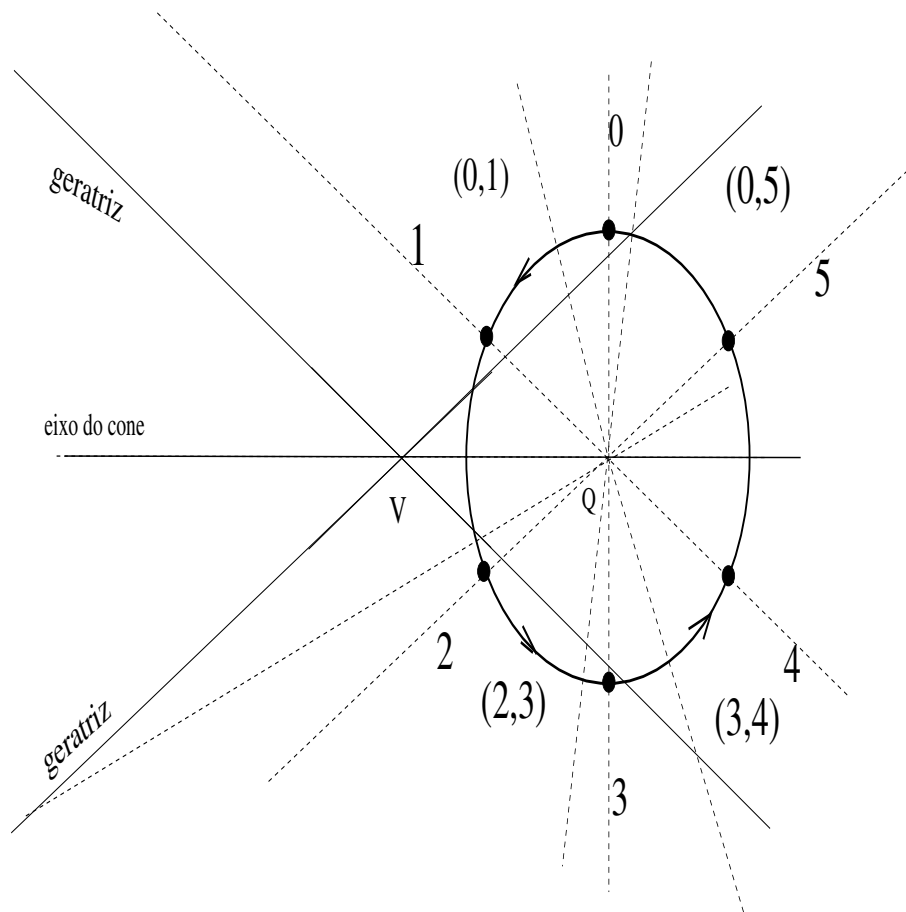


Figura 3.7: Esquema de corte do cone

Na figura (fig 3.10), página 89, você vê o corte do plano produzindo uma elipse.

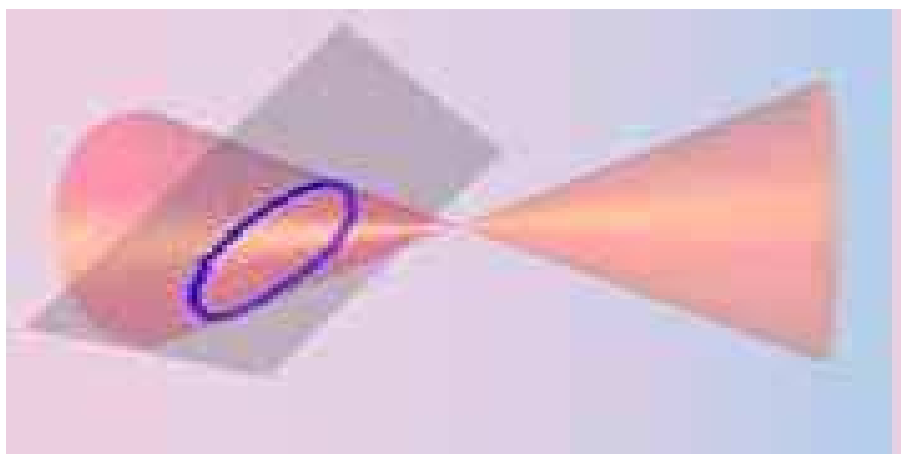


Figura 3.8: Plano corta cone segundo uma elipse

Uma elipse é um círculo deformado, e vou mostrar como podemos desfazer a deformação para obter dados da elipse, como por exemplo a sua área. Então é importante compreender como se vai e volta duma elipse para um círculo, um exemplo de codificação e decodificação.

Vou considerar uma elipse desenhada com os dois focos sobre o eixo OX com a origem dos eixos no ponto médio dos pontos focais, como você pode ver na figura (fig 3.9), página 87.

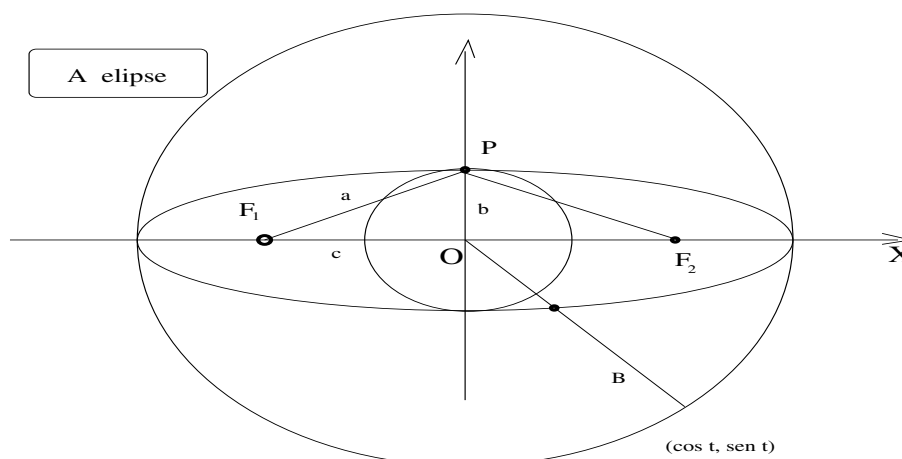


Figura 3.9: As medidas da elipse

Na figura você também vê dois círculos, um deles inscrito na elipse, com raio b e a elipse está inscrita no outro com raio B .

Com esta definição vou obter os dados de medição da elipse.

- Chamando $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$; $c \geq 0$, aos dois pontos focais, que se encontram sobre o eixo OX e considerando $P = (x, y)$ um ponto genérico que descreve a elipse inicialmente localizado sobre o eixo OY .

- Nesta localização inicial escolhida, o ponto $P = (x, y)$ que descreve a elipse, se encontra numa posição de simetria determinando dois triângulos retângulos semelhantes, com a origem e qualquer dos focos. A hipotenusa mede a e os dois catetos medem, respectivamente, b, c . O cateto que mede c é a metade da distância entre os focos, então a distância focal é convenientemente chamada de $2c$. Como o outro cateto mede b , pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad (3.30)$$

- Se o ponto P estiver sobre o eixo OX , se conclui que a soma das distâncias de P aos focos é $2B$, o diâmetro do círculo de raio maior:

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = \overline{F_1O} + \overline{OP} + \overline{PF_2}; \quad (3.31)$$

$$c + B + |B - c| = \quad (3.32)$$

$$c + B + B - c = 2B; \quad (3.33)$$

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2B; \quad (3.34)$$

- Suponha agora que o ponto $P = (x, y)$ se encontra numa posição arbitrária. Posso calcular a expressão da soma das distâncias aos focos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2B; \quad (3.35)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2B; \quad (3.36)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2B - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (3.37)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e simplificando os termos semelhantes vem:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4B^2 - 4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2; \quad (3.38)$$

$$(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4B^2 = -4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (3.39)$$

$$4xc - 4B^2 = -4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (3.40)$$

$$xc - B^2 = -B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (3.41)$$

$$(xc - B^2)^2 = B^2((x-c)^2 + y^2); \quad (3.42)$$

$$x^2c^2 - 2B^2xc + B^4 = B^2((x-c)^2 + y^2); \quad (3.43)$$

$$x^2c^2 - 2B^2xc + B^4 = B^2(c^2 + x^2 + y^2 - 2cx); \quad (3.44)$$

$$x^2c^2 + B^4 = B^2c^2 + B^2x^2 + B^2y^2; \quad (3.45)$$

$$x^2c^2 = -B^4 + B^2c^2 + B^2x^2 + B^2y^2; \quad (3.46)$$

$$x^2c^2 - B^2x^2 = -B^4 + B^2c^2 + B^2y^2; \quad (3.47)$$

$$x^2(c^2 - B^2) = B^2(c^2 + y^2 - B^2); \quad (3.48)$$

$$x^2(B^2 - c^2) = B^2(B^2 - c^2 - y^2); \quad (3.49)$$

Deixe-me chamar o número positivo $B^2 - c^2$ de r^2 :

$$r^2 = B^2 - c^2 = (B - c)(B + c) > 0 \quad (3.50)$$

Posso simplificar a expressão na equação (eq. 49), repetida abaixo, com os seguintes cálculos:

$$x^2(B^2 - c^2) = B^2(B^2 - c^2 - y^2); \quad (3.51)$$

$$x^2r^2 = B^2(r^2 - y^2); \quad (3.52)$$

$$x^2 = B^2 \frac{r^2 - y^2}{r^2}; \quad (3.53)$$

$$\frac{x^2}{B^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2}; \quad (3.54)$$

$$\frac{x^2}{B^2} = 1 - \frac{y^2}{r^2}; \quad (3.55)$$

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1; \quad (3.56)$$

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (3.57)$$

Esta não é a forma comum como aparece a equação da elipse na literatura, e sim com a seguinte expressão:

$$p = B^2; q = B^2 - c^2; \quad (3.58)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1; \quad (3.59)$$

em que p, q são dois números positivos, aqui você está vendo de onde vêm estes dois números positivos associando-os aos dois círculos que elipse tangencia, por fora, o de menor raio, e por dentro o de maior raio.

Posso expressar y como função de x obtendo então duas equações de funções

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{p}}; |x| \leq \sqrt{p}; \quad (3.60)$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{p}}; |x| \leq \sqrt{p}; \quad (3.61)$$

e usar `gnuplot` para obter o gráfico da elipse dando valores para B, p que pode ser vista na figura (fig 3.10), página 89,

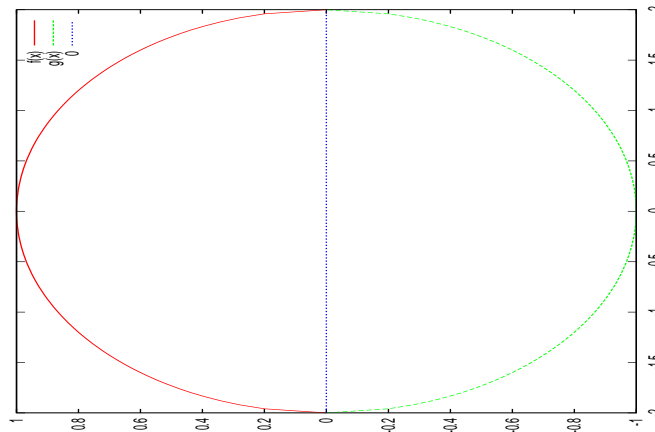


Figura 3.10: gráfico duma elipse com `gnuplot`

Se fosse possível associar botões controlando potenciômetros que alterassem o tamanho de $b \in (0, B)$ poderíamos

- ver a elipse colapsar para um segmento de reta e coincidir com o diâmetro do círculo maior, quando $b = 0$ e neste caso $c = a$,
- ou, quando $b = B$, e neste caso $c = 0$, a elipse coincidiria com o círculo maior, e a equação (eq. 68) se transformaria na equação do círculo de raio B

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \equiv x^2 + y^2 = B^2 \quad (3.62)$$

- excentricidade da elipse. Ainda observando a figura (fig 3.9), se $c = 0$ então os dois círculos ficam coincidentes e a elipse se transforma num círculo. A excentricidade é definida pela razão $\frac{c}{a}$, usando a hipotenusa e um dos catetos do triângulo retângulo. É uma convenção a escolha do cateto que mede c , bem conveniente. $c \in [0, a]$ e quando $c = 0$, os dois círculos na figura (fig 3.9) ficam coincidentes. O cateto que mede b não oferece esta variação e certamente foi esta razão da escolha que se tem para a definição da excentricidade.

Um círculo é uma elipse com excentricidade nula. A excentricidade da rota da Terra em volta do Sol fica próximo de zero variando próximo do número 0.016710 ou seja é uma órbita quase circular.

Uma forma de perceber a *excentricidade* *duma elipse* se dá quando você desenhar um círculo numa folha de papel. Ao olhar para figura com o papel perpendicular ao eixo do seu *cone de visão* você verá um círculo, produzindo um ângulo diferente do ângulo reto, você terá a impressão de ver uma elipse. Esta experiência tem o que ver com a próxima.

Um cone, em geometria, é uma figura espacial que se obtém quando se fizer girar uma reta, *chamada geratriz do cone*, em torno de outra que lhe seja oblíqua, *chamada eixo do cone*. O resultado será um *cone de duas folhas* como aparece na figura (fig 3.7), página 86.

Uma terceira forma de obter uma elipse consiste em cortar um cone de forma que o plano de corte não seja perpendicular ao eixo do cone. Você pode ter uma visão disto se desenhar um círculo sobre uma folha de papel e olhar o desenho com o papel inclinado em relação ao *eixo do cone de sua visão*. Se a inclinação for de 90 graus, o papel estiver perpendicular ao eixo do cone de sua visão, você estará vendo um círculo, com qualquer outro ângulo, até zero, verá uma elipse. Esta definição ainda tem um outro grande interesse: o plano que corta o cone irá produzir todas as cônicas dependendo do ângulo do corte.

Não é fácil passar da forma geométrica para a forma algébrica na definição da elipse, as contas são muito complicadas.

Vou mostrar como se pode obter a equação *duma elipse* que esteja colocada numa posição arbitrária, mas com dados conhecidos, no plano, como *transformação* da equação obtida com os eixos da elipse sobre os eixos coordenados.

Primeiro deixe-me aplicar uma translação à elipse usando o vetor (r, s) transformo, assim, a equação

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (3.63)$$

na equação

$$\frac{(x - r)^2}{B^2} + \frac{(y - s)^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (3.64)$$

esta é a equação da elipse com polos $F_1 = (-c, r)$ e $F_2 = (c, s)$ obtidos com a soma do vetor de translação aos focos anteriores. Observe que a translação é (r, s) , mas aparece dentro da equação $(x - r, y - s)$.

3.6 Círculo, elipse reta e plano

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta *gabarito*, você pode encontrar o produto dos números

primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 2 *Reta, círculo, elipse*

1. Círculo e reta Considere a expressão

$$P(x, y) = x^2 + 6x + y^2 + 8y + 9 \quad (3.65)$$

(2) (V)[](F)[] Completando os quadrados tenho

$$P(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + 9; \quad (3.66)$$

(3) (V)[](F)[] Completando os quadrados tenho

$$P(x, y) = (x + 3)^2 + (y + 4)^2 - 16; \quad (3.67)$$

(5) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 9.

(7) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 16.

(11) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 4 e de centro $(-3, -4)$

gabarito:

2. Círculo e reta

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11; \quad P(x, y) = 0; \quad (3.68)$$

(2) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(1, 2)$

(3) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, -2)$ e raio 16.

(5) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, -2)$ e raio 4.

(7) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, 2)$ e raio 4.

(11) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(1, -2)$ e raio 4.

gabarito:

3. Círculo e reta

Considere a figura (fig 3.11), página 92,

$$a = 3; b = 5; \quad (3.69)$$

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 - s^2 = 0; \quad (3.70)$$

$$(x - b)^2 + (y - b)^2 - s^2 = 0; \quad (3.71)$$

(2) (V)[](F)[] O valor de s nas equação do círculo de centro (a, a) é $\sqrt{2}$.

(3) (V)[](F)[] O valor de s nas equação do círculo de centro (a, a) é $2a$.

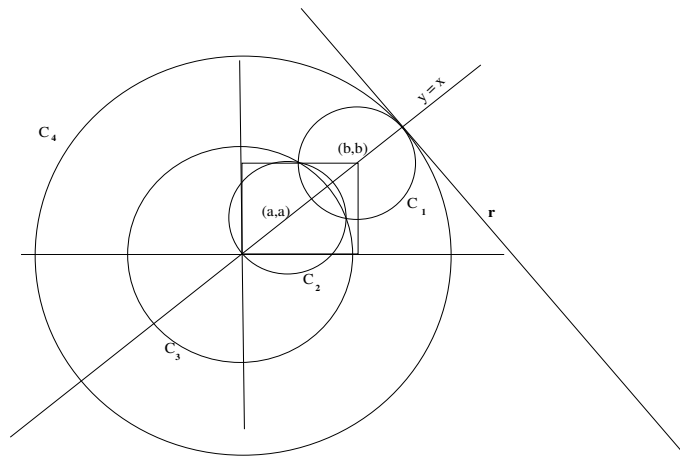


Figura 3.11: Círculos

- (5) (V)[](F)[] O valor de s nas equações do círculos de centro (a, a) é $a\sqrt{2}$.
- (7) (V)[](F)[] O valor de s nas equações do círculo de centro (b, b) é $a\sqrt{2}$.
- (11) (V)[](F)[] O valor de s nas equações do círculos de centro (b, b) é $a\sqrt{2}$.

gabarito:

4. Círculo e reta Na figura (fig 3.11), página 92, o círculo C_4 contém em seu interior três outros círculos C_3, C_2, C_1 .

- (2) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $(a + b)\sqrt{2}$.
- (3) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $b\sqrt{2}$.
- (5) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $2a\sqrt{2}$.
- (7) (V)[](F)[] O raio do círculo C_3 mede $2a\sqrt{2}$.
- (11) (V)[](F)[] O raio do círculo C_3 mede mais do que $a\sqrt{2}$.

gabarito:

5. Círculo e reta Na figura (fig 3.11), página 92, há quatro círculos, C_4, C_3, C_2, C_1 . e a reta r .

- (2) (V)[](F)[] Os círculos C_1 e C_4 são tangentes à reta r .
- (3) (V)[](F)[] Os círculos C_1 e C_4 são tangentes à um ao outro.
- (5) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y - x = 0$
- (7) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y + x + C = 0; C > 0$
- (11) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y + x + C = 0; C < 0$

gabarito:

6. Círculo e reta

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 - r^2 = 0; \quad (3.72)$$

- (2) (V) [] (F) [] A equação (eq.6.72) representa no plano cartesiano um círculo de centro num ponto da primeira bissetriz.
- (3) (V) [] (F) [] Se o parâmetro “a” na equação (eq.6.72) for considerado um parâmetro variando no intervalo $[-1, 1]$ irá gerar uma figura com fronteira formada por dois semicírculos e dois segmentos de reta.
- (5) (V) [] (F) [] Se o parâmetro “a” na equação (eq.6.72) for considerado um parâmetro variando no intervalo $[-1, 1]$ irá gerar um losango.
- (7) (V) [] (F) [] Se o raio r for igual a 1, $r = 1$, na equação (eq.6.72) a área do disco delimitado por este círculo será π .
- (11) (V) [] (F) [] Se o raio r for igual a 2, $r = 2$, na equação (eq.6.72) a área do disco delimitado por este círculo será 4π .

gabarito:

7. círculo e reta

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (3.73)$$

- (2) (V) [] (F) [] Se $A = 1, B = 1, C = -6, D = 4, E = -12$ então $P(x, y) = 0$ é o círculo de centro $(3, -2)$

(3) (V) [] (F) []

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \quad (3.74)$$

É o círculo de centro $(3, -2)$ e raio 5

(5) (V) [] (F) []

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \\ 6(y - 1) + 8(x - 7) = 0; \end{cases} \quad (3.75)$$

É a interseção do círculo de centro $(3, -2)$ e raio 5 com uma reta que passa no ponto $(7, 1)$ e este sistema de equações tem uma única solução.

(7) (V) [] (F) []

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0; \quad (3.76)$$

É o ponto $(3, -2)$, um círculo com este centro e raio zero.

(11) (V) [] (F) []

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \\ x - 3 + y + 2 = 0; \end{cases} \quad (3.77)$$

É a interseção do círculo de centro $(3, -2)$ e raio 6 com uma reta que passa no ponto $(3, -2)$ e portanto este sistema de equações tem apenas duas soluções.

gabarito:

8. círculo e reta Os pontos $P = (6, 6), Q = (2, 3), R = (4, 7)$ são os vértices do triângulo PQR.

- (2) (V)[](F)[] Os pontos $(0, 0)$, $(-4, -3)$, $(-2, 1)$ são os vértices dum triângulo equivalente ao triângulo PQR .
- (3) (V)[](F)[] Os pontos $(2, -1)$, $(-2, -4)$, $(0, 0)$ são os vértices dum triângulo equivalente ao triângulo PQR .
- (5) (V)[](F)[] Os vetores $(2, -1)$, $(-2, -4)$ são perpendiculares e isto prova que PQR é um triângulo retângulo.
- (7) (V)[](F)[] Os catetos do triângulo PQR medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$.
- (11) (V)[](F)[] A área do triângulo PQR é 5.

gabarito:

9. círculo e reta

$P = (4, -4)$, $Q = (-4, 4)$, $R = (4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ são os vértices do triângulo PQR

- (2) (V)[](F)[] O triângulo com vértices $P' = (0, 0)$, $Q' = (-8, 8)$, $R' = (4\sqrt{3} - 4, 4\sqrt{3} + 4)$ é equivalente ao triângulo PQR .
- (3) (V)[](F)[] O triângulo com vértices $P' = (0, 0)$, $Q' = (-8, 8)$, $R' = (4\sqrt{3} - 1, 4\sqrt{3} + 1)$ é um triângulo retângulo.
- (5) (V)[](F)[] O triângulo com vértices $P' = (0, 0)$, $Q' = (-8, 8)$, $R' = (4(\sqrt{3} - 1), 4(\sqrt{3} + 1))$ é um triângulo equilátero.
- (7) (V)[](F)[] A área do triângulo com vértices $P' = (0, 0)$, $Q' = (-8, 8)$, $R' = (4\sqrt{3} - 1, 4\sqrt{3} + 1)$ é aproximadamente -55.42562
- (11) (V)[](F)[] $P = (4, -4)$, $Q = (-4, 4)$, $R = (4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ são os vértices do triângulo PQR que determina o círculo de equação

$$x^2 + y^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}x - \frac{10\sqrt{3}}{3}y - 16 = 0; \quad (3.78)$$

gabarito:

10. círculo e reta Dados os pontos

$$P = (3, 7), Q = (6, 5), R = (15, -1) \quad (3.79)$$

decida o que se pode dizer

- (2) (V)[](F)[] PQR é um triângulo isósceles.
- (3) (V)[](F)[] PQR é um triângulo retângulo.
- (5) (V)[](F)[] PQR é um triângulo equilátero.
- (7) (V)[](F)[] PQR é um triângulo degenerado.
- (11) (V)[](F)[] Os vértices do triângulo PQR se encontram sobre uma mesma reta r .

gabarito:

11. círculo e reta

Suponha dados três pontos P, Q, R que determinam o triângulo PQR . Vou designar os lados do triângulo como $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$.

- (2) (V) [] (F) [] A lei de Charles diz que $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 0$
- (3) (V) [] (F) [] Se $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ então a soma de dois lados do triângulo é igual ao terceiro e isto é impossível.
- (5) (V) [] (F) [] Se $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ então a soma de dois lados do triângulo é igual ao terceiro é o caso da igualdade, na desigualdade triangular, quando se tiver um triângulo degenerado.
- (7) (V) [] (F) [] Se os pontos P, Q, R não forem colineares então a soma dos módulos de dois lados será sempre maior do que o módulo do terceiro lado, pela desigualdade triangular.
- (11) (V) [] (F) [] O triângulo PQR determina um único círculo no qual ele está inscrito.

gabarito:

12. círculo e reta O triângulo com vértices $(9, 3), (7, -1)$ e $(1, -1)$ determina um círculo C no qual ele está inscrito.

- (2) (V) [] (F) [] O centro do círculo C é $(4, 3)$
- (3) (V) [] (F) [] O raio do círculo C é $\sqrt{\frac{50}{3}}$.
- (5) (V) [] (F) [] O raio do círculo C é 4.
- (7) (V) [] (F) [] Indefinido porque pode haver vários círculos determinados por este triângulo.
- (11) (V) [] (F) [] É o círculo de centro $(4, 3)$ e raio $\sqrt{\frac{50}{3}}$ porque há um único círculo determinado por este triângulo.

gabarito:

13. triângulo e círculo O triângulo PQR está inscrito em S^1 , o círculo trigonométrico.

- (2) (V) [] (F) [] Se PQR for equilátero então existe um triângulo semelhante a PQR cujos vértices são as entradas da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\frac{4\pi}{3}) & \sin(\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

- (3) (V) [] (F) [] Se PQR for equilátero então as coordenadas dos seus vértices não podem ser todas números inteiros.
- (5) (V) [] (F) [] PQR for um triângulo equilátero e todas as coordenadas dos seus vértices são números inteiros.
- (7) (V) [] (F) [] Se PQR for equilátero então existe um triângulo semelhante a PQR cujos vértices são as entradas da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}); \\ \cos(\frac{7\pi}{6}) & \sin(\frac{7\pi}{6}); \\ \cos(\frac{11\pi}{6}) & \sin(\frac{11\pi}{6}); \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

(11) (V) [] (F) [] Não existem triângulos equiláteros inscritos em círculos.

gabarito:

14. triângulo, área

Os vértices do triângulo ABC são $(2, 3)$, $(4, 7)$, $(-5, 2)$.

(2) (V) [] (F) [] A área de ABC é dada pelo determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

mas o valor tem que ser corrigido.

(3) (V) [] (F) [] O triângulo cujos vértices são $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(-7, -1)$ é uma imagem equivalente de ABC e que vértice $(2, 3)$ foi levado para a origem.

(5) (V) [] (F) [] A altura de ABC relativamente ao lado \overline{BC} é aproximadamente 2.5253.

(7) (V) [] (F) [] A área de ABC é 13.

(11) (V) [] (F) [] A altura de ABC relativamente ao lado \overline{BC} é aproximadamente 1.2626.

gabarito:

15. reta, círculo, equação A figura (fig 3.12), página 96,

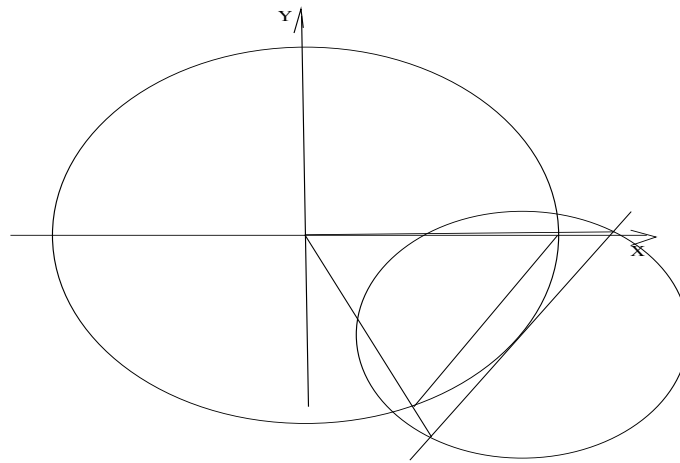


Figura 3.12:

lhe mostra o círculo C de centro $(-3, -4)$ de raio 5 e a reta $8(x - 1) - 6(y + 7) = 0$ tangente ao círculo no ponto $(1, -7)$.

(2) (V) [] (F) [] A reta de equação

$$8x - 6y = 0; \quad (3.83)$$

é tangente ao círculo C .

(3) (V)[](F)[] A reta de equação $8x - 6y = 50$; (3.84)

passa no ponto $P = (1, -7)$

(5) (V)[](F)[] A reta de equação $8x - 6y - 50 = 0$; (3.85)

passa no ponto $P = (1, -7)$ onde ela tangencia o círculo C .

(7) (V)[](F)[] A reta cuja equação é $8x - 6y = 50$; (3.86)

passa no ponto $P = (1, -7)$ e pelo centro do círculo C

(11) (V)[](F)[] A reta cuja equação é $8x - 6y - 10 = 0$ (3.87)

é tangente ao círculo C

gabarito:

16. círculo, reta Na figura (fig 3.13), página 97, a reta de equação $x + y + a = 0$ corta o círculo C cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$.

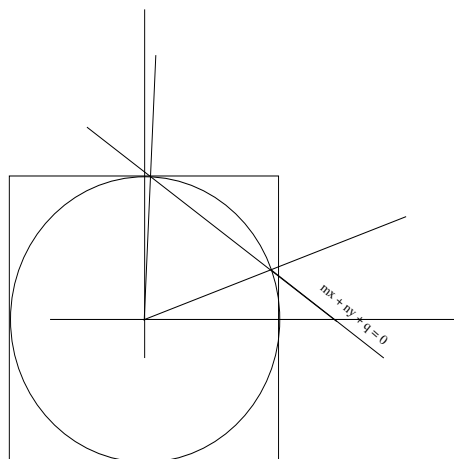


Figura 3.13: círculo e reta

- (2) (V)[](F)[] O círculo C é inscrito num quadrado de lado a .
 (3) (V)[](F)[] O círculo C é inscrito num quadrado de lado $2a$.
 (5) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são $(0, 0)$, $(2a, 2a)$;
 (7) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são (a, a) , $(-a, -a)$;
 (11) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são $(0, -a)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$;

gabarito:

17. Reta numérica $5(x^2 + y^2 + ax + by) = 9ab$ é a equação do círculo C .

(2) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

(3) (V)[](F)[] C é o círculo de centro (a, b) .

(5) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(2a, 2b)$.

(7) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(-a, -b)$.

(11) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(-a/2, -b/2)$.

gabarito:

18. completação dos quadrados Verifique, para a expressão geral do segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (3.88)$$

a condição para que seja a equação dum círculo.

(2) (V)[](F)[] Para que uma equação do segundo grau em x, y represente um círculo, como a equação (eq.88), é preciso que $a = b$ portanto a expressão geral para analisar seria

$$x^2 + y^2 + axy + bx + cy + e = 0 \quad (3.89)$$

(3) (V)[](F)[] Completando o quadrados na equação (eq.89) tem-se

$$x^2 + y^2 + axy + bx + cy + e = 0(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + (y + \frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4} + axy + e = 0 \quad (3.90)$$

donde se conclui que uma condição necessária é $a = 0$.

(5) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.89) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e > \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$.

(7) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.89) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e \leq \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$.

(11) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.89) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$ mas neste caso representa um ponto.

gabarito:

19. equação do círculo

Condição para determinar um círculo

(2) (V)[](F)[] Dar o centro e o raio.

(3) (V)[](F)[] Fornecer três pontos que estejam no círculo.

(5) (V)[](F)[] Apresentar um triângulo retângulo, (fornecer as coordenadas dos vértices do triângulo), cuja hipotenusa seja o diâmetro do círculo.

- (7) (V)] (F) [] Fornecer as coordenadas dos vértices de qualquer triângulo.
 (11) (V)] (F) [] Fornecer as coordenadas dos vértices dum quadrado qualquer.

gabarito:

20. retas no espaço 3D

Marque as afirmações verdadeiras, ignore as falsas!

- (2) (V)] (F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (4, 8, 0); P_2 = (1, 2, 3); Q_1 = (0, 5, 0); Q_2 = (-3, -1, 3)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

- (3) (V)] (F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 1); P_2 = (3, 2, -1); Q_1 = (0, 1, 4); Q_2 = (2, 3, 0)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

- (5) (V)] (F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (3, 1, 4); P_2 = (-3, 2, 5); Q_1 = (4, 6, 1); Q_2 = (0, 5, 8)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

- (7) (V)] (F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (3, 1, 4); P_2 = (-3, 2, 5); Q_1 = (4, 6, 1); Q_2 = (0, 5, 8)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são paralelas.

- (11) (V)] (F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 1); P_2 = (3, 2, -1); Q_1 = (0, 1, 4); Q_2 = (2, 3, 0)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são paralelas.

gabarito:

21. Reta, círculo e elipse Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 4), P_2 = (-1, 4, 1), Q_{0,5,1} = (), Q_2 = (3, -1, -2) \quad (3.91)$$

- (2) (V)] (F) [] A reta $\overline{P_1P_2}$ passa no ponto P_1 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

- (3) (V)] (F) [] A reta $\overline{P_1P_2}$ passa no ponto P_2 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

- (5) (V)] (F) [] A reta $\overline{Q_1Q_2}$ passa no ponto P_2 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

- (7) (V)] (F) [] A reta $\overline{Q_1Q_2}$ passa no ponto Q_2 e é paralela ao vetor $(3, -\vec{6}, -3)$.

- (11) (V)] (F) [] A reta $\overline{P_1Q_2}$ passa no ponto Q_2 e é paralela ao vetor $(-1, -\vec{2}, -6)$

gabarito:

22. Reta, círculo e elipse

A equação da reta r e $Ax + By + C = 0$.

(2) (V)[](F)[] Se $A = 0$ então r é paralela ao eixo OX .

(3) (V)[](F)[] Se $B = 0$ então r é paralela ao eixo OY .

(5) (V)[](F)[] Se $B * A \neq 0$ então r não é paralela ao eixo OY .

(7) (V)[](F)[] Se $B * A \neq 0$ então r não é paralela ao eixo OX .

(11) (V)[](F)[] Se $B * A \neq 0$ então r é paralela ao vetor $(-B, A)$.

gabarito: _____

23. Equação paramétrica da reta

A equação da reta r e $Ax + By + C = 0$ com $AB \neq 0$ e r passa no ponto (p, q)

(2) (V)[](F)[] Então $q = -\frac{Ap+C}{B}$.

(3) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então r é paralela ao vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$.

(5) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$, portanto o lugar geométrico dos pontos que se encontram sobre uma reta paralela a reta r .

(7) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $(p, q) + ((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$ deslocados para o ponto (p, q) portanto uma reta paralela a reta r que passa no (p, q) .

(11) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $(p, q) + ((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$ deslocados para o ponto (p, q) sendo assim uma descrição da r , é equação paramétrica da reta r .

gabarito: _____

24. equação do plano e da reta

Considere as equações dos planos

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1; \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2; \end{cases} \quad (3.92)$$

e a expressão matricial deste sistema

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

(2) (V)[](F)[] A expressão matricial, equação (eq.93) transforma um sistema de equações numa função linear, T , em que a matriz é a constante e T se aplicar a qualquer "ponto" do \mathbf{R}^3 e no caso da equação (eq.93) os valores se encontram no \mathbf{R}^2 .

- (3) (V)[J(F)[] Como a (eq.93), ou a (eq.92) que lhe é equivalente, vale para $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ então posso escolher $z = 0$ o que equivale a eliminar a terceira coluna da matriz na (eq.93). Posso também escolher $x = 0$ ou $y = 0$ e assim eliminar a primeira ou segunda coluna da matriz.
- (5) (V)[J(F)[] Do ponto de vista da matriz na equação (eq.93), zerar uma das coordenadas no domínio, equivale a considerar novos sistemas com matrizes 2×2 e assim resolver uma equação mais simples para depois retornar à (eq.92) com o valor obtido, se houver solução.
- (7) (V)[J(F)[] Se todos os determinantes menores na equação (eq.93) forem diferentes de zero, o sistema tem solução única. Se algum deles for nulo, ainda pode ter solução mas não será única.
- (11) (V)[J(F)[]

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Este sistema tem uma infinidade de soluções, é a interseção de dois planos, portanto uma reta. Selecionando $x = 100$ vou encontrar a solução $(x, y, z) = (100, -138, 217)$.

A solução $(x, y, z) = (100, \text{Error 10001}, \text{Error 10001})$

gabarito:

25. equação do plano O plano π é perpendicular ao vetor $(100, 585, -462)$ e passa no ponto $(3, 5, -7)$.

(2) (V)[J(F)[] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = 0; \quad (3.95)$$

(3) (V)[J(F)[] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = 6459; \quad (3.96)$$

(5) (V)[J(F)[] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = -6459; \quad (3.97)$$

(7) (V)[J(F)[] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z + 6459 = 0; \quad (3.98)$$

(11) (V)[J(F)[] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z + 64 = 0; \quad (3.99)$$

gabarito:

26. equação do plano Selecione as afirmações corretas

(2) (V)[J(F)[] Um plano paralelo ao plano XOY tem por equação $z = c$ em que c é uma constante dada.

- (3) (V)[](F)[] Um plano paralelo ao plano XOZ tem por equação $y = c$ em que c é uma constante dada.
- (5) (V)[](F)[] Um plano paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$; tem por equação $100(x - a) + 585(y - b) - 462(z - c) = 0$ em que a, b, c são constantes dadas.
- (7) (V)[](F)[] O plano π que é paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$ tem por equação $100(x - a) + 585(y - b) - 462(z - c) = 0$ e o ponto (a, b, c) pertence ao plano π .
- (11) (V)[](F)[] Um plano π que seja paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$ e passe pelo ponto $(-1, 1, 3)$ tem por equação $100(x + 1) + 585(y - 1) - 462(z - 3) = 0$.

gabarito:

27. equação do plano Selecione as opções corretas.

- (2) (V)[](F)[] Dois planos que sejam paralelos são perpendiculares a um mesmo vetor dado.
- (3) (V)[](F)[] Se o produto ABC de três números dados for diferente de zero então

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \quad (3.100)$$

é a equação dum plano que contém o ponto (a, b, c) ;

- (5) (V)[](F)[] A solução do sistema

$$\begin{cases} A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 4 \end{cases} \quad (3.101)$$

é um círculo de raio 4 que se encontra no plano cuja equação é

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0; \quad (3.102)$$

- (7) (V)[](F)[] Os pontos $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(-1, 2, 4)$ determinam um plano.
- (11) (V)[](F)[] Como o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (3.103)$$

vale 4, os vetores $v = (3, -\vec{1}, -1)$, $w = (2, -\vec{1}, -2)$ determinam um losango com esta área.

gabarito:

28. equação do plano

$$\begin{cases} 3x - y - z = 7; \\ 2x - y - 2z = 10; \end{cases} \quad (3.104)$$

são as equações dos planos π e γ , nesta ordem.

- (2) (V)[](F)[] Os planos π e γ têm interseção vazia.

- (3) (V) [] (F) [] Os planos π e γ têm interseção não vazia e determinam uma reta.
- (5) (V) [] (F) [] Escolhendo um valor para z , arbitrariamente no sistema (eq.6.104) permite calcular os correspondentes valores de x, y do ponto $P = (x, y, z)$ que pertence à reta determinada pelos planos π e γ .
- (7) (V) [] (F) [] No sistema de equações (eq. 6.104) escolhendo $x = 100$ a solução única do sistema é $(x, y, z) = (100, 396, -103)$.
- (11) (V) [] (F) [] No sistema de equações (eq. 6.104) escolhendo $z = 10$ a solução única do sistema é $(x, y, z) = (-13, -56, 10)$.

gabarito:

29. equação do plano A matriz expandida do sistema de equações é

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Na matriz expandida, em cada linha, na última entrada, os dados do sistema.

- (2) (V) [] (F) [] No sistema (eq. 6.105) escolhendo o valor $z = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (46, 63, 100)$.
- (3) (V) [] (F) [] No sistema (eq. 6.105) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, 138, -217)$.
- (5) (V) [] (F) [] No sistema (eq. 6.105) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, 138, 217)$.
- (7) (V) [] (F) [] No sistema (eq. 6.105) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, -138, 217)$.
- (11) (V) [] (F) [] No sistema (eq. 6.105) escolhendo o valor $z = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (46.8181818181818182, -63.5454545454545455, 100)$.

gabarito:

30. equação do plano Considere a equação

$$2x + 3y + z - 3 = 0 \quad (3.106)$$

que representa a variedade linear π do \mathbf{R}^3 .

- (2) (V) [] (F) [] O ponto $P = (0, 0, 0) \in \pi$.
- (3) (V) [] (F) [] A variedade linear π não passa na origem.
- (5) (V) [] (F) [] O vetor $\vec{Q} = (2, 3, 1)$ é perpendicular à variedade linear π .
- (7) (V) [] (F) [] O conjunto dos pontos $(x, y, z) = (2t, 3t, t); t \in \mathbf{R}$ representa uma reta que passa na origem e é perpendicular à variedade linear π .
- (11) (V) [] (F) [] O conjunto dos pontos $\{(x, y, z) = (2t, 3t, t); t \in \mathbf{R}\}$ representa uma reta contida na variedade linear π .

gabarito:

Capítulo 4

A parábola

Em preparação

Capítulo 5

Hipérbole

Em preparação

Um hiperbolóide cortado por dois planos produzem um par de retas que coincidem com os eixos duma hipérbole. Depois de encontrado o sistema de equações ele foi resolvido usando `calc` e pretendo

traduzir para python.

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5x + 10y - 25; \\
 z = P(x, y) &= (ax + by + m)(px + qy + n); \\
 z = P(x, y) &= 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5x + 10y - 25; \\
 z = P(x, y) &= (ax + by + m)(px + qy + n); \\
 P(x, y) &= apx^2 + (aq + bp)xy + bqy^2 + (an + mp)x + (bn + mq)y + mn; \\
 ap = 2; p = \frac{a}{2}; ap = \frac{a^2}{2} = 2 &\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}; \\
 bq = 3 \Rightarrow q = 3/b; aq + bp = -7; &\Rightarrow a\frac{3}{b} + b\frac{a}{2} = -7 \Rightarrow \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 24a^2}}{2a}; \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{4}; \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{4}; \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm 10}{4}; \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 + 10}{4} = b = -1; \\
 a = 2 \Rightarrow b = \frac{-14 - 10}{4} = b = -6; \\
 a = 2 \Rightarrow b \in \{-1, -6\}; \\
 a = -2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 24a^2}}{2a}; \\
 a = -2 \Rightarrow b = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{-4}; \\
 a = -2 \Rightarrow b = \frac{-14 - 10}{-4}; b = 6; \\
 a = -2 \Rightarrow b = \frac{-14 + 10}{-4}; b = 1; \\
 a = 2 \Rightarrow b \in \{-1, -6\}; a = -2 \Rightarrow b \in \{1, 6\}; \\
 a = 2; p = \frac{a}{2} = p = 1; b = -1; q = 3/b = -3; \begin{cases} 2n + m = 5; \\ -n - 3m = 10; \end{cases} \Rightarrow n = 5; m = -5; \\
 a = 2; p = \frac{a}{2} = p = 1; b = -6; q = 3/b = -\frac{1}{2}; \begin{cases} 2n + m = 5; \\ -6n - \frac{1}{2}m = 10; \end{cases} \Rightarrow n = -2.5; m = 10; \\
 a = -2; b = 1; p = \frac{a}{2} = p = -1; q = 3/b = 3; \begin{cases} -2n - p = 5; \\ n + 3m = 10; \end{cases} \Rightarrow n = -5; m = 5; \\
 a = -2; b = 6; p = \frac{a}{2} = p = -1; q = 3/b = \frac{1}{2}; \begin{cases} -2n - p = 5; \\ 6n + \frac{1}{2}m = 10; \end{cases} \Rightarrow n = 2.5; m = -10; \\
 P(x, y) = \begin{cases} (2x - y + 5)(x - 3y + 5) = 0 \Rightarrow f1(x) = 2x + 5; g1(x) = \frac{1}{3}(x + 5) \\ (2x - 6y + 10)(x - \frac{1}{2}y - 2.5) = 0 \Rightarrow f2(x) = \frac{1}{6}(2x + 10); g2(x) = -\frac{1}{2}(x - 2.5) \\ (-2x + y + 5)(-x + 3y - 5) = 0 \Rightarrow f3(x) = 2x - 5; g3(x) = \frac{1}{3}(x + 5) \\ (-2x + 6y - 10)(-x + \frac{1}{2}y + 2.5) = 0 \Rightarrow f4(x) = \frac{1}{6}(2x + 10); g4(x) = 2(x - 2.5) \end{cases}
 \end{aligned}$$

```

read '/tex/dicionario/biblioteca.calc'
a = 2; A = mat[2,2]; A = {a, a/2, -42/(5*a), -14/(5*a)};
An = mat[2,2]; Am = mat[2,2];
An = {5, a/2, 10, -14/(5*a)}; Am = {a, 5, -42/(5*a), 10};
PrintMat(A, 2, 2); PrintMat(An, 2, 2); PrintMat(Am, 2, 2);
n = det(An)/det(A); m = det(Am)/det(A);
n*m tem que ser igual -25

```

Capítulo 6

Exercícios de revisão

Este capítulo reúne os exercícios finais deste capítulo e alguns extrapolam um pouco o conteúdo do capítulo, por exemplo, estou calculando a área sob o gráfico dum função, a *integral da função*, e nos capítulos anteriores, *função*, é um tópico vem do Ensino Médio e não foi tratado aqui. Mas a forma com aparece a integral, eu entendo que é intuitiva, portanto este me parece um erro menor, ou talvez uma forma de avançar os tópicos colocando-os de forma intuitiva.

Outro tópico que estou avançando, também me valendo de sua forma geométrica e intuitiva, é a derivada como coeficiente angular da reta tangente. Ainda assim tem um exercício que eu etiquetei *fora do contexto* porque de fato a derivada que aparece nele foge da forma intuitiva. Talvez na redação final eu o retire.

Este capítulo foi redigido primeiro que os outros, exatamente para que completasse os primeiros capítulos de forma preparatória para este.

Que as leitoras me julguem sem piedade!

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta *gabarito*, você pode encontrar o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 3 *Os números*

1. Números naturais

- (2) (V) [] (F) [] O conjunto dos números naturais é formado por todos os números inteiros.
- (3) (V) [] (F) [] O conjunto dos números naturais é formado por todos os números inteiros positivos e o zero é considerado um número positivo.
- (5) (V) [] (F) [] O zero é considerado um número positivo e também é considerado um número negativo.
- (7) (V) [] (F) [] A operação **adição** é uma operação binária definida no conjunto \mathbf{N} dos números naturais, e suas propriedades são:
- A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**
 - A-2 Todo número natural tem um inverso aditivo.
 - A-3 A adição é comutativa.
 - A-4 A adição é associativa.

(11) (V) [] (F) [] A operação **adição** é uma operação binária definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais, e suas propriedades são:

- i. A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**
- ii. A-3 A adição é comutativa.
- iii. A-4 A adição é associativa.

2. Números naturais

(2) (V) [] (F) [] A operação **multiplicação** é uma operação binária definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais, e suas propriedades são:

- M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- M-2 Todo número natural tem um inverso multiplicativo.
- M-3 A multiplicação é comutativa.
- M-4 A multiplicação é associativa.

(3) (V) [] (F) [] A operação **multiplicação** é uma operação binária definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais, e suas propriedades são:

- M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- M-3 A multiplicação é comutativa.
- M-4 A multiplicação é associativa.

(5) (V) [] (F) [] Números binários O conjunto $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ munido da adição definida pela tabela

+	0	1
0	0	1
1	1	0

tem as propriedades

- A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**
- A-2 Todo número tem um inverso aditivo.
- A-3 A adição é comutativa.
- A-4 A adição é associativa.

(7) (V) [] (F) [] Números binários O conjunto $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ munido da multiplicação definida pela tabela

*	0	1
0	0	0
1	0	1

tem as propriedades

- M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- M-2 Todo número tem um inverso multiplicativo.
- M-3 A multiplicação é comutativa.
- M-4 A multiplicação é associativa.

(11) (V) [] (F) [] As operações **adição** e **multiplicação** são operações binárias definidas no conjunto \mathbb{N} valendo as propriedades

- A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**

A-3 A adição é comutativa.

A-4 A adição é associativa.

M-1 Existe um elemento neutro para a **adição**

M-3 A multiplicação é comutativa.

M-4 A multiplicação é associativa.

AM-1 O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número natural resulta em zero.

AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

Estas mesmas propriedades valem para o conjunto $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ com as operações de adição e multiplicação definidas anteriormente.

3. Melhorando \mathbf{N}

Posso inventar novos elementos, para completar \mathbf{N} , produzindo o conjunto \mathbf{Z} , dos números inteiros e a História me diz que isto foi feito com a criação dos números chamados “negativos”.

(2) (V)[J(F)[] Com a invenção dos novos elementos o conjunto \mathbf{Z} com a adição tem as propriedades:

- i. A-1 Existe um elemento neutro para a **adição** no novo conjunto.
- ii. A-2 Todo número inteiro tem um inverso aditivo.
- iii. A-3 A adição é comutativa.
- iv. A-4 A adição é associativa.

(3) (V)[J(F)[] É possível estender a multiplicação de \mathbf{N} ao conjunto \mathbf{Z} e então as propriedades

- i. M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- ii. M-2 Todo número inteiro tem um inverso multiplicativo.
- iii. M-3 A multiplicação é comutativa.
- iv. M-4 A multiplicação é associativa.

valem.

(5) (V)[J(F)[] É possível estender a multiplicação de \mathbf{N} ao conjunto \mathbf{Z} mas então nem todas propriedades seguintes são verdadeiras.

- i. M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- ii. M-2 Todo número inteiro tem um inverso aditivo.
- iii. M-3 A multiplicação é comutativa.
- iv. M-4 A multiplicação é associativa.

(7) (V)[J(F)[] As propriedades da estrutura algébrica $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ são

- i. A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**
- ii. A-2 Todo inteiro tem um inverso aditivo.
- iii. A-3 A adição é comutativa.
- iv. A-4 A adição é associativa.
- v. M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
- vi. M-3 A multiplicação é comutativa.
- vii. M-4 A multiplicação é associativa.

viii. AM-10 elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número inteiro resulta em zero.

ix. AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

valem no conjunto \mathbf{Z} munido das adição e multiplicação usuais.

- (11) (V) [] (F) [] A equação $4x + 7 = 31$ é possível, a solução é $x = 6$, mas não tenho regras para resolvê-la no conjunto dos números inteiros, sei resolvê-la por tentativas. Um programa de computador diria que esta equação é impossível alimentado com as regras da adição e multiplicação de números inteiros.

4. número racional e número irracional

Os números racionais são pares, numerador, denominador, como (p, q) , mas apresentados num formato que chamamos fração, $\frac{p}{q}$; $q \neq 0$ com propriedades bem conhecidas

$$\text{adição: } \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{nq}; \text{ multiplicação: } \frac{p}{q} \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}; \quad (6.1)$$

É o conjunto dos números racionais, \mathbf{Q} .

E os números reais, \mathbf{R} é o conjunto dos números racionais junto com os números irracionais.

- (2) (V) [] (F) [] Número irracional Os gregos descobriram que num quadrado, se o lado medisse 1 não seria possível medir, com exatidão as diagonais, chamaram este valor de $\sqrt{2}$.

- (3) (V) [] (F) [] $\sqrt{2}$ é um símbolo que funciona mesmo com operações aritméticas, e representa uma sucessão cujos sete primeiros termos podem ser

$$1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, \dots \quad (6.2)$$

- (5) (V) [] (F) [] $\sqrt{2}$ é um símbolo que funciona mesmo com operações aritméticas, e representa uma sucessão cujos sete primeiros termos podem ser

$$2, 1.5, 1.424, 1.4153, 1.41431, 1.414214, 1.4142136, \dots \quad (6.3)$$

- (7) (V) [] (F) [] As sucessões são funções definidas no conjunto dos números naturais e um número irracional é uma sucessão cujos valores são números racionais, uma sucessão de números racionais. Elas também são chamadas de dízimas e se dividem em duas classes

números racionais as dízimas periódicas,

números irracionais as dízimas não periódicas.

- (11) (V) [] (F) [] Uma dízima não periódica é um número racional.

5. número racional e número irracional, dízima

O conjunto dos números reais, \mathbf{R} , é o conjunto das dízimas que podem ser periódicas ou não periódicas. As dízimas são sucessões de números racionais s_n é o número racional que corresponde anular todos os dígitos a partir do n -ésimo:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \dots \quad (6.4)$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488 = s_{19}; \quad (6.5)$$

$$s_0 = 1.0000 \dots, s_1 = 1.4000 \dots, s_2 = 1.41000 \dots \quad (6.6)$$

A equação (eq.6) apresenta os termos s_0, s_1, s_2 de uma sucessão que representa $\sqrt{2}$. Porque há uma infinidade de sucessões que representam $\sqrt{2}$, o que há em comum entre elas é que elas tem o mesmo limite, elas todas representam o mesmo número cujo símbolo é $\sqrt{2}$.

Algo semelhante ocorre com as frações, que representam números racionais, há uma infinidade delas representando o mesmo número, apenas, neste caso existe “uma melhor fração”, a fração irredutível.

π é outro número real que também não é racional, “ π ” é um símbolo que representa

$$3.14159265358979323848\dots \quad (6.7)$$

$$t_0 = 3, t_1 = 3.1, t_2 = 3.14, t_3 = 3.141, t_4 = 3.1415, \dots \quad (6.8)$$

Há uma diferença prática entre estes dois símbolos, $\pi, \sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ me permite cálculos aritméticos,

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2}; \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2; \quad (6.9)$$

coisa que não posso fazer com o símbolo π .

Se a dízima for periódica então ela tem uma geratriz $\frac{p}{q}$

Você vê aqui um problema para o qual não há solução, eu não posso calcular o limite da sucessão que converge para $\sqrt{2}$, eu posso provar que este limite existe e depois usar uma aproximação para o seu valor. Acontece o mesmo com π , e e com qualquer número irracional.

(2) (V)[](F)[] “O produto de duas sucessões de números racionais é outra sucessão de números racionais” e isto equivale a dizer-se que “O produto de dois números racionais é outro número racional”. O mesmo se pode dizer da adição, portanto $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ é uma estrutura algébrica.

(3) (V)[](F)[] As frações podem ser somadas pela regra

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn}; q, n \neq 0; \quad (6.10)$$

então todo número racional tem um inverso aditivo:

$$\frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{-pq + pq}{q^2} = \frac{-p + p}{q} = 0; q \neq 0; \quad (6.11)$$

(5) (V)[](F)[] As frações podem ser multiplicadas pela regra

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}; q, n \neq 0; \quad (6.12)$$

então todo número racional $\frac{p}{q}$ tem um inverso multiplicativo, $\frac{q}{p}$.

(7) (V)[](F)[] As frações podem ser multiplicadas pela regra

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}; q, n \neq 0; \quad (6.13)$$

Todo número racional diferente de zero $\frac{p}{q}$, tem um inverso multiplicativo, $\frac{q}{p}$.

(11) (V)[](F)[] Para o conjunto dos números racionais são válidas as afirmações:

- i. A-1 Existe um elemento neutro para a **adição**
- ii. A-2 Todo número racional tem um inverso aditivo.

- iii. A-3 A adição é comutativa.
 iv. A-4 A adição é associativa.
 v. M-1 Existe um elemento neutro para a **multiplicação**
 vi. M-2 Existe um elemento inverso multiplicativo para toda fração cujo numerador seja diferente de zero:

$$\frac{p}{q} \frac{q}{p} = 1 \Leftrightarrow p, q \neq 0;$$

- vii. M-3 A multiplicação é comutativa.
 viii. M-4 A multiplicação é associativa.
 ix. AM-1O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número racional resulta em zero.
 x. AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

6. A reta numérica

Os números racionais tem uma propriedade que os tornam parecido com pontos numa reta: dados dois números racionais, sempre existe outro número racional entre eles. O mesmo se pode dizer de dois pontos sobre uma reta. Também se pode dizer sobre uma reta que dados dois pontos, A, B , eles determinam o segmento de reta \overline{AB} e que existe um ponto desta reta que não se encontra sobre o segmento \overline{AB} . Dados dois números racionais

$$a, b; a < b; \exists c \in \mathbb{Q}; c < a < b; \quad (6.14)$$

$$a, b; a < b; \exists d \in \mathbb{Q}; a < b < d; \quad (6.15)$$

Esta duas últimas propriedades falam da ordem em \mathbb{Q} e me permitem de fazer uma representação geométrica de \mathbb{Q} numa reta orientada.

- (2) (V)[](F)[] Se r for uma reta orientada então existe um ponto nela que representa o zero, O , dividindo-a em duas semirretas, a semirreta positiva e a semirreta negativa.
 (3) (V)[](F)[] Eu oriento uma reta escolhendo dois pontos, um que chamo de O , e representa o zero, e outro que chamo de I e representa a 1.
 (5) (V)[](F)[] Ao escolher dois pontos, um que chamo de O , e representa o zero, e outro que chamo de I e representa a 1, com um compasso eu posso determinar, sobre a reta orientada qualquer número inteiro.

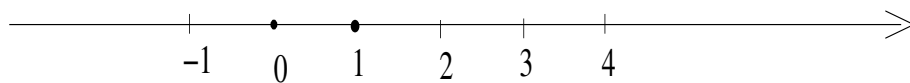


Figura 6.1: reta numérica, representação geométrica de \mathbb{R}

- (7) (V)[](F)[] Na figura (fig 6.2), página 115, você pode ver paralelas à reta que passa por 1, na reta horizontal e por 3 na reta oblíqua que permite encontrarem-se $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, na reta horizontal, entre 0 e 1, com relativa exatidão. Da mesma forma, traçando uma reta passando por 1, na horizontal, e por um número inteiro m qualquer na oblíqua, posso determinar as frações próprias de denominador m entre 0 e 1, de volta na reta horizontal, Verifique na figura (fig 6.2) na página 115, para $m = 3$.

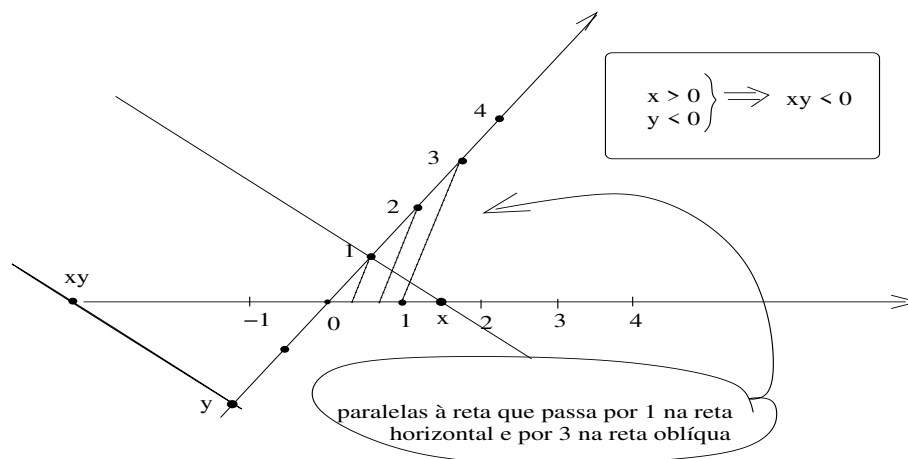


Figura 6.2: Determinação dos racionais na reta numérica

- (11) (V)[](F)[] Com um compasso eu posso transferir a diagonal dum retângulo de lado 1 sendo um dos vértices do retângulo a origem O o que mostra que a reta numérica contém números irracionais. A figura (fig 6.2) na página 115, mostra a reta numérica.

7. Números reais

Os números naturais, são números reais. Os números inteiros e os racionais também são números reais. O conjunto \mathbf{R} dos números reais contém todos os números naturais, inteiros e racionais. Como a reta numérica contém números irracionais, como é o caso de $\sqrt{2}$, ou \sqrt{n} ; $n \in \mathbf{N}$, então a reta representa o conjunto dos números reais. Um número real é o limite duma sucessão de números racionais, e esta afirmação vale para todos os números. Por exemplo, 3 é a sucessão constante $s_n = 3$, também $t_n = \frac{3}{4}$ é uma sucessão constante que representa $\frac{3}{4}$. Mas π ou $\sqrt{2}$ não são representados por sucessões constantes, eles são dízimas não periódicas.

O conjunto das sucessões que têm limite zero é fundamental no estudo do limite. Identifique quais são as afirmações que valem para as sucessões com limite zero. Nos itens que seguem, ϵ_n, δ_n representam sucessões que têm limite zero.

- (2) (V)[](F)[] Se uma sucessão ϵ_n tiver limite zero então, para qualquer o número real $r > 0$ existe um índice $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$k > N \Rightarrow |\epsilon_k| < r; r > 0 \quad (6.16)$$

- (3) (V)[](F)[] Se δ_n, ϵ_n tiverem limite zero então existem índices $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tal que

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < r; r > 0; \quad (6.17)$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r; r > 0; \quad (6.18)$$

$$k > N = \max N_1, N_2 k > N \Rightarrow |\delta_k| < r; \quad (6.19)$$

$$k > N = \max N_1, N_2 k > N \Rightarrow |\epsilon_k| < r; \quad (6.20)$$

$$(\exists N)(k > N \Rightarrow |\epsilon_k|, |\delta_k| < r); \quad (6.21)$$

quer dizer que existe um índice comum às duas sucessões, N , a partir do qual ambas ficam em módulo menor do que r para qualquer erro r que for dado.

(5) (V)[J(F)] Como na definição de limite zero no item 7 o erro r é um número real qualquer e objetivo é que seja “pequeno”, então posso supor que $0 < r < 1$ e isto mostra que o produto de duas sucessões com limite zero δ_k, ϵ_k se tem

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < r < 1; r > 0; \quad (6.22)$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r < 1; r > 0; \quad (6.23)$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\delta_k| < r; \quad (6.24)$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r; \quad (6.25)$$

$$(\exists N) k > N \Rightarrow |\epsilon_k \delta_k| < r^2 < r; \quad (6.26)$$

(7) (V)[J(F)] O produto de duas sucessões com limite zero é uma sucessão com limite zero.

(11) (V)[J(F)] Se δ_n, ϵ_n tiverem limite zero então existem índices $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < \frac{r}{2}; r > 0; \quad (6.27)$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < \frac{r}{2}; r > 0; \quad (6.28)$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\delta_k + \epsilon_k| < |\delta_k| + |\epsilon_k| < r; \quad (6.29)$$

o que prova que se duas sucessões forem de limite zero então a soma delas é uma sucesso de limite zero.

8. limite zero

Na definição de limite zero na questão 7, item 2, em que para cada erro $r > 0$ existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \Rightarrow |\epsilon_k| < r; r > 0 \quad (6.30)$$

eu sempre posso supor que $r < 1$ porque o objetivo é caracterizar que, em módulo, $|\epsilon_k|$ é menor do que qualquer erro r escolhido, e “erros devem ser pequenos”...

Esta escolha pode forçar que o índice seja muito grande para que a desigualdade comece a se verificar. Mas, e procure entender esta frase, “o primeiro milhão de termos duma sucessão são completamente irrelevantes”...ou o primeiro trilhão de termos!”Pelo menos para um programa de computador...

(2) (V)[J(F)] Considere a sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k}$. Como $\frac{1}{m} > \frac{1}{m+p}$ para quaisquer números naturais m, p então $r = \frac{1}{m}$ junto com $N = m$ satisfazem

$$(\forall r = \frac{1}{m})(\exists N = m)(k > N \Rightarrow |\frac{1}{k}| < r) \quad (6.31)$$

o que prova que a sucessão $\frac{1}{k}$ tem limite zero.

(3) (V)[J(F)] Como $m^p > m$ para números naturais $m, p; p > 1$ então a sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k^p}; p > 1$ é uma sucessão com limite zero.

(5) (V)[J(F)] A sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k^p}$ com $p > 1$ é uma sucessão com limite zero em que p é um número real maior do que 1.

(7) (V)[J(F)] sucessões equivalentes Considere dois polinômios P, Q como Q têm no máximo $n = \text{grau}(Q)$ raízes, então sucessão $s_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$ pode ser corrigida colocando-se um valor

qualquer arbitrário em lugar de $\frac{P(k)}{Q(k)}$ sempre que k for uma raiz de Q , definindo assim uma nova sucessão t_k . A sucessão

$$s_k - t_k \quad (6.32)$$

satisfaz

$$(\forall r)(\exists N)(k > N |s_k - t_k| < r) \quad (6.33)$$

é uma sucessão com limite zero, e para isto basta que N seja maior do qualquer uma das raízes de Q , portanto s_k e t_k têm limite.

(11) (V)[J(F)[] sucessões equivalentes Considere dois polinômios P, Q como Q têm no máximo $n = \text{grau}(Q)$ raízes, pelo teorema fundamental da Álgebra, então sucessão $s_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$ pode ser corrigida colocando-se um valor qualquer arbitrário em lugar de $\frac{P(k)}{Q(k)}$ sempre que k for uma raiz de Q , definindo assim uma nova sucessão t_k . A sucessão $s_k - t_k$ satisfaz

$$(\forall r)(\exists N)(k > N |s_k - t_k| < r) \quad (6.34)$$

e para isto basta que N seja maior do qualquer uma das raízes de Q . Mas disto não se pode deduzir que s_k e t_k sejam de limite zero ou nem mesmo tenham limite.

9. Indução finita

O conjunto $\mathbf{P}(A)$ é um conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A . Uma outra forma de dizer isto é que $\mathbf{P}(A)$ contém as combinações formadas com os elementos de A .

$$A = \{1, 2, \dots, n\}; n > 3; \quad (6.35)$$

(2) (V)[J(F)[] C_n^p é o número de subconjuntos com p elementos que é possível retirar de A .

(3) (V)[J(F)[]

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = n; \quad (6.36)$$

(5) (V)[J(F)[]

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (6.37)$$

(7) (V)[J(F)[]

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k; \quad (6.38)$$

(11) (V)[J(F)[]

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}; \quad (6.39)$$

gabarito:

10. triângulo de Pascal As potências de 11 até a quinta potência são

$$11^0 = 1 \quad (6.40)$$

$$11^1 = 11 \quad (6.41)$$

$$11^2 = 121 \quad (6.42)$$

$$11^3 = 1331 \quad (6.43)$$

$$11^4 = 14641 \quad (6.44)$$

correspondem às 5 primeiras linhas do Triângulo de Pascal

(2) (V) [J(F) [] Se considerarmos o símbolo 10 um novo algarismo, por exemplo na base 16,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

então

$$11^0 = 1 \quad (6.45)$$

$$11^1 = 11 \quad (6.46)$$

$$11^2 = 121 \quad (6.47)$$

$$11^3 = 1331 \quad (6.48)$$

$$11^4 = 14641 \quad (6.49)$$

$$11^5 = 15AA51 = 15101051 = \quad (6.50)$$

são as primeiras cinco linhas do triângulo de Pascal.

(3) (V) [J(F) [] Se considerarmos os símbolos 15, 20 como dois novos algarismo, por exemplo na base 21,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \text{AA}, \text{BB}, \dots$$

então

$$11^0 = 1 \quad (6.51)$$

$$11^1 = 11 \quad (6.52)$$

$$11^2 = 121 \quad (6.53)$$

$$11^3 = 1331 \quad (6.54)$$

$$11^4 = 14641 \quad (6.55)$$

$$11^5 = 15AA51 = 15101051 \quad (6.56)$$

$$11^6 = 16FKF61 = 1615201561 \quad (6.57)$$

são as primeiras seis linhas do triângulo de Pascal, embora esta notação não seja usual.

(5) (V) [J(F) [] é possível deduzir das potências de 11 as linhas do triângulo de Pascal,

(7) (V) [J(F) [] Considerando as bases hexadecimal,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

e a “base 21”, nada usual,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \text{AA}, \text{BB}, \dots$$

$$11^0 = 1 = 2^0 \quad (6.58)$$

$$11^1 = 1 + 1 = 2^1 \quad (6.59)$$

$$11^2 = 1 + 2 + 1 = 2^2 \quad (6.60)$$

$$11^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \quad (6.61)$$

$$11^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \quad (6.62)$$

$$11^5 = 1 + 5 + A + A + 5 + 1 = 2^5 \quad (6.63)$$

$$11^6 = 1 + 6 + F + K + F + 6 + 1 = 2^6 \quad (6.64)$$

se pode concluir que qualquer linha n do triângulo de pascal tenha como soma 2^n .

(11) (V) [] (F) [] Considerando as bases hexadecimal,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

e a "base 21", nada usual,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H

$$11^0 = 1 = 2^0 \quad (6.65)$$

$$11^1 = 1 + 1 = 2^1 \quad (6.66)$$

$$11^2 = 1 + 2 + 1 = 2^2 \quad (6.67)$$

$$11^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \quad (6.68)$$

$$11^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \quad (6.69)$$

$$11^5 = 1 + 5 + A + A + 5 + 1 = 2^5 \quad (6.70)$$

$$11^6 = 1 + 6 + F + K + F + 6 + 1 = 2^6 \quad (6.71)$$

se pode provar, usando indução finita, que qualquer linha n do triângulo de pascal tenha como soma 2^n .

gabarito:

11. número de elementos dum conjunto O triângulo de Pascal é um algoritmo, ou uma tabela cujas linhas eu vou enumerar a partir de zero de modo que a linha de ordem n vem na posição $n + 1$ e a primeira linha é de ordem zero. A primeira linha é a de ordem zero, e a segunda é de ordem 1. O segundo elemento de cada linha corresponde a ordem da linha.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$$(2) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad (1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1) \quad (6.72)$$

é a linha de ordem 6 e a soma dos seus elementos vale 2^6 .

$$(3) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad (1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1) \quad (6.73)$$

é a linha de ordem 7 e a soma dos seus elementos vale 2^7 .

$$(5) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad (1 \ 10 \ 45 \ 120 \ 210 \ 252 \ 210 \ 120 \ 45 \ 10 \ 1) \quad (6.74)$$

é a linha de ordem 11 e a soma dos seus elementos vale 2^{11} .

$$(7) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad (1 \ 10 \ 45 \ 120 \ 210 \ 252 \ 210 \ 120 \ 45 \ 10 \ 1) \quad (6.75)$$

é a linha de ordem 10 e a soma dos seus elementos vale 2^{10} .

$$(11) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad (1 \ 10 \ 45 \ 120 \ 210 \ 252 \ 210 \ 120 \ 45 \ 10 \ 1) \quad (6.76)$$

é a linha de ordem 10 e a soma dos seus elementos vale 2^{10} .

gabarito:

12. Indução Finita

A soma dos $n + 1$ primeiros números naturais,

$$0, 1, \dots, n$$

é dada por uma função f do segundo grau

$$(2) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad f(n) = 2n^2$$

$$(3) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad f(n) = \frac{n^2}{2}$$

$$(5) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad f(n) = n^2$$

$$(7) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(11) \quad \underline{(V)[J(F)[J]} \quad f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

gabarito:

13. soma dos termos numa sucessão Se o termo geral numa sucessão for do primeiro grau, a soma dos seus termos é dada por uma sucessão cujo termo geral é

(2) (V)[J(F)[J] do segundo grau.

(3) (V)[J(F)[J] também do primeiro grau.

(5) (V)[J(F)[J] do terceiro grau.

(7) (V) [](F) [] do quarto grau.

(11) (V) [](F) [] do quinto grau.

gabarito:

14. sucessão e série, p.a.

$$s_n = a(n - 1) + b; a, b \text{ dois números dados ;} \quad (6.77)$$

$$s_1 = b \text{ é o primeiro termo ;} \quad (6.78)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n s_k; \quad (6.79)$$

são duas sucessões, a segunda, $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$, é chamada de série com termo geral s_k , mas são duas sucessões. O estudo das séries oferece uma dificuldade extra pois depende do comportamento do termo geral. O estudo das séries implica no estudo de duas sucessões acopladas.

(2) (V) [](F) [] O termo geral da série S é uma progressão aritmética,

$$s_n = a(n - 1) + b; \quad (6.80)$$

em que a, b são dois números dados.

(3) (V) [](F) [] Considere a série S e o seu termo geral s . Então

$$s_n = S_{n+1} - S_n; \quad (6.81)$$

(5) (V) [](F) [] Considere a série S e o seu termo geral s . Então

$$s_n = S_n - S_{n-1}; \quad (6.82)$$

(7) (V) [](F) [] A série $S = (S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é do segundo grau. Então o seu termo geral também é do segundo grau.

(11) (V) [](F) [] A série $S = (S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é do segundo grau porque o seu termo geral é do primeiro grau e $S_n = \frac{an^2 + n(2b-a)}{2}$

gabarito:

15. progressões polinomiais, sucessões polinomiais

Considere um polinômio P do grau 2 e a sucessão

$$s_k = P(k) = ak^2 + bk + c; ; k \in \mathbf{N}; \quad (6.83)$$

é uma progressão quadrática.

(2) (V) [](F) [] A expressão que define s_k é

$$s_k = ak^2 + bk + c; \quad (6.84)$$

(3) (V)[](F)[] A soma

$$\sum_{k=0}^n s_k = a \sum_{k=0}^n k^2 + b \sum_{k=0}^n k + (n+1)c; \quad (6.85)$$

soma de quadrados, soma dos termos numa p.a., e um múltiplo da constante c .

(5) (V)[](F)[] A soma

$$\sum_{k=0}^n s_k = a \sum_{k=0}^n k^2 + b \sum_{k=0}^n k + (n+1)c; \quad (6.86)$$

soma de quadrados, soma dos termos numa p.a., multiplicadas pelas constantes a, b , respectivamente, e um múltiplo da constante c que depende do número de termos.

(7) (V)[](F)[] Sabendo somar quadrados, se pode obter a soma de qualquer progressão quadrática.

(11) (V)[](F)[] Sabendo somar quadrados, e sabendo somar progressões aritméticas, se pode obter a soma de qualquer progressão quadrática.

gabarito:

16. progressões polinomiais

Considere um polinômio $P(x) = ax^2$, do grau 2, a progressão quadrática,

$$s_k = P(k); k \in \mathbf{N}; \quad (6.87)$$

e a série $\sum_{k=0}^n s_k = S_n$.

(2) (V)[](F)[] $S_{n+1} - S_n = s_{n+1}$;

(3) (V)[](F)[] Se Q for um polinômio do terceiro grau, então as diferenças $Q_{n+1} - Q_n$ são um polinômio do grau 2.

(5) (V)[](F)[] Existe um polinômio do terceiro grau, Q , de modo que

$$Q_{n+1} - Q_n = n^2 \quad (6.88)$$

(7) (V)[](F)[] Existe um único polinômio do terceiro grau,

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (6.89)$$

tal que $S_n = \sum_{k=0}^n s_k = Q(n+1) - Q(0)$

(11) (V)[](F)[] Existe um polinômio do terceiro grau,

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (6.90)$$

tal que $S_n = \sum_{k=0}^n s_k = Q(n) - Q(0)$

gabarito:

17. número e, sucessões e limite

Considere a sucessão de números racionais definida por

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (6.91)$$

(2) (V)[](F)[]

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k}; \\ S_n = \sum_{k=0}^n s_k; s_k = \frac{C_n^k}{n^k}; \\ s_k = \frac{n!}{(n-k)!k!n^k}; \end{cases} \quad (6.92)$$

(3) (V)[](F)[]

$$S_n = \sum_{k=0}^n s_k = 2^n \left(1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^n}\right); \quad (6.93)$$

(5) (V)[](F)[]

$$S_n = \sum_{k=0}^n s_k; s_k = \frac{C_n^k}{n^k}; \quad (6.94)$$

$$m > n \Rightarrow S_m > S_n; S_n \text{ é uma sucessão crescente}; \quad (6.95)$$

(7) (V)[](F)[]

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists K \in \mathbf{N}) (m > n > K \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon); \quad (6.96)$$

(11) (V)[](F)[] A sucessão S_n é uma sucessão de Cauchy, portanto convergente.gabarito:

18. Números Complexos Um número complexo é apenas uma par de números reais $a+bi$ e valem todas as propriedades dos números reais para os números complexos nesta questão você vai resolver equações do primeiro grau com coeficientes complexos. Por exemplo

$$4z + 7 = 3 + 8i; \quad (6.97)$$

(2) (V)[](F)[] Então

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow 4z = 10 + 8i; \quad (6.98)$$

(3) (V)[](F)[] Então

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow 4z = -4 + 8i; \quad (6.99)$$

(5) (V)[](F)[] Então

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z = -1 + 2i; \quad (6.100)$$

(7) (V)[](F)[] Então

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z + \frac{7}{4} = \frac{3 + 8i}{4}; \quad (6.101)$$

(11) (V)[](F)[]

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z = \frac{3 + 8i}{4} - \frac{7}{4} = \frac{-4 + 8i}{4} = -1 + 2i; \quad (6.102)$$

gabarito:

19. limite de sucessões

A equação

$$s_n = \frac{1}{n+1} \quad (6.103)$$

define uma sucessão quando $n \in \mathbf{N}$.

(2) (V)[](F)[] $s_n \neq 0$ para qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.

(3) (V)[](F)[] A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é crescente.

(5) (V)[](F)[] A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é decrescente.

(7) (V)[](F)[] A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ não é decrescente.

(11) (V)[](F)[] A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ não é crescente.

gabarito:

20. limite de sucessões A equação

$$t_n = \frac{n+1}{n}; s_n = \frac{1}{n+1}; \quad (6.104)$$

define duas sucessões quando $n \in \mathbf{N}$. Decida quais das alternativas são verdadeiras ou falsas.

(2) (V)[](F)[] $t_n = \frac{1}{s_n}$

(3) (V)[](F)[] $t_n = 1 + \frac{1}{n}$

(5) (V)[](F)[] $t_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + 2s_n$

(7) (V)[](F)[] $t_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + s_n$

(11) (V)[](F)[] t_n é uma sucessão decrescente.

gabarito:

21. série

Chama-se série uma sucessão cujos termos são a soma dos termos de uma outra sucessão:

$$S_n = \sum_{k=0}^n s_k \quad (6.105)$$

S é a série de termo geral s_k . Se S_n for uma série como está expresso na equação (eq.105), identifique as afirmações que são verdadeiras.

(2) (V)[](F)[] $S_{n+1} - S_n = s_n$

(3) (V)[](F)[] $S_{n+1} - S_n = s_{n+1}$ é verdadeira e é uma forma alternativa da equação (eq.105).

(5) (V)[](F)[] Uma forma alternativa da equação (eq.105) é o sistema de equações abaixo, se também for fornecido o valor de $S_0 = s_0$

$$\begin{cases} S_0 = s_0; \\ S_{k+1} - S_k = s_k \end{cases} \quad (6.106)$$

- (7) $(V)[J(F)[]]$ Se $s_k = \frac{1}{k+1}$ então a série de termo geral s_k é uma sucessão decrescente.
- (11) $(V)[J(F)[]]$ Se $s_k = \frac{-1}{k+1}$ então a série de termo geral s_k é uma sucessão crescente.

gabarito:

22. Limite zero Considere a sucessão $s_n = \frac{1}{n}$. Decida quais das afirmações são verdadeiras.

- (2) $(V)[J(F)[]]$ Existe um índice N tal que, qualquer que seja $k > N$ se tem que $s_k < 0.1$.
- (3) $(V)[J(F)[]]$ Existe um índice N tal que, qualquer que seja $k > N$ se tem que $s_k < 0.01$.
- (5) $(V)[J(F)[]]$ Existe um índice N tal que, qualquer que seja $k > N$ se tem que $s_k < 0.001$.
- (7) $(V)[J(F)[]]$ Existe um índice N tal que, qualquer que seja $k > N$ se tem que $s_k < 0.0001$.
- (11) $(V)[J(F)[]]$ Dado um número positivo δ , existe um índice N tal que, qualquer que seja $k > N$ se tem que $s_k < \delta$ ou equivalentemente

$$(\forall \delta > 0)(\exists N)(k > N \Rightarrow s_k < \delta) \quad (6.107)$$

As sucessões que satisfizerem à condição da equação (eq.107) se diz terem limite zero, ou que definem o zero.

gabarito:

23. sucessões que definem o zero

Definição 13 (limite) zero

As sucessões que satisfizerem à condição da equação (eq.107) se diz ter limite zero, ou que definem o zero.

Considere duas sucessões s_k, t_k que definam o zero (ou, equivalentemente, que tenham limite zero).

- (2) $(V)[J(F)[]]$ Dado qualquer número real R , a sucessão definida por $r_k = R s_k$, ou seja um múltiplo de s_k pelo número R também define o zero.
- (3) $(V)[J(F)[]]$ A sucessão soma

$$h = s + t; h_k = s_k + t_k; \quad (6.108)$$

também define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero.

- (5) $(V)[J(F)[]]$ A sucessão produto
- $$h = st; h_k = s_k t_k; \quad (6.109)$$

também define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero.

- (7) $(V)[J(F)[]]$ A sucessão $j_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero, porque é um produto de sucessões que tem limite zero.
- (11) $(V)[J(F)[]]$ Para qualquer número natural estritamente positivo p , a sucessão $h_k = \frac{1}{(k+1)^p}$ define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero, porque é um produto de sucessões que tem limite zero.

gabarito:

Na figura (fig 6.3), página 126,

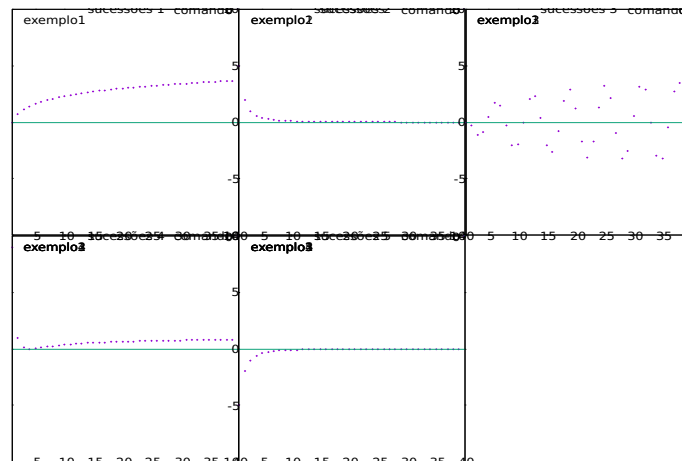


Figura 6.3: sucessões

24. sucessão crescente, decrescente Se “inspire” no gráfico da figura (fig 6.3), página 126, e decida qual é opção verdadeira.

- (2) Na figura (fig 6.3), página 126, a sucessão etiquetada com (a) é crescente.
 (3) Na figura (fig 6.3), página 126, a sucessão etiquetada com (b) é crescente.
 (5) Na figura (fig 6.3), página 126, a sucessão etiquetada com (c) é crescente.
 (7) Na figura (fig 6.3), página 126, a sucessão etiquetada com (d) é crescente.
 (11) Na figura (fig 6.4), página 127, a sucessão etiquetada com (e) é crescente.

gabarito:

25. sucessão crescente Os nomes se assemelham, “sucessão limitada” e “sucessão que tem limite”, mas se referem à conceitos diferentes. Se uma sucessão tiver limite ela tem que ser uma sucessão limitada e a recíproca não é verdadeira. Decida quais das afirmações é verdadeiras.

- (2) A sucessão de termo geral $s_k = (-1)^k$ é negativa e crescente.
 (3) A sucessão de termo geral $s_k = \frac{-1}{2^k}$ é negativa e crescente.
 (5) A sucessão de termo geral $s_k = \frac{1}{2^k}$ é positiva e decrescente.
 (7) A sucessão de termo geral $s_k = (-1)^k$ é oscilante, é limitada e não tem limite.
 (11) A sucessão de termo geral $s_k = (-1)^k k$ é oscilante e não é limitada.

gabarito:

26. Equação da reta tangente A derivada tem um definição intuitiva, ou geométrica, que não serve para calcular a derivada: é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico duma função, se existir uma tal reta tangente.

No cálculo do limite existem dois tipos de operações de natureza distinta

- (a) operações aritméticas, ou algébricas, que produzem, a cada passo, expressões aritmeticamente equivalentes.

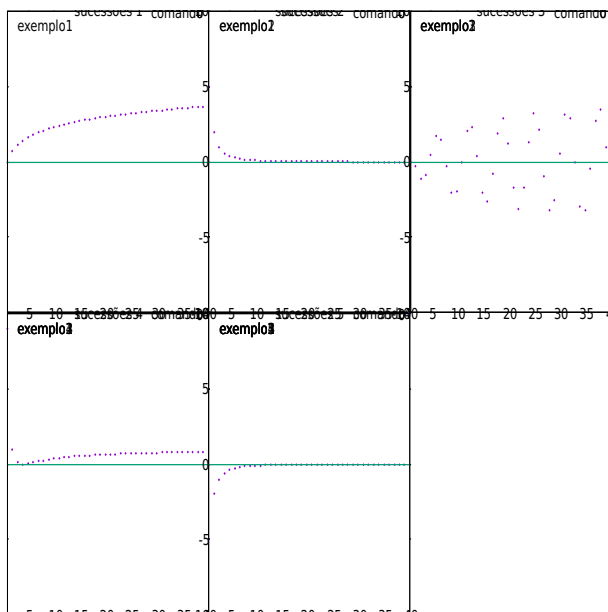


Figura 6.4: sucessão crescente para $\sqrt{2}$

(b) um salto lógico pela via do qual identificamos algum dos limites notáveis nas expressões transformadas pela via das operações o que nos permite obter o limite.

É exatamente este salto lógico que torna impossível construir um programa para calcular limites automaticamente. Também é esta a principal dificuldade no processo de ensino de limite.

Esta questão vai dar exemplos destes dois tipos de operações. A diferença entre eles é que, um será marcado por uma sucessão de igualdades, e o salto lógico com o símbolo “ \rightarrow ” apontando para o limite. Este salto, os humanos entendem e a “IA” não consegue reproduzir...

A figura (fig 6.5), na página 128, lhe mostra, geometricamente, o significado da derivada e duma reta secante que representa uma aproximação da reta tangente e o erro é visível e foi escolhido de propósito.

(2) Equação da reta tangente No gráfico duma função, confira figura (fig 6.5), página 128, posso construir a secante passando nos pontos

$$(a, f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x));$$

O coeficiente angular da reta secante é

$$m = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (6.110)$$

(3) Equação da reta tangente No gráfico duma função, confira figura (fig 6.5), página 128, posso construir a secante passando nos pontos $(a, f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. O coeficiente angular da reta secante é

$$m = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (6.111)$$

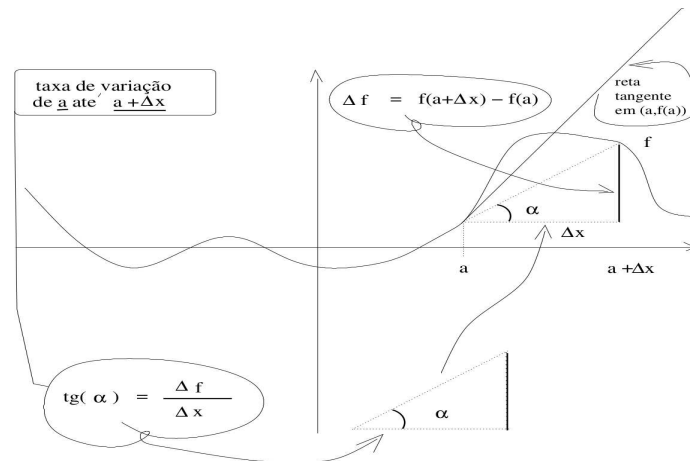


Figura 6.5:

(5) (V)[](F)[] Suponha que f seja um polinômio do terceiro grau. Então o coeficiente angular da reta secante é

$$\begin{cases} f(x) = a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0; \\ m = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = a_3(a - (a + \Delta x))^3 + a_2(a - (a + \Delta x))^2 + a_1(a - (a + \Delta x)) + a_0; \end{cases} \quad (6.112)$$

(7) (V)[](F)[] Suponha que f seja um polinômio do terceiro grau. Então o coeficiente angular da reta secante é m

$$\begin{cases} f(x) = a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0; \\ f(a) = a_0; \\ m = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = \frac{a_3\Delta x^3 + a_2\Delta x^2 + a_1\Delta x}{\Delta x} = \\ = a_3\Delta x^2 + a_2\Delta x + a_1; \\ \Delta x \text{ uma sequência nula} \Rightarrow a_3\Delta x^2 + a_2\Delta x + a_1 \rightarrow a_1 \end{cases} \quad (6.113)$$

(11) (V)[](F)[] Suponha que g seja um polinômio do terceiro grau e que Δx seja uma sequência nula, que convirja para zero. Então

$$\begin{cases} g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x} = \frac{a_3(a+\Delta x)^3 + a_2(a+\Delta x)^2 + a_1(a+\Delta x) + a_0 - g(a)}{\Delta x} = \\ = \frac{a_3(3a^2\Delta x + 3a\Delta x^2 + \Delta x^3) + a_2(2a\Delta x + \Delta x^2) + a_1\Delta x}{\Delta x} = \\ = 3a_3a^2 + 3a_3a\Delta x + a_3\Delta x^2 + 2a_2a + a_2\Delta x + a_1 \rightarrow 3a_3a^2 + 2a_2a + a_1; \\ g'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1; \end{cases} \quad (6.114)$$

27. cálculo do limite

Se dadas duas sucessões, s_k e t_k a sucessão $s_k - t_k$ tiver limite zero então estas duas sucessões são equivalentes o que significa

(a) ambas têm o mesmo limite,

(b) se uma delas não tiver limite, então a outra também não tem limite.

O primeiro caso é interessante porque permite que se façam cálculos aritméticos para construir sucessões equivalentes a partir do que se pode deduzir o limite duma determinada sucessão. Esta questão usa esta técnica.

(2) (V)[J(F)][] A sequência de cálculos

$$s_k = \frac{k^3 + 3k^2 + k + 1}{4k^3} = \frac{k^3}{4k^3} + \frac{3k^2}{4k^3} + \frac{k}{4k^3} + \frac{1}{4k^3} \quad (6.115)$$

$$\frac{1}{4k^3} \rightarrow 0; \quad (6.116)$$

$$\frac{k}{4k^3} = \frac{1}{4k^2} \rightarrow 0; \quad (6.117)$$

$$\frac{3k^2}{4k^3} = \frac{3}{4k} \rightarrow 0; \quad (6.118)$$

$$\frac{k^3}{4k^3} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}; \quad (6.119)$$

A seta, ao final das contas, significa “tem limite”. O limite da sucessão s_k é $\frac{1}{4}$ ou

$$s_k \rightarrow \frac{1}{4};$$

(3) (V)[J(F)][] Se dois polinômios P, Q forem de grau n tal que

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + \dots \\ Q(x) = b_n x^n + \dots \end{cases} \quad (6.120)$$

então o limite da sucessão $\frac{P(k)}{Q(k)}$ é $\frac{a_n}{b_n}$. Não se confunda, n, a_n, b_n são constantes.

(5) (V)[J(F)][] O limite da sucessão

$$\frac{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340}{5k^5} \quad (6.121)$$

é $\frac{3}{5}$

(7) (V)[J(F)][] A sucessão

$$\frac{5k^4}{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340} \quad (6.122)$$

tem limite zero.

(11) (V)[J(F)][] A sucessão

$$\frac{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340}{5k^4} \quad (6.123)$$

tem limite zero.

28. cálculo do limite Analise os cálculos e decida quais das sucessões definidas nas opções seguintes, tem limite.

(2) (V)[J(F)[]

$$s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t}; \quad (6.124)$$

$$s_k = \frac{3t^2}{9t^2+3t} + \frac{3t}{9t^2+3t} + \frac{1}{9t^2+3t}; \quad (6.125)$$

$$s_k = \frac{3}{9+\frac{3}{t}} + \frac{3}{9t+3} + \frac{1}{9t^2+3t}; \quad (6.126)$$

(3) (V)[J(F)[]

$$s_k = \frac{3t^{20}+3t+1}{7t^{20}+3t}; \quad (6.127)$$

$$s_k = \frac{3t^{20}}{7t^{20}+3t} + \frac{3t}{7t^{20}+3t} + \frac{1}{7t^{20}+3t}; \quad (6.128)$$

$$s_k = \frac{3}{7+\frac{3}{t^{19}}} + \frac{3}{7t^{19}+3} + \frac{1}{7t^{20}+3t}; \quad (6.129)$$

(5) (V)[J(F)[]

$$s_k = \frac{3t^9+3t+1}{20t^{10}+3t^3}; \quad (6.130)$$

$$s_k = \frac{3t^9}{20t^{10}+3t^3} + \frac{3t}{20t^{10}+3t^3} + \frac{1}{20t^{10}+3t^3}; \quad (6.131)$$

$$s_k = \frac{3}{20t+\frac{3}{t^6}} + \frac{3}{20t^9+3t^2} + \frac{1}{20t^{10}+3t^3}; \quad (6.132)$$

(7) (V)[J(F)[]

$$s_k = \frac{10t^7+3t+1}{t^5+3t^2}; \quad (6.133)$$

$$s_k = \frac{10t^2}{1+3t^{-3}} + \frac{3}{t^4+3t} + \frac{1}{t^5+3t^2}; \quad (6.134)$$

(11) (V)[J(F)[]

$$s_k = \frac{3t^4+3t+1}{5t^2+3t}; \quad (6.135)$$

$$s_k = \frac{3t^4}{5t^2+3t} + \frac{3t}{5t^2+3t} + \frac{1}{5t^2+3t}; \quad (6.136)$$

$$s_k = \frac{3t^2}{5+3t^{-1}} + \frac{3}{5t+3} + \frac{1}{5t^2+3t}; \quad (6.137)$$

gabarito:

29. cálculo do limite Decida quais das opções abaixo é verdadeira. Observe que há dois conceitos diferentes e independentes:

- uma sucessão é limitada, então ela fica entre duas retas paralelas ao eixo OX ,
- uma sucessão tem limite, então ela se aproxima arbitrariamente duma reta paralela ao eixo OX .

(2) (V)[J(F)[] a sucessão $s_k = \frac{3t^{20}+3t+1}{9t^{20}+3t}$ é limitada e tem limite $\frac{3}{9}$.

(3) (V)[J(F)[] a sucessão $s_k = \frac{3t^2+3t+1}{7t^2+3t}$ é limitada e tem limite $\frac{3}{7}$.

(5) (V)[J(F)[] a sucessão $s_k = \frac{3t^5+3t+1}{20t^5+3t^3}$ é limitada e tem limite $\frac{3}{20}$.

(7) (V)[J(F)[] a sucessão $s_k = \frac{10t^5+3t+1}{t^5+3t^2}$ é limitada e tem limite 10.

(11) (V)[J(F)[]] a sucessão $s_k = \frac{300t^{400}+3t+1}{50t^{400}+3t}$ é limitada e tem limite 6.

gabarito:

30. cálculo do limite

$$(2) \quad \underline{(V)[J(F)[]]} \quad s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t} \text{ então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0 \quad (6.138)$$

$$(3) \quad \underline{(V)[J(F)[]]} \quad s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t} \text{ então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{3}{9} \quad (6.139)$$

$$(5) \quad \underline{(V)[J(F)[]]} \quad s_k = \frac{3t^9+3t+1}{21t^9+3t^3} \text{ então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{7} \quad (6.140)$$

$$(7) \quad \underline{(V)[J(F)[]]} \quad s_k = \frac{10t^5+3t+1}{t^7+3t^2} \text{ então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0 \quad (6.141)$$

$$(11) \quad \underline{(V)[J(F)[]]} \quad s_k = \frac{3t^4+3t+1}{5t^2+3t} \text{ então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty \quad (6.142)$$

gabarito:

31. cálculo do limite Considere a função

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} \quad (6.143)$$

(2) (V)[J(F)[]] f está definida para todos os números reais.

(3) (V)[J(F)[]] f não está definida para $x = 2$.

(5) (V)[J(F)[]] Considere a sucessão $s_k = 2 + \frac{1}{k}$.

$$\frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{k} \rightarrow 2 + 0 = 2; \quad (6.144)$$

Os cálculos mostram que s converge para 2.

(7) (V)[J(F)[]] Considere a sucessão $t_k = \frac{2k+3}{k+4}$

$$\frac{2k+3}{k+4} = \frac{2k}{k+4} + \frac{3}{k+4}; \quad (6.145)$$

$$\frac{2k}{k+4} = \frac{2}{1+\frac{4}{k}}; 1 + \frac{4}{k} \rightarrow 1; \frac{2}{1+\frac{4}{k}} \rightarrow 2; \quad (6.146)$$

$$\frac{3}{k+4} \rightarrow 0; \quad (6.147)$$

$$\frac{2k+3}{k+4} \rightarrow 2 + 0 = 2 \quad (6.148)$$

Os cálculos mostram que t converge para 2.

(11) (V) [] (F) [] Aplicando a função f à sucessão $s_k = 2 + \frac{1}{k}$ resulta numa nova sucessão $r_k = f(s_k)$.

$$r_k = f(s_k) = \frac{3}{(s_k - 2)^2}; \quad (6.149)$$

$$s_k \rightarrow 2 \Rightarrow s_k - 2 \rightarrow 0 \Rightarrow (s_k - 2)^2 \rightarrow 0; \quad (6.150)$$

$$(6.151)$$

Os cálculos mostram que a sucessão $r_k = f(s_k)$ não tem limite, porque o limite do denominador é zero, e também não é limitada, também porque o limite do denominador é zero.

gabarito:

32. continuidade

Definição 14 (continuidade) sequencial

Se diz que uma função é contínua, ou sequencialmente contínua quando ela preserva convergência de sucessões, se para uma sucessão qualquer,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall s; \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(s_k) = f(a)); \\ (\forall s; s_k \rightarrow a) (f(s_k) \rightarrow f(a)); \\ (f(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(s_k)); \end{array} \right. \quad (6.152)$$

As três expressões na equação (eq.152) são idênticas, na última você vê o trocadilho “ f do limite é o limite da f ”, expressando que o símbolo f comuta com símbolo do limite. Se este último limite não existir, para alguma sucessão, então f não é contínua. As funções contínuas são aquelas que preservam limite. As sucessões convergentes de números racionais são os números reais.

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \quad (6.153)$$

(2) (V) [] (F) [] f é uma função contínua definida em toda a reta real.

(3) (V) [] (F) [] f não está definida no ponto $x = 1$.

(5) (V) [] (F) [] f não é contínua no ponto $x = 1$.

(7) (V) [] (F) [] f preserva convergência em qualquer ponto da reta.

(11) (V) [] (F) [] Como $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 2x+3$ se $x \neq 1$, então eu posso “redefinir” f com a equação

$$g(x) = \begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \\ x = 1 \Rightarrow g(1) = 5 = 2x+3|_{(x=1)}; \end{cases} \quad (6.154)$$

g é contínua, mas $f \neq g$.

gabarito:

Este tipo de exemplo é muito usado para mostrar que existem funções que não são contínuas, embora eles deixem as alunas com impressão que descontinuidade é um truque para ser usado em provas.

33. Limite de sucessões Considere as funções

$$f_1(x) = \frac{3}{(x-2)^2}; \quad (6.155)$$

$$f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8; \quad (6.156)$$

$$f_3(x) = x^2 - 4; \quad (6.157)$$

(2) (V) [] (F) [] A função f_3 está definida para qualquer número real.

(3) (V) [] (F) [] A função f_1 está definida para qualquer número real.

(5) (V) [] (F) [] A função f_2 está definida para qualquer número real.

(7) (V) [] (F) [] s é uma sucessão convergindo para 2,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 2 \quad (6.158)$$

então $\lim_{k \rightarrow \infty} f_1(s_k)$ não existe.

(11) (V) [] (F) [] A função f_2 ao ser aplicada à sucessão $s = (s_k)$ produz uma nova sucessão $t_k = f_2(s_k)$. Os cálculos seguintes mostram que a sucessão t_k converge para zero,

$$f_2(s_k) = s_k^3 - 6s_k^2 + 12s_k - 8; \quad (6.159)$$

$$s_k^3 \rightarrow 2^3 = 8; -6s_k^2 \rightarrow -6 * 2^2 = -24; 12s_k \rightarrow 12 * 2 = 24; \quad (6.160)$$

$$s_k^3 - 6s_k^2 + 12s_k - 8 \rightarrow 8 - 24 + 24 + 8 = 0; \quad (6.161)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_2(s_k) = 0; \quad (6.162)$$

porque $s = (s_k) \rightarrow 2$ e $f(2) = 0$.

gabarito:

34. área limitada pelo gráfico Um móvel se desloca à velocidade constante de 20 km/h a partir dum certo instante. O gráfico na figura (6.6), página 133, mostra descreve a velocidade do móvel ao

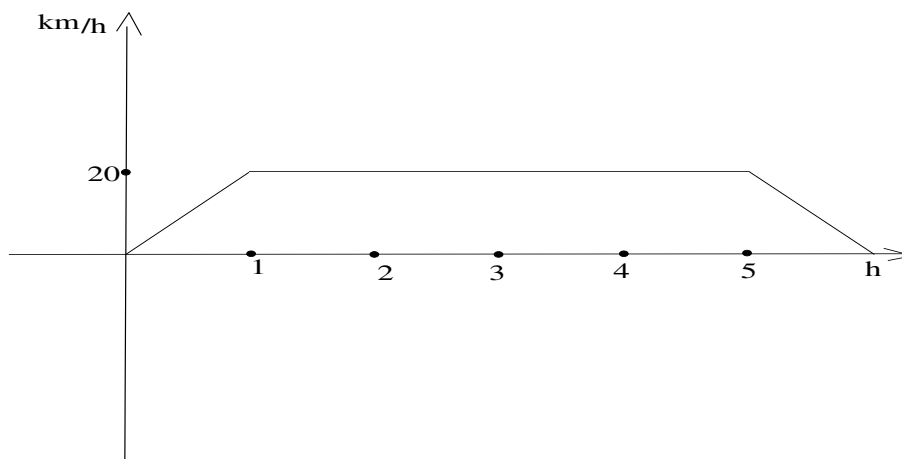


Figura 6.6: velocidade contra tempo

longo do tempo.

- (2) $(V)[](F)[]$ A velocidade do móvel é constante.
- (3) $(V)[](F)[]$ A velocidade do móvel cresce uniformemente desde zero até atingir a velocidade constante de 20km/h.
- (5) $(V)[](F)[]$ O móvel para, abruptamente, ficando com velocidade zero após 5 horas de percurso.
- (7) $(V)[](F)[]$ A velocidade do móvel decresce uniformemente para zero após 5 horas de percurso.
- (11) $(V)[](F)[]$ A distância percorrida pelo móvel corresponde à área delimitada pelo gráfico na figura (6.6), página 133, é 60 km.

gabarito:

35. oscilador e limite Suponha que um móvel esteja instalado num trilho eletromagnético dentro duma urna de vidro hermeticamente fechada com vácuo. Na posição inicial do móvel se encontra uma “placa” indicando “Fim da linha”.

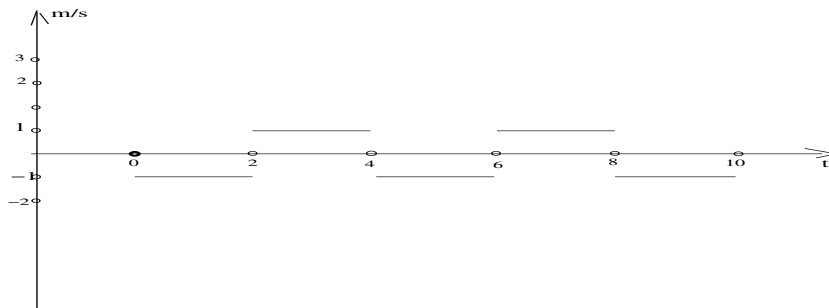


Figura 6.7: velocidade contra o tempo

Suponha, além disto, que o móvel seja imantado de modo que quando o trilho for eletrificado o móvel deslize sobre o mesmo sem atrito e que seja possível imprimir-lhe movimento externamente com auxílio duma alavanca devidamente calibrada de modo que ele atinja instantaneamente a velocidade de 1m/s, sempre partindo do “Fim da linha” para percorrer o trilho que mede 2m. Em cada extremo do trilho se encontra um material perfeitamente elástico de modo que móvel ao bater nestes anteparos reverte o sentido da velocidade sem perder energia cinética.

Ao começar a experiência sempre se inicializa o contador do tempo de modo que o $t_0 = 0$, a condição inicial, e o móvel volta automaticamente para a posição “Fim da linha” que é a condição inicial do experimento.

Seja $v(t)$ a função que descreve a velocidade do móvel dentro da urna com vácuo em movimento sobre o trilho.

- (2) $(V)[](F)[]$
A figura (fig 6.7), página 134, traz o gráfico da velocidade v do móvel.
- (3) $(V)[](F)[]$ A velocidade v do móvel é uma função descontínua de segunda espécie (a continuidade não é restaurável).
- (5) $(V)[](F)[]$ Suponha que o trilho onde se se movimenta o móvel tenha comprimento 2m entre os batentes. A velocidade v tem um salto a cada 2 minutos.
- (7) $(V)[](F)[]$ Suponha que o trilho onde se se movimenta o móvel tenha comprimento 2m entre os batentes. A velocidade v tem um salto a cada 2 segundos.

(11) (V) [] (F) [] Em quatro minutos o móvel percorre a distância zero metros.

gabarito:

36. função primitiva Considere a figura (fig 6.8), página 135, contendo gráfico da velocidade contra

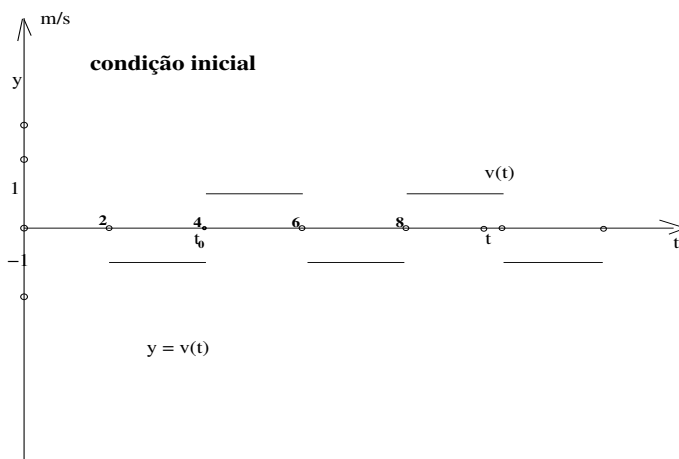


Figura 6.8: condição inicial

o tempo dum trem oscilando sobre um trilho magnético descrito na questão 35. A área limitada pelo gráfico da velocidade $y = v(t)$ e o eixo dos tempos é a distância percorrida pelo trem, é uma função do tempo

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(x) dx; \quad (6.163)$$

O símbolo na equação (eq.163) é chamado de integral e representa a área limitada pelo gráfico da função $y = v(t)$ e pelo eixo Ot entre dois pontos dados, t_0, t em que o primeiro ponto, t_0 , é chamado de condição inicial.

(2) (V) [] (F) [] A área que define $y = s(t)$ é formada de áreas de retângulos.

(3) (V) [] (F) [] Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.8), página 135, então

$$s(6) = 2m \quad (6.164)$$

(5) (V) [] (F) [] Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.8), página 135, então

$$s(8) = 0 \quad (6.165)$$

significando isto que o trem está volta na extremidade inicial do trilho, onde se encontra a placa “IFim da linha”.

(7) (V) [] (F) [] Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.8), página 135, então

$$s(9) = 1m \quad (6.166)$$

(11) (V) [] (F) [] O gráfico da função-distância, $y = s(t)$, que aparece na figura (fig 6.9), página 136, é uma função contínua.

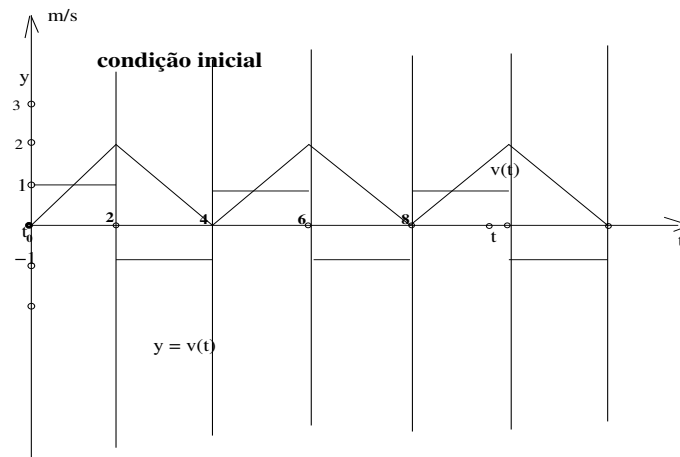


Figura 6.9: movimento oscilatório

gabarito:37. soma dos quadrados

O binômio de Newton pode ajudar nos cálculos e as linhas do triângulo de Pascal mostram os coeficientes do binômio em cada linha. Até a terceira linha é

1				$(a + b)^0 = 1$
1	1			$(a + b)^1 = 1a + 1b$
1	2	1		$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1	3	3	1	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

que é o necessário para esta questão.

Uma progressão aritmética é uma sucessão cujos termos são definidos por um polinômio do primeiro grau. A soma dos termos p.a. é dada por um polinômio do segundo grau:

$$\sum_{i=1}^k i = \sum_{i=1}^k P(i) = \frac{k+1}{2}k = Q_2(k); \quad (6.167)$$

em que Q_2 é um polinômio do segundo grau.

Hipótese 1 (Conjectura:) (somas de potências) Assim posso fazer a conjectura “a soma dos quadrados dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do terceiro grau.”:

$$\sum_{i=1}^k i^2 = Q_3(k); \text{ grau de } Q_3 \text{ é } 3; \quad (6.168)$$

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_3 neste caso em que a p.a. tem razão 1. A metodologia não seria diferente para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.

Considere um polinômio do terceiro grau

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; \quad (6.169)$$

(2) (V)[](F)[] O polinômio Q_3 fica completamente determinado por quatro valores dados.

Solução 1 Dados os valores de $Q(0), Q(1), Q(2), Q(3)$, ou qualquer outra sequência de 4 valores de Q , posso montar um sistema de quatro equações a quatro incógnitas que são os coeficientes do polinômio.

(3) (V)[](F)[] quatro valores assumidos por Q_3 são insuficientes para o determiná-lo.

(5) (V)[](F)[] O sistema de equações

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^1 i^2 = Q_3(1) - Q_3(0) = 1; \\ \sum_{i=0}^2 i^2 = Q_3(2) - Q_3(0) = 5; \\ \sum_{i=0}^3 i^2 = Q_3(3) - Q_3(0) = 14; \\ \sum_{i=0}^4 i^2 = Q_3(4) - Q_3(0) = 30; \end{cases} \quad (6.170)$$

permite de calcular os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 de Q_3 .

porque

$$\sum_{i=0}^4 i^2 = Q_3(4) - Q_3(3) + Q_3(3) - Q_3(2) + Q_3(2) - Q_3(1) + Q_3(1) - Q_3(0) = Q_3(4) - Q_3(0);$$

(7) (V)[](F)[] O sistema de equações que me permite calcular os coeficientes do polinômio $Q_3(x)$ é

$$\begin{cases} Q_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1; \\ Q_3(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5; \\ Q_3(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 14; \\ Q_3(5) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 30; \end{cases} \quad (6.171)$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 14 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 30; \end{cases} \quad (6.172)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad (6.173)$$

cuja solução é

$$(a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{6}; \quad a_2 = \frac{1}{6}; \quad a_3 = \frac{1}{3};) \quad (6.174)$$

(11) (V)[](F)[]

$$\sum_{i=0}^k i^2 = Q_3(k) = \frac{k + 3k^2 + 2k^3}{6} \quad (6.175)$$

gabarito:

38. área, integral, Soma de Riemann Considere a função $f(x) = x^2$. O símbolo

$$I = \int_0^1 f(x)dx \quad (6.176)$$

designa a integral desta função relativamente ao intervalo $[0, 1]$ e pode ser calculado aproximadamente usando-se somas de Riemann. As somas de Riemann formam sucessões S_k que produzem uma aproximação com k retângulos e se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = I \quad (6.177)$$

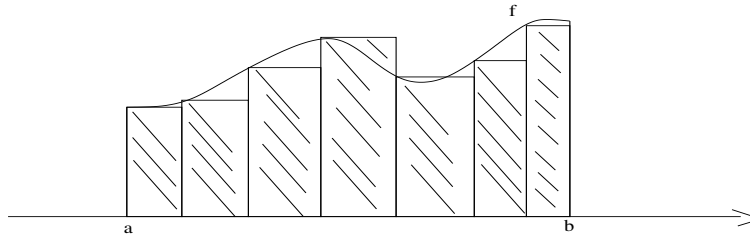
existir para as todas as possíveis somas de Riemann então I é um número, a integral existe. Esta lista vai trabalhar com um caso particular de somas de Riemann, as somas de Riemann uniformes quando o intervalo é dividido em partes iguais. Notação:

$$\Delta x = \frac{1}{k} = \frac{1-0}{k}; \quad (6.178)$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x; \quad (6.179)$$

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \int_0^1 f(x)dx; \quad (6.180)$$

A figura (6.10), página 138, lhe mostra o efeito de aproximar a área limitada pelo gráfico dum função e pelo



Aproximação da integral com áreas de retângulos

Figura 6.10:

eixo OX .

Na equação (eq.178) eu defini o salto Δx que é a base dos retângulos para o cálculo aproximado da área sob a curva. Na equação (eq.179) eu defini a soma das áreas dos retângulos com que vou calcular aproximadamente a área sob a curva. Na equação (eq.180) eu estou fazendo referência ao limite da sucessão S_k que é o símbolo da integral $\int_0^1 f(x)dx$.

As somas de Riemann definem sucessões cujo limite, se existirem, é a integral da função associada.

(2) (V)[J(F)[]

$$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \dots + 81\Delta x^3 + 100\Delta x^3 = 0.285 \quad (6.181)$$

(3) (V)[J(F)[]

$$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \dots + 81\Delta x^3 = 0.285 \quad (6.182)$$

(5) (V)[J(F)[]

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x) = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \Delta x^2; \quad (6.183)$$

(7) (V)[J(F)[]

$$S_k = \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \quad (6.184)$$

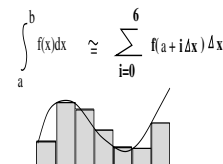
(11) (V)[J(F)[]

$$\Delta x = \frac{1}{k}; S_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3}; \quad (6.185)$$

e como é conhecida a soma dos quadrados dos números naturais, dada por um polinômio do terceiro, então é possível calcular $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$.

gabarito:39. somas de potências, soma de Riemann

O símbolo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^6 f(a+i\Delta x) \Delta x \quad (6.186)$$


representa a área algébrica limitada pelo gráfico da função f e o eixo OX , se existir e se lê “integral de f entre a, b ”. O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo da integral da função do segundo grau. Inicia com o valor aproximado obtido com uma soma de Riemann seguido dum cálculo de limite. A figura (fig 39), página 139, é uma interpretação gráfica da expressão da soma de Riemann em que foi feita uma divisão com 7 retângulos para o cálculo aproximado da integral da função f . Com um programa, por exemplo,

```
define f(x) {
    returnpower(x,2);
}

define SomaRiemann(a,b,k) {
    local soma=0, i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
    for (i=0; i < k; i++) soma += f(i*deltax);
    return soma*deltax;
}

print SomaRiemann(0,1,1000);
```

Executando a última linha vai resultar em 0.3328335 que é valor aproximada da integral $\int_0^1 x^2 dx$ com mil subdivisões do intervalo $[0, 1]$. O programa recebe os parâmetros a, b, n , correspondendo ao início, fim do intervalo e o número n de subintervalos a serem considerados. Troque a equação da função e rode o programa para calcular, aproximadamente, outras integrais. Aumente o valor de n para obter melhor aproximação, mas não exagere porque pode aumentar excessivamente o tempo de processamento. Você pode baixar um programa para cálculo aproximado de integrais neste local [[PracianoPereiraCnum](#)].

programa em calc,
linguagem livremente
distribuída na Internet.

- Com $k = 10000000$,
- obtive o resultado $I = 0.333333283333335$,
- em aproximadamente 2m52.211s minutos de processamento.

(2) (V)[J(F)[] A soma de Riemann

$$\sum_{i=0}^9 f(a+i\Delta x) \Delta x; \Delta x = 1/10; \quad (6.187)$$

calcula, aproximadamente, com 10 subdivisões.

- (3) (V)[](F)[] Aplicando a propriedade distributiva o programa pode ser otimizado, e aqui você um interessante desta propriedade da aritmética. A soma de Riemann da equação (eq.187) anterior fica

$$\Delta x \sum_{i=0}^9 f(i\Delta x); \Delta x = 1/10; \quad (6.188)$$

transferindo Δx para fora do somatório. É o método que está sendo usado no programa 3. O programa primeiro calcula todas as alturas e depois multiplica a soma por Δx .

- (5) (V)[](F)[] Sendo $f(x) = x^2$ a soma de Riemann para o cálculo aproximado da integral $\int_0^1 f(x)dx$ fica

$$\Delta x^3 \sum_{i=0}^{10} i^2; \Delta x = 1/10; \quad (6.189)$$

- (7) (V)[](F)[] Como $\Delta x = \frac{1}{10}$ a expressão da soma de Riemann na equação (eq.189) pode ser escrita como

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=0}^9 i^2 = \frac{\sum_{i=0}^{10} i^2}{1000} \quad (6.190)$$

- (11) (V)[](F)[] Posso expressar todos os cálculos da aproximação usando símbolos:

$$I \approx \int_0^1 x^2 dx; \Delta x = \frac{1}{k}; \quad (6.191)$$

$$I = \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3}; \quad (6.192)$$

$$I = \frac{Q_3(k)}{k^3} = \frac{a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3}{k^3}; \quad (6.193)$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1 k}{k^3} + \frac{a_2 k^2}{k^3} + \frac{a_3 k^3}{k^3}; \quad (6.194)$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1}{k^2} + \frac{a_2}{k} + a_3; \quad (6.195)$$

Todos os termos na última equação (eq. 195), têm limite nulo, exceto o último que não depende de k portanto o seu limite é a_3 então

$$\int_0^1 x^2 dx = a_3 = \frac{1}{3} \quad (6.196)$$

e foi este valor que foi encontrado rodando o programa, aproximadamente.

gabarito:

40. somas de potências, soma de Riemann

O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo “exato” da integral da função quadrática, $f(x) = x^2$ sobre qualquer intervalo $[a, b]$. Vou construir uma soma de Riemann relativa a um intervalo qualquer transformando em simbólicas as expressões. O programa que aparece na questão 39 já opera simbolicamente e pode ser usado para sua compreensão desta questão.

a exatidão é um mito, assim como a perfeição!

Para calcular a integral

$$\int_a^b x^2 dx \quad (6.197)$$

vou dividir o intervalo $[a, b]$ em k subintervalos de mesma medida, então $\Delta x = \frac{b-a}{k}$. A figura (fig. 39), página 139, representa a subdivisão do intervalo em 7 subintervalos de mesma medida e a sucessão de retângulos tem por altura o valor de f no início de cada subintervalo. Isto pode ser alterado, desde que seja feito de forma consistente, então é possível escrever duas expressões para a soma de Riemann:

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.198)$$

$$\sum_{i=1}^k f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.199)$$

Na primeira, equação (eq.198), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no início de cada subintervalo, e na segunda, equação (eq.199), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no final de cada subintervalo.

E há outras variantes, o que não é tão importante discutir agora. Vou me fixar, daqui para frente na primeira expressão, que aparece na equação (eq.198). Esta é a formulação que dei aos programas. Você pode encontrar programas similares em [PracianoPereiraCnum]

Nesta questão há itens falsos, mas então o item verdadeiro, também, estará presente.

(2) (V)[](F)[] Uma soma de Riemann que calcula um valor aproximado para a integral $\int_a^b f(x)dx$ é

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.200)$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \quad (6.201)$$

e expressão na equação (eq.201) foi deduzida usando a propriedade distributiva do produto relativamente à soma.

(3) (V)[](F)[] Uma soma de Riemann que calcula um valor aproximado para a integral $\int_a^b f(x)dx$ é

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.202)$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \quad (6.203)$$

e expressão na equação (eq.203) foi deduzida usando a propriedade associativa da soma.

(5) (V) (F) Sendo $f(x) = x^2$ então

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.204)$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \quad (6.205)$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2) \Delta x; \quad (6.206)$$

$$I = ka^2 + 2a\Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \quad (6.207)$$

pela definição de f , pelo uso do produto notável “quadrado da soma” e porque o termo constante a^2 está sendo somado k vezes.

(7) (V) (F) Sendo $f(x) = x^2$ então

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \quad (6.208)$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \quad (6.209)$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2) \Delta x; \quad (6.210)$$

$$I = ka^2\Delta x + 2a\Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \quad (6.211)$$

$$I = a^2(b-a) + 2a\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 \frac{(k-1)k}{2} + \Delta x^3 Q_3(k-1); \quad (6.212)$$

pela definição de f , pelo uso do produto notável “quadrado da soma” e pela propriedade associativa da soma, pela definição de Q_3 na questão 39.

Solução 2

$$I = a^2(b-a) + 2a\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 \frac{(k-1)k}{2} + \Delta x^3 Q_3(k-1); \quad (6.213)$$

$$I \rightarrow a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.214)$$

$$= a^2b - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.215)$$

$$= +ab^2 - a^2b + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.216)$$

$$= ab^2 - a^2b + \frac{(b-a)^3}{k^3} Q_3(k-1) = \quad (6.217)$$

$$= ab^2 - a^2b + \frac{(b-a)^3}{3} = \quad (6.218)$$

$$= ab^2 - a^2b + \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{3} = \quad (6.219)$$

$$= \frac{3ab^2 - 3a^2b + b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{3} = \quad (6.220)$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3}; \checkmark \quad (6.221)$$

(11) (V) [(F)] Sendo $f(x) = x^2$ então

$$\Delta x = \frac{b-a}{k}; I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \quad (6.222)$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a^2 \Delta x + 2ai\Delta x^2 + i^2 \Delta x^3); \quad (6.223)$$

$$I = ka^2 \Delta x + 2a\Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \quad (6.224)$$

$$I = ka^2 \frac{b-a}{k} + 2a \left(\frac{b-a}{k}\right)^2 \frac{(k-1)k}{2} + \left(\frac{b-a}{k}\right)^3 Q_3(k-1); \quad (6.225)$$

$$I = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{k-1}{k} + \left(\frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6}; \quad (6.226)$$

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} a^2(b-a) = a^2(b-a); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a(b-a)^2 \frac{k-1}{k} = a(b-a)^2; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{3}; \end{cases} \quad (6.227)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \quad (6.228)$$

$$= \frac{3a^2(b-a)}{3} + \frac{3a(b-a)^2}{3} + \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.229)$$

$$= \frac{3a^2b-3a^3}{3} + \frac{3ab^2-6a^2b+3a^3}{3} + \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.230)$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3} \quad (6.231)$$

em que Q_3 é o polinômio que fornece a soma dos quadrados dos número naturais desde zero até $k-1$ definido na questão 37. Na equação (eq.226) tenho que calcular o limite quando k cresce indefinidamente ao longo dos números naturais e isto foi feito na equação (eq.227). Depois somei os limites usando a regra, “limite da soma é a soma dos limites” o que resulta na equação (eq.231)

gabarito:

Solução 3 A expressão na equação (eq.231) precisa ser analisada, ela é a diferença de dois valores duma mesma função: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Repetindo, com outras palavras,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); F(x) = \frac{x^3}{3}; \quad (6.232)$$

Esta expressão vai aparecer em todas as integrais, a equação (eq.232), é o Teorema Fundamental do Cálculo e representa o “método exato” para calcular integrais. F se diz uma primitiva de f e posteriormente vamos ver que f é a derivada de F . O artigo indefinido num dos sentidos se justifica porque qualquer constante que somarmos a F representa uma outra primitiva e pode ser colocada na (eq.232) e neste momento uma razão simples, que não é a fundamental, porque a (eq.232) é uma diferença, então se $G(x) = F(x) + C$ não fica alterada a (eq.232). Mais adiante você vai ver que há uma razão mais forte para que G também seja uma primitiva de f , ou como se costuma dizer, uma primitiva de f é $F + C$.

$$\text{uma primitiva de } f(x) = x^2 \text{ é } F(x) = \frac{x^3}{3} + C \quad (6.233)$$

em que C é uma constante qualquer.

E o poder está chegando às suas mãos! Será possível também derrubar a ditadura!

Altere no programa

```
define f(x) {
    returnsin(x);
}
```

```
a = 0; b = 4*atan(1) ≈ π print b;
```

```
define SomaRiemann(a,b,k) {
    local soma=0,      i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
    for (i=0;          i < k; i++) soma += f(i*deltax);
    return            soma*deltax;
}
```

```
print SomaRiemann(a,b,10000);
```

Repita usando agora $f(x) = \cos(x)$. Faça os gráficos destas funções e procure entender o que aconteceu.

Mas sobretudo, se convença de que agora você sabe calcular muitas integrais aproximadamente e mais para frente também será capaz de calcular muitas delas, exatamente.

41. somas de potências, soma de Riemann, limite Esta questão vai repetir as questões 37, 39 e 40 com o objetivo de calcular exatamente a integral $\int_a^b x^3 dx$ em que $[a, b]$ é um intervalo da reta. A metodologia é exatamente a mesma, apenas envolvendo agora a soma dos cubos. Para isto vou expandir a conjectura feita na questão 37, a hipótese 1, afirmando

Hipótese 2 (Conjectura): (somas de potências) Assim posso expandir a conjectura sobre somas de quadrados fazendo a conjectura “a soma dos cubos dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do quarto grau.”:

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1); \text{ grau de } Q_4 \text{ é } 4; \quad (6.234)$$

Notação: Vou padronizar a notação:

- $\sum_{i=0}^{k-1} i = Q_2(k-1)$, o grau de Q_2 é 2.
- $\sum_{i=0}^{k-1} i^2 = Q_3(k-1)$, o grau de Q_3 é 3.
- $\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1)$, o grau de Q_4 é 4.

Esta conjectura é um teorema e pode ser demonstrada para qualquer potência.

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_4 neste caso em que a p.a. tem razão 1. A metodologia não seria diferente para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.

(2) (V)[](F)[] O sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^0 i^3 = Q_4(0) = 0; \\ \sum_{i=0}^1 i^3 = Q_4(1) = 1; \\ \sum_{i=0}^2 i^3 = Q_4(2) = 9; \\ \sum_{i=0}^3 i^3 = Q_4(3) = 36; \\ \sum_{i=0}^4 i^3 = Q_4(4) = 100; \end{array} \right. \quad (6.235)$$

determina

$$Q_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \quad (6.236)$$

Solução 4

$$Q_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \quad (6.237)$$

$$a_0 = 0 \quad (6.238)$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \quad (6.239)$$

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 = 9 \quad (6.240)$$

$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4 = 36 \quad (6.241)$$

$$a_0 + 4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + 4^4a_4 = 100 \quad (6.242)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad (6.243)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 12 \end{array} \right); \quad (6.244)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \\ 42 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad (6.245)$$

$$a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{2}; a_4 = \frac{1}{4}; \quad (6.246)$$

$$Q_4(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4}; \quad (6.247)$$

$$Q_4(x) = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{4} \quad (6.248)$$

$$Ax = a; B = QA; b = Qa; \quad (6.249)$$

$$x = A^{-1}a; B^{-1} = A^{-1}Q^{-1}; \quad (6.250)$$

$$x = A^{-1}a = B^{-1}b = A^{-1}Q^{-1}b = a; \quad (6.251)$$

$$B^{-1}b = a; \quad (6.252)$$

em que na última equação você encontra a razão de ser da matriz triangular B , ela me dá a mesma solução que a matriz original A . Ou ainda, o sistema equações que obtive ao triangularizar a matriz original é equivalente ao sistema de equações original. Mas agora se tem uma melhora fundamental, quando eu escrevi

$$x = A^{-1}a; \quad (6.253)$$

estou supondo que eu consigo inverter a matriz A o que em geral é uma operação de alto custo computacional porque envolve o cálculo do $\det(A)$ com $n!$ operações, ao passo que a triangularização da matriz A envolve apenas $\frac{(n+1)n}{2}$ operações que são as combinações lineares sucessivas das linhas da matriz A com o objetivo de anular todas as linhas abaixo da diagonal resultando num sistema equivalente ao sistema original. Eu usei uma função definida em

biblioteca.calc,

CombinaLinhas(a, n, m, k, p, q, P, Q)

[PracianoPereiraCnum] que eu apliquei manualmente para anular todas as entradas abaixo da diagonal principal, mas isto pode ser automatizado.

Você pode testar

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1) \quad (6.254)$$

usando a função SomaPot(n, p) que você pode encontrar na página [PaginaCalculoUm], mas observe que será teste e não uma demonstração. Esta demonstração precisa ser feita.

(3) (V)[](F)[] A soma de Riemann

$$\Delta x = \frac{b-a}{k}; I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a+i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} (a+i\Delta x)^3 \Delta x \quad (6.255)$$

é uma aproximação para

$$\int_a^b x^3 dx \quad (6.256)$$

(5) (V)[](F)[]

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{-a^4 + b^4}{4} = F(b) - F(a); \quad (6.257)$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4}; \quad (6.258)$$

Solução 5 Usando a conjectura 2, página 144, e a linha de ordem 3 do triângulo de Pascal, $1 \ 3 \ 3 \ 1$, ou seja pelo chamado “binômio de Newton”, tem-se

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^3 \Delta x = \quad (6.259)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (a^3 + 3a^2 i\Delta x + 3ai^2 \Delta x^2 + i^3 \Delta x^3) \Delta x; = \quad (6.260)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (a^3 \Delta x + 3a^2 i\Delta x^2 + 3ai^2 \Delta x^3 + i^3 \Delta x^4); = \quad (6.261)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} ka^3 \Delta x + 3a^2 \Delta x^2 Q_2(k-1) + \\ + 3a \Delta x^3 Q_3(k-1) + \Delta x^4 Q_4(k-1) \end{array} \right. = \quad (6.262)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^3(b-a) + 3a^2(b-a)^2 \frac{Q_2(k-1)}{k^2} + \\ + 3a(b-a)^3 \frac{Q_3(k-1)}{k^3} + (b-a)^4 \frac{Q_4(k-1)}{k^4}; \end{array} \right. = \quad (6.263)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} a^3(b-a) = a^3(b-a); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} 3a^2(b-a)^2 \frac{Q_2(k-1)}{k^2} = \frac{3a^2(b-a)^2}{2}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} 3a(b-a)^3 \frac{Q_3(k-1)}{k^3} = a(b-a)^3; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (b-a)^4 \frac{Q_4(k-1)}{k^4} = \frac{(b-a)^4}{4}; \end{array} \right. \quad (6.264)$$

$$\int_a^b x^3 dx = a^3(b-a) + \frac{3a^2(b-a)^2}{2} + a(b-a)^3 + \frac{(b-a)^4}{4} = \quad (6.265)$$

$$= \frac{4a^3b - 4a^4 + 6a^2(b-a)^2 + 4a(b-a)^3 + (b-a)^4}{4} = \quad (6.266)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^3b - 4a^4 + 6a^2(b^2 - 2ab + a^2)}{4} + \\ \frac{4a(b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3)}{4} + \\ \frac{b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4}{4} + \end{array} \right. \quad (6.267)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^3b - 4a^4 + 6a^2b^2 - 12a^3b + 6a^4}{4} + \\ \frac{4ab^3 - 12a^2b^2 + 12a^3b - 4a^4}{4} + \\ \frac{(b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4)}{4} \end{array} \right. \quad (6.268)$$

$$\frac{-a^4 + b^4}{4} \quad (6.269)$$

Usei apenas o termo de maior grau dos polinômios Q_2, Q_3, Q_4 no cálculo dos limites. Pela soma dos limites tenho

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b x^3 dx = \frac{-a^4 + b^4}{4} = F(b) - F(a); \\ F(x) = \frac{x^4}{4}; \end{array} \right. \quad (6.270)$$

$$(7) \quad \underline{(V)[J(F)]} \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} i^4 = Q_5(k-1); \text{ grau de } Q_5 \text{ é } 5; \\ Q_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5; \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (6.271)$$

$$(11) \quad \underline{(V)[J(F)]} \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} i^5 = Q_6(k-1); \text{ grau de } Q_6 \text{ é } 6; \\ Q_6(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6; \\ a_6 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (6.272)$$

gabarito:

Os itens (5),(7) e (11) contêm o essencial para demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções polinomiais.

42. número complexo

Considere a equação

$$x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0 \quad (6.273)$$

(2) (V)[J(F)] O radical é um número positivo e duas raízes reais existem.

(3) (V)[J(F)] as raízes existem mas não são reais, são os dois números complexos

$$z_1 = \frac{-3 + 4i}{2}; z_2 = \frac{-3 - 4i}{2}; \quad (6.274)$$

(5) (V)[J(F)] Um número complexo é apenas um número real mais “complexo”. Valem todas as propriedades operacionais dos números reais para os números complexos. O conjunto dos números complexos está contido no conjunto dos números reais.

(7) (V)[J(F)] Um número complexo é um novo tipo de número, um elemento dum novo conjunto, \mathbf{C} , e com eles podemos fazer as mesmas operações habituais, soma e multiplicação que se fazem com os números reais.

(11) (V)[J(F)] Nem sempre se podem fazer as contas habituais, soma e multiplicação, com números complexos.

gabarito:

43. álgebra dos números complexos Um número complexo é um par de números reais, (a, b) , entretanto fica mais fácil pensar neles como a expressão algébrica $a + bi$ em que $i = \sqrt{-1}$.

Este novo conjunto formado dos pares (a, b) ; $a, b, \in \mathbf{R}$ é o conjunto \mathbf{C} dos números complexos.

A primeira coordenado do par (a, b) , se chama parte real, a , e a segunda se chama parte imaginária, b .

(2) (V)[J(F)] 3, 4, 5, $5 + 2i$ são quatro números complexos sendo que os três primeiros são números reais.

(3) (V)[J(F)] Um número real não é um número complexo.

- (5) (V)[J(F)[]] Todo número real é um número complexo em que parte imaginária é nula, em outras palavras $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
- (7) (V)[J(F)[]] i é um número complexo cuja parte imaginária é zero.
- (11) (V)[J(F)[]] i é um número complexo cuja parte imaginária é 1 e a parte real é zero.

gabarito:

44. álgebra dos números complexos

As operações com os números complexos se fazem como na álgebra da quarta série do Ensino Fundamental, como se você tivesse

$$a + bx = a + bi; \quad (6.275)$$

então

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2; \quad (6.276)$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + b(5)i); \quad (6.277)$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + (5)) + (b + (7)i) \quad (6.278)$$

valem as regras da aritmética, mas, com a extensão $i = \sqrt{-1}$;

Consequentemente a equação (eq. 276) pode ser simplificada, ficando:

$$ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + adi + bci = ac - bd + i(ad + b(5)) \quad (6.279)$$

=====

(2) (V)[J(F)[]]

$$(3 + 4i)(4 + 2i) = 12 - 8 + 6i + 16i = 4 + 22i; \quad (6.280)$$

(3) (V)[J(F)[]]

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 - 8 + -6i + 16i = 4 + 10i; \quad (6.281)$$

(5) (V)[J(F)[]]

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 + 8 - 6i + 16i = 20 + 10i = 2(10 + 5i); \quad (6.282)$$

(7) (V)[J(F)[]] $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ é impossível de ser calculado.

(11) (V)[J(F)[]] $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$, e o zero tanto é um número real como complexo.

gabarito:

45. fórmula de Baskhara

A fórmula de Baskhara agora vale mesmo quando o discriminante da equação do segundo grau for negativo, neste caso resulta num número complexo não real.

(2) (V)[J(F)[]] Nem toda equação do segundo grau tem uma solução, no conjunto dos números complexos, não vale mais a fórmula de Baskhara.

(3) (V)[J(F)[]] No conjunto dos números complexos toda equação do segundo grau tem uma solução, sempre vale a fórmula de Baskhara.

(5) (V)[J(F)[]] Não é mais possível fazermos uma interpretação geométrica simples, como as raízes duma parábola, no plano, para uma solução duma equação do segundo grau.

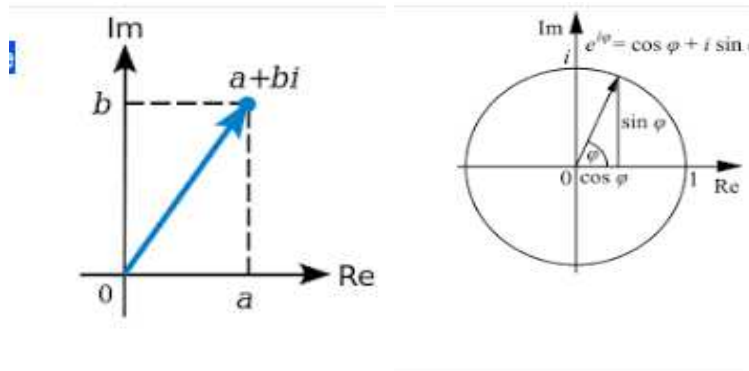
(7) (V)[J(F)[]] A solução duma equação do segundo grau é um ponto no plano complexo.

(11) (V)[](F)[] A equação $x^2 + 1 = 0$ tem como solução $\pm i$.

gabarito:

gabarito:

46. número complexo, interpretação geométrica Como um número complexo é uma expressão da forma $a + bi$, em que a e b são números reais, então podemos vê-los, de forma equivalente a que a Física usa, agora $j = 1, i = \sqrt{-1}$. Então um número complexo é um vetor do plano complexo. Confira a figura (fig 46), página 150,



As figuras que aparecem nesta questão foram copiadas da Wikipedia, [Wikipedia] onde você pode encontrar mais informações sobre os números complexos.

O número complexo $1 = (1, 0) = 1 + 0*i$ é chamado de origem do círculo trigonométrico. Observe porque, ele é o elemento neutro da multiplicação.

Todo arco do círculo trigonométrico é determinado pela origem junto com outro ponto do círculo.

- (2) (V)[](F)[] Se $a^2 + b^2 = 1$ então não é possível representar, geometricamente, o número complexo $a + bi$.
- (3) (V)[](F)[] Se $a^2 + b^2 = 1$ então o número complexo $a + bi$ é um ponto do círculo trigonométrico no plano complexo.
- (5) (V)[](F)[] A figura (fig 46), página 150, mostra o círculo trigonométrico que é o conjunto dos números reais de módulo 1.
- (7) (V)[](F)[] A figura (fig 46), página 150, mostra o círculo trigonométrico, o subconjunto dos números complexos de módulo 1.
- (11) (V)[](F)[] A figura (fig 46), página 150, mostra o círculo trigonométrico onde o número complexo

$$(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

determina, com a origem do círculo, $(1, 0)$, o arco de tamanho ϕ . O maior arco que pode assim ser determinado mede 2π e esta figura sugere que $\phi < 2\pi$.

gabarito:

47. Fórmula de Euler-De Moivre

Dado um número complexo $z = a + bi$ se chama de conjugado ao número complexo $\bar{z} = a - bi$. Alguns autores usam a notação $z^* = \bar{z} = a - bi$. Eu vou usar exclusivamente a notação $\bar{z} = a - bi$.

(2) (V)[J(F)[] Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.

(3) (V)[J(F)[] Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.

(5) (V)[J(F)[] A identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (6.283)$$

é a própria definição do círculo trigonométrico.

(7) (V)[J(F)[] A identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (6.284)$$

identifica o conjunto dos números complexos de módulo 1.

(11) (V)[J(F)[] O número complexo $a - bi$ é chamado de conjugado do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.

gabarito:

gabarito: 1155

conjugado dum número complexo

O número complexo $a - bi$ é chamado de conjugado do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$. Este número positivo é o quadrado do módulo do número complexo $a + bi$.

(2) (V)[J(F)[] $a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OX .

(3) (V)[J(F)[] $a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OY .

(5) (V)[J(F)[] Os números complexos não possuem inverso multiplicativo.

(7) (V)[J(F)[] Se $a^2 + b^2 \neq 0$ então o número complexo $z = a + bi$ tem inverso multiplicativo que é

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} \quad (6.285)$$

(11) (V)[J(F)[] Com exceção do número complexo $0 + 0i = 0$ todo número complexo $a + bi$ tem inverso multiplicativo dado pela fórmula

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} \quad (6.286)$$

gabarito:

gabarito: 22

fórmula de Euler-De Moivre Considere a identidade como uma definição

$$e^{it} = (\cos(t) + i \sin(t)) \quad (6.287)$$

Por enquanto aceite que o símbolo e^{it} seja apenas uma etiqueta designado um ponto no círculo trigonométrico que determina o arco de medida t . Lembre-se que a origem do círculo trigonométrico é o ponto $(1, 0) = e^{i0} = 1 \in \mathbf{R}$.

(2) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ e^{it} designa um único ponto sobre o círculo trigonométrico para cada número real $t \in [0, 2\pi]$.

(3) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ $e^{it}e^{-it} = 0$

(5) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ $e^{it}e^{-it} = 1$ e como $\bar{z} = e^{-it}$ é o conjugado de $z = e^{it}$ então, no círculo trigonométrico, o conjugado de z é o seu inverso multiplicativo: $z\bar{z} = 1$.

(7) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ Considere um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = e^{i\theta}; \quad (6.288)$$

$$(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = e^{-i\theta}; \quad (6.289)$$

(11) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ Dado um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = e^{i\theta}; \quad (6.290)$$

$$-(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = -e^{i\theta}; \quad (6.291)$$

que é um par números que são inversos, aditivamente.

gabarito:

função complexa

Considere a função

$$f(z) = z^2 - 1; \quad (6.292)$$

Uma forma equivalente de escrever a equação da função f é

$$z = x + iy; \quad (6.293)$$

$$f(z) = z^2 - 1 = x^2 - y^2 + 2xyi - 1; \quad (6.294)$$

$$g(x, y) = (x^2 - y^2 - 1, 2xy); \quad (6.295)$$

Na equação (eq.295) a função g foi escrita interpretando um número complexo como um par de pontos do plano, ou um vetor do plano.

(2) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ $f(0) = 1$

(3) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ $f(0) = -1$

(5) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ $f'(z) = 2z$;

(7) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ Se $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 1$ então $F'(z) = f(z)$;

(11) $\frac{(V)[J(F)]}{t \in [0, 2\pi]}$ Se $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$ então $F'(z) = f(z)$;

gabarito:

Derivada - fora do contexto

Considere as funções f, g definidas pelas equações:

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t)); \quad (6.296)$$

$$g(t) = (\cos(t) + i \sin(t)) = e^{it}; \quad (6.297)$$

$$t \in [0, 2\pi]; \quad (6.298)$$

As duas funções associam um número real t com um ponto do círculo trigonométrico. São duas funções idênticas apenas escritas com formatos diferentes: f é uma função vetorial, quer dizer $f(t)$ é um vetor, um elemento do $f(t) \in \mathbf{R}^2$, enquanto que g é uma função complexa, $g(t) \in \mathbf{C}$.

(2) (V)[](F)[] $f(t)$ é um vetor qualquer do plano \mathbf{R}^2 .

(3) (V)[](F)[] $g(t)$ é um vetor unitário do plano \mathbf{R}^2 .

(5) (V)[](F)[]

$$f'(t) = (\cos(t), \sin(t))'; \quad (6.299)$$

$$f'(t) = (\cos(t)', \sin(t)'); \quad (6.300)$$

$$g'(t) = (e^{it})' = ie^{it}; \quad (6.301)$$

$$g'(t) = ie^{it} = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t)); \quad (6.302)$$

$$f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)); \quad (6.303)$$

$$\cos(t)' - \sin(t); \sin(t)' = \cos(t); \quad (6.304)$$

Solução 6

$$f(t+h, A) - f(t, A) = (\cos(t+h) - \cos(t), \sin(t+h) - \sin(t)); \quad (6.305)$$

$$\frac{f(t+h, A) - f(t, A)}{h} = \left(\frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \right); \quad (6.306)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, A) - f(t, A)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \right); \quad (6.307)$$

se estes limites existirem.

(7) (V)[](F)[] Como i é uma constante então a derivada de $t \mapsto e^{it}$ é $t \mapsto ie^{it}$ então

$$g'(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t));$$

(11) (V)[](F)[] Como as imagens das duas funções, $f(t)$, $g(t)$, coincidem então suas derivadas também são iguais portanto

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h} = -\sin(t); & \cos'(t) = -\sin(t); \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} = \cos(t); & \sin'(t) = \cos(t); \end{cases} \quad (6.308)$$

$$\begin{cases} \cos'(t) = -\sin(t); \\ \sin'(t) = \cos(t); \end{cases} \quad (6.309)$$

os limites

$$f(t+h, A) - f(t, A) = A(\cos(t+h) - \cos(t), \sin(t+h) - \sin(t)); \quad (6.310)$$

$$\frac{f(t+h, A) - f(t, A)}{h} = A \left(\frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \right); \quad (6.311)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, A) - f(t, A)}{h} = \left(A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h} \right); \quad (6.312)$$

gabarito: 1155

função complexa

Considere a função

$$f(z) = z^3; \quad (6.313)$$

Uma forma equivalente de escrever a equação da função f é

$$z = x + iy; \quad (6.314)$$

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = f(x, y); \quad (6.315)$$

$$f(x, y) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - 3iy^3; \quad (6.316)$$

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - 3y^3); \quad (6.317)$$

Na equação (eq.317) a função f foi escrita interpretando um número complexo como um par de pontos do plano, ou um vetor do plano.

$$(2) \quad \underline{(V)} \quad \underline{f(0)} = 1$$

$$(3) \quad \underline{(V)} \quad \underline{f(0)} = 0$$

$$(5) \quad \underline{(V)} \quad \underline{f'(z)} = 3z^2;$$

$$(7) \quad \underline{(V)} \quad \underline{Se} \quad F(z) = \frac{z^4}{4} \quad \underline{então} \quad F'(z) = f(z);$$

$$(11) \quad \underline{(V)} \quad \underline{Se} \quad F(z) = \frac{z^3}{3} \quad \underline{então} \quad F'(z) = f(z);$$

gabarito:

Índice Remissivo

- 10
- C**
 - complexos, 7
- N**
 - naturais, 7
- Q**, 22
 - ordem, 114
 - rationais, 7
 - representação geométrica, 23
- R**
 - números reais, 26
 - reais, 7
- S**¹
 - transferidor, 77
- Z**
 - inteiros, 7
- abstração, 4, 7
 - distributividade, 10
 - método axiomático, 10
- adição
 - associatividade, 13
 - comutatividade, 13
 - elemento neutro, 13
 - inverso, 13
- adição em **N**
 - propriedades, 9
- adição em **Z**, 16
- álgebra, 7, 43
- Álgebra
 - linear, 43
- algébrico
 - número, 27
- algoritmo de Euclides
 - divisão, 18
- análise matemática, 7
- Analítica
 - Geometria, 41
- anel
 - dos inteiros, 16
- ângulo, 45, 47
 - entre vetores, 48
- área
 - integral, 135
 - produto vetorial, 61
- argumento
 - número complexo, 45
- arquimediana
 - propriedade, 26, 43
- assintótico
 - comportamento, 29
- axiomas, 9
- axiomas de
 - Peano, 6
- axiomas de Peano, 16
 - Frege, 8
- base
 - hexadecimal, 3, 118
- Baskhara
 - fórmula de, 149
- cálculo
 - do limite, 140
- cardinalidade
 - complexidade, 38
 - de **R**, 38
 - do contínuo, 38
 - c , 38
 - salto de, 29, 38
- cartesianas
 - coordenadas, 41
- Cauchy
 - critério de, 35
 - sucessão de, 37
 - teste de, 37

- Charles
 - lei, 95
- círculo
 - condição necessária, 98
 - equação do, 74, 76
 - trigonométrico, 77, 151
- círculo trigonométrico
 - origem, 150
- classe das
 - sucessões convergentes, 35
 - sucessões divergentes, 35
- classes
 - de equivalência, 23
- codificação, 87
 - binária, 3
- coeficiente angular
 - reta, 50
- coeficiente linear
 - reta, 51
- Cohen
 - Paul, 38
- completação
 - de quadrados, 75, 76
- complexidade
 - cardinalidade, 38
- complexo
 - número, 20
- condição inicial, 134, 135
- cone
 - eixo, 90
 - geratriz, 90
- cônicas, 41
- conjugado
 - número complexo, 150, 151
- conjunto
 - número de elementos, 119
- construção
 - dos números reais, 1
- contabilidade
 - dívida, 13
- continuidade
 - restaurável, 132
 - sequencial, 132
- coordenadas
 - do vetor, 46
- Copérnico, 79
- corpo, 23
 - comutativo, 23
- critério
 - de Cauchy, 35
- crivo de Eratóstenes, 19
- curva
 - fechada, 73
- Debian
 - distribuição
 - Gnu Linux, 20
- Debian/gnu/linux
 - factor, 20
- decodificação, 87
- Dedekind
 - cortes, 25
- definição
 - geométrica
 - das operações, 24
- denominador
 - numerador, 112
- derivada, 1, 56, 79, 143
 - definição geométrica, 126
 - definição intuitiva, 126
 - do seno, 2
 - implícita, 79
- derivadas parciais, 56
- Descartes, 41
- descontinuidade
 - primeira espécie, 132
 - removível, 132
 - salto, 134
- desigualdade
 - triangular, 95
- dimensão
 - regra prática, 76
- dinâmico
 - sistema, 82
- distância, 74
 - entre dois, 48
 - ponto a reta, 52
- distribuição
 - Linux
 - Debian, 20
- distributividade
 - otimização, 10
- divisão euclidiana
 - quociente
 - resto, 18
- dízima, 112
 - não periódica, 112, 115
 - periódica, 112

- geratriz, 113
- dízimas
 - limite, 29
- eixo
 - imaginário, 44
 - real, 44
- elipse
 - equação, 89
 - equação padrão, 89
 - excentricidade, 80, 90
- equação
 - da elipse, 79
 - determinante, 38
 - em \mathbf{Z} , 14
- equação paramétrica
 - da reta, 100
- equivalência
 - classe, 23
 - classe de, 23
 - critério
 - de Cauchy, 36
 - relação de, 8, 23
- erro
 - Foi corrigido, 20, 35, 36
- espaço, éttrico41
 - descrição e medição, 41
 - é infinito, 43
- espaço métrico, 57
- espaço vetorial
 - adição, 46
- estrutura
 - algébrica, 9, 43, 111
- estrutura algébrica, 10
- euclidiana
 - geometria, 20
- Euler-De Moivre
 - fórmula de, 151
 - fórmula de , 2
 - Fórmula de, 150
- Euler-De-Moivre
 - fórmula, 77
- exata
 - Matemática, 9
- excentricidade
 - elipse, 90
- existência
 - condição, 35
- factor
 - Debian/gnu/linux, 20
 - programa
 - fatora números, 20
- fatorial
 - python3, 11, 12
- figura
 - π , 36
 - $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, 26
 - ângulo de incidência, 78
 - ângulo de refração, 78
 - círculo, 74
 - tangente, 96
 - tangente e raio, 79
 - trigonométrico, 45
 - círculo, reta, 97
 - condição inicial, 135
 - Cone
 - duas folhas, 82
 - cônicas, 84
 - converge
 - para zero, 30
 - coordenadas, 44
 - cortes do cone, 86
 - distância
 - entre dois pontos, 57
 - ponto à reta, 52
 - elipse, 80, 89
 - elipse no cone, 87
 - Equação
 - da reta, 66
 - exercícios
 - Círculos, 92
 - fonte duma imagem, 4
 - frações, 42
 - frações equivalentes, 23
 - medidas da elipse, 87
 - movimento
 - oscilador, 136
 - multiplicação geométrica, 25
 - número complexo, 150
 - ótica geométrica, 78
 - paquímetro
 - sucessão nula, 31
 - paralelogramo
 - regra, 46
 - plano cartesiano, 64
 - produto
 - vetorial, 62
 - racionais e a reta, 24

- raiz
 - sucessão crescente, 127
- reta
 - lugar geométrico, 49
 - numérica, 41, 114
 - vetor perpendicular, 50
- reta numérica, 27
- reta orientada, 42
- reta secante, 128
- reta tangente, 128
- soma de frações, 22
- soma de Riemann, 138, 139
- sucessões, 126
- tangente e raio
 - no círculo, 79
- transferidor
 - círculo, 45
- trem eletromagnético, 134
- triângulo, 70
- velocidade, 133
- finita
 - indução, 7, 8
- Física
 - vetores da, 61
- forma
 - polar, 60
- formalismo
 - praticidade, 32
- fórmula
 - de Baskhara, 38
 - de De Moivre, 2
 - de Euler, 2
 - de Euler-De Moivre, 2, 151
 - De Moivre-Euler, 2
 - Euler-De Moivre
 - número complexo, 151
 - Euler-De-Moivre, 77
- fórmula de Baskhara, 149
 - discriminante, 149
- fração, 20, 112
 - denominador, 21
 - imprópria, 20
 - irredutível, 21
 - numerador, 21
 - própria, 20, 114
- fração irredutível, 113
- frações
 - equivalentes, 23
- Frege
 - axiomas de Peano, 8
- função
 - complexa, 39, 152
 - contínua, 132
 - descontínua, 134
 - limite
 - de sucessão, 131
- função primitiva, 135
- Gauss
 - plano de, 23
- geometria
 - algébrica, 74
- Geometria
 - Analítica, 41
- geometria euclidiana, 20
- geratriz, 27
- Gödel, 38
- grupo
 - aditivo, 23
 - \mathbb{Z} , 15
 - estrutura, 23
 - multiplicativo, 23
- hipérbole
 - degenerada, 85
- hiperplano, 56
- horas
 - adição, 10
- horas do relógio
 - estrutura algébrica, 10
- ideal
 - maximal, 37
- imagem
 - código fonte, 3
- indução
 - finita, 7, 10
- indução finita, 8, 117, 119
- ínfimo
 - supremo, 39
- inicial
 - condição, 134
- integral, 1, 135
 - área, 135
 - soma de Riemann, 138
- inteiros
 - adição, 13

- Inteligência
 - Humana, 20
- intervalos
 - encaixados, 25
- inverso multiplicativo
 - número complexo, 151
- Kepler, 79
- lei
 - do cancelamento, 7
- limite, 1, 28, 29
 - de sucessões, 124
 - dízimas, 29
 - propriedades, 1, 37
 - sucessão, 130, 131
 - valor
 - no ∞ , 37
 - zero, 125
- limites notáveis, 127
- limite zero
 - sucessão, 115
- linear
 - variedade, 103
- linguagem
 - do império, 31
- lógica, 38
- lógica matemática, 7
- losango
 - área
 - produto vetorial, 61
- luz
 - raio de, 78
- máquina
 - de Turing, 9
- Matemática
 - divisões da, 3
- matriz
 - expandida, 103
- média, 26
- mercado
 - videogame, 36
- método
 - axiomático, 10
- métrico
 - espaço, 57
- modelo, 9
- módulo
 - dum inteiro, 17
 - dum vetor, 48
 - número complexo, 151
 - vetor, 48
 - produto escalar, 48
- monoide, 10
- multiplicação
 - \mathbf{Z} , 15
- negativos
 - números, 111
- Newton
 - binômio, 147
- numeração
 - quebequois, 5
- numerador
 - denominador, 112
- número, 3
 - complexo, 13
 - fracionário, 13
 - irracional, 112, 115
 - primeiros 20, 4
 - racional, 112
 - real, 13, 132
 - irracional, 24
 - racional, 24
- número e , 123
- número algébrico, 7
- número complexo, 7, 38, 148
 - ângulo, 45
 - argumento, 45
 - conjugado, 150, 151
 - interpretação geométrica, 150
 - inverso multiplicativo, 151
 - módulo, 151
 - parte imaginária, 148
 - parte real, 148
 - vetor do plano, 152
- número natural, 7
- número racional, 7
- número real, 24
- números
 - espanhol, 4
 - francês, 4
 - inglês, 4
 - irracionais, 112
 - naturais, 4
 - português, 4
 - reais, 115
 - russo, 5

- segunda dezena, 5
- sueco, 4
- várias línguas, 4
- números complexos, 7
- números inteiros, 7, 13
- números naturais, 7
- números racionais, 7, 20, 112
- números reais, 7
- número transcendente, 7
- operação
 - aritmética, 126
- ordem
 - relação de, 43
- origem
 - círculo trigonométrico, 150, 151
- oscilador
 - limite, 134
- parte imaginária, 148
- parte real, 148
- Pascal
 - triângulo, 147
- Pascal, Blaise, 20
- Peano
 - axiomas de, 6, 16
 - Giuseppe, 7
- plano
 - cartesiano, 41, 63
 - coordenado, 43
 - digitalizar, 43
 - feixe de planos, 85
 - numérico, 41
 - numerizar, 43
- primeiros
 - 20 números, 4
- primitiva, 135, 143
- primo com
 - outro número, 19
- princípio
 - indução finita, 7, 8
- produto
 - escalar, 47
 - exterior, 62
 - por escalar, 46
 - vetorial, 59
 - anticomutativo, 61
- produto escalar
 - módulo de vetor, 48
- produto externo
 - módulo, 60
- produto multilinear
 - alternado, 60
- produto vetorial
 - anticomutativo, 59
 - área, 61
 - Regra BAC_CAB, 62
- programa
 - função, 12
 - o primeiro, 10
 - soma de Riemann, 139, 140
- progressão
 - aritmética, 121
- progressão aritmética
 - salto
 - número primo, 20
- progressões
 - polinomiais, 121, 122
- proporção, 23
- propriedade
 - arquimediana
 - da reta, 43
 - associativa
 - vetores, 46
 - distributiva
 - programa, 140
- propriedades
 - do limite, 38
- python
 - comunidade, 20
 - Guido Rossi, 20
- quadrados
 - completação, 75
 - soma dos, 139
- quatérnions, 20
- quebequois
 - numeração, 5
- rabo
 - dum série, 123
- racional
 - número, 20
- real
 - número, 43
- relação
 - de equivalência, 8, 23
- relação de ordem, 26

- relação fundamental
 - trigonometria, 77
- reta
 - coeficiente angular, 50
 - coeficiente linear, 51
 - digitalizar, 41
 - é infinita, 43
 - geométrica, 43
 - numérica, 41, 43
 - numerizada, 43
 - numerizar, 41
- reta numérica, 26, 27
 - \mathbf{R} , 43
- Riemann
 - soma, 138
 - uniforme, 138
- Rosetta, 81
- salto
 - de cardinalidade, 38
 - descontinuidade, 134
 - lógico, 1, 127
- semelhança
 - de triângulos, 42
- semirreta
 - negativa, 24, 114
 - positiva, 24, 114
- série, 121
 - rabo da, 123
 - sucessão, 121
 - termo geral, 121, 124
- soma
 - dos quadrados, 136, 139
- soma de Riemann, 138, 144
 - figura, 138
 - integral, 138
 - programa, 140
- soma dos termos
 - sucessão, 120
- somas de potências, 144
- subtração
 - em \mathbf{N} , 9
- sucessão
 - com limite, 130, 132
 - converge para zero, 30, 34
 - crescente, 124–126
 - decrescente, 124, 126
 - definem o zero, 125
 - limitada, 126, 130, 132
 - limite, 144
 - zero, 133
 - limite zero, 115
 - oscilante, 126
 - que tem limite, 126
 - série, 121
 - soma dos termos, 120
- sucessões
 - de Cauchy, 25
 - equivalentes, 117
 - limite, 123
 - polinomiais, 121
- sucessor, 8, 19
- supremo
 - ínfimo, 39
- teorema
 - fundamental
 - da Aritmética, 19
- teorema fundamental
 - do Cálculo, 148
- teoria dos conjuntos
 - de ZFC, 38
- transferidor
 - \mathbf{S}^1 , 77
- triângulo
 - de Pascal, 20, 119
- trigonometria
 - identidade fundamental, 151
 - relação fundamental, 77
- troca de sinal, 14
- Turing
 - máquina de, 9
- Tycho Brae, 79
- variável
 - local, 12
- variedade
 - não linear, 73
- vazio
 - conceito concreto, 11
 - soma com, 11
- velocidade
 - função, 134
 - gráfico
 - área, 134
 - limite, 134
- vetor
 - ângulo, 48

- módulo, 48
- nulo, 46
- vetores
 - da Física, 61
- Yitang Zhang
 - salto
 - números primos, 20
- Zermelo-Fraenkel, 38
- zero
 - definição do, 125
 - um número natural, 7