Os números e o limite
Atualização
uma introdução ao Cálculo

Praciano-Pereira, T. [1]

5 de outubro de 2023
monografias da Sobral Matemática
no. 2023.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

[1]tarcisio@sobralmatematica.org

Nesta monografia estou apresentando os números, dos naturais aos complexos como parte do meu projeto de livro de Cálculo em que este conteúdo será o primeiro capítulo.

palavras chave: limite, função, números.

This monograph takes the numbers from the natural numbers to the complex numbers as subject. This is to be the first chapter of my new book on Calculus.

keywords: limit, function, numbers.

Introdução

Esta *monografia* tem a pretenção de se transformar num livro, pretensiosa! Entretanto o seu futuro ainda vai ser menos inglório uma vez que o autor pretende transformá-la no primeiro capítulo dum livro de Cálculo. Seria o capítulo sobre os números que são os objetos básicos do Cálculo. Na verdade os objetos básicos do Cálculo são as funções porque o Cálculo tem duas ferramentas principais, a *derivada* e a *integral* que atuam sobre as funções e não sobre os números. E Cálculo é calcular *integrais e derivadas* de *certos tipos* de funções definidas num subconjunto dos números reais! Como consequência deste objetivo você vai encontrar com frequência referências aos seus "capítulos" que no futuro serão "seções".

Mas o Cálculo também lida com uma ferramenta que é necessária às outras duas ferramentas a que me referi no parágrafo anterior, o *limite*. O *cálculo dos limites* é outro dos *terrores* que os estudantes de Cálculo enfrentam, na verdade um *terror produzido*, porque calcular limites, por um lado é difícil, e por outro lado esta dificuldade pode ser atenuada com algumas técnicas mais avançadas, então, *porque não avançar primeiro para depois fazer os cálculos de forma mais fácil*? Eu estou seguindo esta linha de trabalho. E aqui eu tenho um segredo neste processo, um *número real é um limite* e no nível do Cálculo, *limite é número real.* Inclusive as "*propriedades dos limites*" nada mais são do que as propriedades dos números reais obtidas pela via dum salto lógico sobre os números racionais que é a construção dos números reais, coisa que é omitida nos livros de Cálculo. Eu vou tratar deste *salto lógico* saindo de $\mathbf{Q}$ para $\mathbf{R}$.

Os cinco primeiros capítulos desta monografia são sobre a *construção dos números.* Acho que ficou faltando exercícios e ainda vou fechar esta lacuna, quando a *monografia* virar *livro*! Mas está no ponto de fazer referência ao último capítulo que é um tanto diferente dos demais, é uma lista de exercícios. Em princípio os exercícios são aplicação direta dos cinco primeiros capítulos, mas há exceções. Se você achar que algum exercício é difícil, muito provavelmente ele estará *fora do contexto*. E eu tenho em mente um deles que seguramente está fora do contexto, mas vou deixar que você mesmo o descubra, até porque pode não estar fora do contexto para si! Este exercício a que me refiro é exatamente o nó que me faltava para me decidir por este livro de Cálculo, com ele eu estou renovando o ensino do Cálculo, ele diz respeito ao *cálculo da derivada do seno* que é uma dos entraves de goela do ensino do Cálculo e que eu descobri uma forma simples de fazer esta demonstração. Demorei dois ou três anos para descobrir e você pode ver que é uma bobagem ancorada na descoberta que Euler e De Moivre fizeram de forma independente no século 18. Eu não sei exatamente a história da *fórmula de De Moivre* que é a expressão complicada da *fórmula de Euler* e esta historia precisaria ser contada. Eu defino a fórmula de Euler como uma *invenção*,foi como Euler abriu o caminho para a construção da exponencial complexa, e ela vai abrir o caminho no terceiro volume do meu livro de Cálculo para uma simplificação imensa de muitos dos cálculos que apertam as estudantes. É isto que entendo que marca o meu livro e que me encorajou a escrever um novo livro sobre esta disciplina sobre a qual existem possivelmente milhares de livros escritos. Mas não é só a derivada do seno, o simples uso dos números complexos vai tornar muita coisa trivial e a *fórmula de De Moivre-Euler* cai dentro dos números complexos.

Eu não estou só neste método, sei que outros autores brasileiros já trilharam o caminho que estou trilhando e seguramente eu preferia que este livro fosse de vários autores, e com certeza seria melhor do que um livro dum único autor. Esta talvez seja a principal ideia sobre a publicação de uma monografia em que eu estou me expondo e expondo a ideia. Quiças me convidem para um trabalho comum!

Eu já troquei a posição deste parágrafo duas vezes, antes esteve lá no começo, depois o passei para cá, a dúvida me levou a colocá-lo no começo e agora voltou aqui para o final. Acho que você vai me dar razão, ele deve ficar aqui no final. Este texto inicial é a *introdução* em que vou rapidamente conversar sobre o meu projeto e o projeto começa com o primeiro capítulo que pode ser o mais difícil como tem que ser complicada a primeira conversa. Eu tive a tentação de chamar o primeiro capítulo de *zero* conduzido por Roger Godement que foi o cara que marcou a minha vida como matemático, Eu nunca me encontrei pessoalmente com Godement e foi por acaso que tomei conhecimento do livro dele que havia sido recentemente publicado em 1963 quando eu me encontrava no primeiro ano de Matemática na UFC que então se chamava de *Universidade do Ceará* e adquiri *Cours D'algebre* em 1964. O livro começava pelo capítulo zero que foi uma grande maldade de Roger Godement porque dava a ideia de que se tratava do ponto inicial e eu devo ter gasto talvez tanto tempo para ler o capítulo zero como para ler o resto do livro. Eu queria lhe dizer que o primeiro capítulo, sobre os *números natuais*, certamente, é o mais difícil e que você deve considerá-lo como uma abertura de conversação, fazer uma leitura do mesmo, anotar alguns tópicos para pensar neles depois, mas sobretudo aceitar o que dizia Leopold Kronecker, que "*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*". E vou voltar a este frase outras vezes, ela é muito importante para evitar que você perca seu tempo inutilmente. Tenho grande apreço por Roger Godement mas ele me atrapalhou um bocado.

Não permita que eu *o atrapalhe*, ponha em discussão o que você encontrar no que eu escrever e decida se deve *aceitar ou provar*, ou *deixar para provar em outro momento.* O conhecimento não é *linear*, o que para mim for evidente pode ser muito complicado para você *e vice-versa.* Eu insisto, não permita que eu o atrapalhe!

Capítulo 1

números naturais

1.1 Uma tentativa histórica sobre os números

Os números são os objetos básicos da Matemática que popularmente é chamada de "*ciências dos números*" embora hoje ela seja muito mais do que isto, confira *álgebra, análise, geometria, estatística e lógica* que são as divisões clássicas da Matemática embora seja difícil classificar todos os tópicos da Matemática apenas entre estas divisões. Confira *divisões da Matemática* da *American Mathematical Society*.

Os números, em particular os *números naturais* cujo conjunto é designado pelo símbolo $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \tag{1.1}$$

são a base de tudo em Matemática e em computação. Uma imagem, uma fotografia digital, é feita duma codificação construída com números. É uma codificação que um programa adequado pode ler e reproduzir a imagem.

Na figura (fig. 1.1), página 4, você pode ver o *código fonte* duma imagem em que

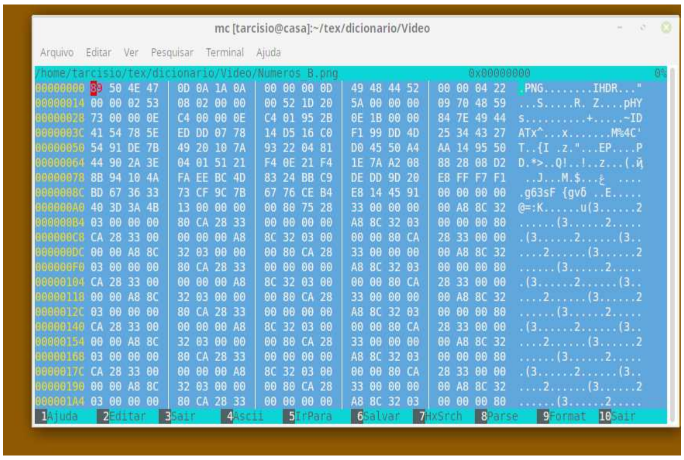


Figura 1.1: Código fonte duma imagem

aparecem números na *base hexadecimal* que é a codificação numérica usada hoje nos computadores em lugar da antiga *codificação binária*.

Mas os *números naturais* apareceram para contar e a história de como eles apareceram não somente é intrigante como é muito difícil inseri-los na teoria da Matemática. Uma frase atribuída a *Leopold Kronecker*: "*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*" diz tudo a respeito dos números naturais e até mesmo da dificuldade de fazer para eles uma construção lógica. Como disse Kronecker, é mais fácil assumir que sabemos tudo sobre **N** e daí partir para construir o resto.

Os livros didáticos estão cheios de anedotas explicando como apareceram os números.

- Os pastores tinham um monte de pedrinhas ao lado do portão do cercado onde as ovelhas passavam a noite e iam separando pedrinhas à medida que cada ovelha entrava no cercado. Se sobrasse uma pedra lá iam eles em busca da ovelha que estivesse faltando, ou quando nascia um novo animal, nova pedra era colocada no monte. Este é um exemplo simples de *abstração* em que substituímos um conjunto por outro estabelecendo uma função bijetiva entre eles para que o conjunto mais simples ou mais fácil de de ser manipulado *represente* o outro.

- Com o passar do tempo surgiram *nomes*, *um, dois, três, quatro, cinco, seis,* ... para substituir as pedras e então bastaria escrever na areia o último nome para saber se todas as ovelhas tinham sido conduzidas para o cercado. Mas, observe, estes nomes são arbitrários. Porque *três* é o sucessor de *dois*? Porque não nos sentamos em *mesas* para comer com o prato numa *cadeira*?

resposta as perguntas feitas acima podem vir duma comparação entre algumas línguas. É interessante fazer uma comparação entre as várias línguas que a Humanidade fala. Os primeiros 20 números tem *algumas semelhanças* entre todas elas e são a parte mais difícil da contagem porque estes primeiros 20 números estão inteiramente destituídos de qualquer lógica a não ser o processo cultural que os produziu onde talvez se possa ir buscar justificação dos nomes que eles têm:

1. <u>português</u> um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.

2. <u>espanhol</u> uno, dos, três, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

3. <u>inglês</u> one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.

4. <u>francês</u> un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

5. <u>sueco</u> en, två, tre, fyra, fem, sex, sju, octa, nio, tio.

6. <u>russo</u> odin, dva, tre, tchitere, piati, sex, cem, vocem, deviati, deciati.

Claro, os russos ainda usam um alfabeto diferente do nosso, o cirílico.

São nomes, aparentemente, *tomados ao acaso* mas que tem algumas semelhanças mesmo entre as línguas como o 6 que é praticamente o mesmo nas seis línguas listadas acima. O 1 é semelhante em quase todas elas assim como o $2, 3$. Depois seguem-se $11, 12, \ldots, 20$ que novamente *tem aparência de terem sido inventados* como modificações dos dez primeiros. Certamente há justificativas históricas para que a Humanidade os tenham inventado com os nomes que eles tem.

Posso deixar para os historiadores, e talvez o que vou dizer já seja bem conhecido e discutido, o formato dos vinte primeiros números sugere que durante muito tempo, a Humanidade não precisou de contar além de 20, ou ainda que *20 deve ter sido durante muito tempo um número muito grande para as necessidades da Humanidade.* E somente quando esta necessidade se tornou significativa para ir além de 20 é que as distintas culturas da Humanidade corrigiram a lógica usada para os números 1, 2, ..., 19 para adotar uma lógica regular para os números que vão de 20 em diante, que é o que posso ver nas seis línguas que usei para comparar.

A partir de 21, se segue em *todas as línguas acima* uma regra lógica bem estruturada. Se você aprender a contar até 20 em qualquer uma destas línguas, a continuação a partir de 21 é um processo lógico que é fácil de dominar. Uma pequena exceção é o francês

- que chama 70 de *soixante dix* que significa *sessenta dez*,
- depois chama 80 de *quatre vingt* que significa *quatro vinte*
- e finalmente chama 90 de *quatre vingt dix* que significa *quatro vinte dez*.

E tem lógica, apenas muito complicada! No *quebequois* este problema foi contornado!

Seria interessante acrescentar aqui, se alguém me ajudar eu anexo, os 20 primeiros números naturais em *tupi guarani*, *árabe*, *chinês*, *japonês* para reforçar possivelmente a teoria que estabeleci acima de que estes 10 primeiros números representam o esforço máximo para aprender a contar e partir de 21 ficam todos os números dentro duma lógica simples. Por exemplo, a linguagem mais complicada das que listei acima, *russo*,

- 21 é *odin na dvadeciati*
- 22 é *dva na dvadeciati*
- 23 é *tre na dvadeciati*
- 24 é *tchitere na dvadeciati*

portanto, como nas outras línguas, a repetição dos primeiros nove números com um nome que foi *inventado* para a *segunda dezena*, em russo *dvadeciati* que é bem mais lógico que o nosso *vinte*.

Deixando de lado o francês em que 75 é *soixante dix cinq*, e segue a lógica complicada do francês, todas as línguas tem uma lógica clara para a numeração a partir de 21.

E o processo continua para a terceira dezena, quarta dezena, ... até 99.

Depois vem 100 em que se dá um novo salto com nomes diferentes nelas todas, mas semelhantes entre algumas.

1. português cem 100, 110 cento e dez
2. espanhol cien 100, 110 ciente y diez
3. inglês hundred, 100, 110 hundred ten
4. francês cent 100, 110 cent dix
5. sueco hundra 100, 110 hundra tio
6. russo sto, 100, 110 sto deciati

Depois 1000 é outro salto cultural,

1. português mil 1000, 1010 mil e dez

2. espanhol mil 1000, 1010 mil y diez
3. inglês thousand 1000, 1010 thousand ten
4. francês mil 1000, 1010 mil dix
5. sueco tusen 1000, 1010 tusen tio
6. russo ticiatchia 1000, 1010 ticiatchia deciati

Mas a partir de 1.000.000 *absolutamente todas as línguas usam exatamente a mesma palavra com pequenas variações próprias de suas respectivas culturas*. Mas não sei se isto é verdade em *tupi guarani*, *árabe*, *chinês*, *japonês* porque nada sei destas línguas. E "*chinês*", "*japonês*" é uma forma simplificada de se referir às centenas de "*dialetos*" que o povo da China, do Japão e dos demais países asiáticos fala.

1.2 Os elementos do conjunto $\mathbf{N}$

Mas insistindo, e acompanhando Kronecker, se aprendermos, ou aceitarmos os números naturais, o resto a gente constrói "*facilmente*", e dou razão a Kronecker e para mim o ponto de partida, sem discussão é $\mathbf{N}$.

Vou incluir em $\mathbf{N}$ também o zero. Aqui há uma divergência entre os matemáticos, uns dizem que $0 \notin \mathbf{N}$, e com certa razão, na ausência cabritos os pastores não devem ter se preocupado em fazer qualquer registro, portanto o zero não seria natural. Para mim o zero é um número natural e portanto eu digo que $0 \in \mathbf{N}$, e tenho uma forte razão, sem o zero o conjunto $\mathbf{N}$ ficaria mais deficiente do que já é, com o zero, melhora um pouco. E depois, que definiu $\mathbf{N}$ com maior exatidão foi o matemático italiano, *Peano* que estabeleceu uma lista de 9 axiomas para estabelecer quais eram as regras do comportamento dos números naturais, e um dos *axiomas* estabelece que "$\mathbf{N}$ tem um primeiro elemento". Interessante, os *axiomas de Peano* valem para qualquer número tomado como primeiro número, experimente, comece com 3 e os os *axiomas de Peano* valem *sem retoques* para

$$\mathbf{N} = \{3, 4, 5, 6, \dots\} \tag{1.2}$$

Eu prefiro começar do zero…

O zero é uma forte abstração, da mesma forma como o conjunto vazio. São dois conceitos matemáticos que é difícil de se produzirem com objetos da *Natureza*, mas a Matemática não pode viver sem eles, e nem a *Natureza*! São abstrações importantes.

Os números, em Matemática, se classificam entre as seguintes conjuntos:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \tag{1.3}$$

chamados, respectivamente,

1. *naturais*
2. *inteiros*,
3. *racionais*,
4. *reais*,
5. *complexos*.

Os números naturais são um objeto mais próprios da *lógica matemática*, os inteiros são mais próprios da *álgebra*. Os números racionais, reais e complexos são estudados mais intensamente no *Cálculo Diferencial e Integral* e na *análise matemática*.

Os números complexos criaram um ramo da análise matemática que é chamada de *análise complexa* e que está à base da *teoria das funções* e da *teoria das funções holomorfas* ou *teoria das funções analíticas*.

Confira também

- número algébrico, confira algébrico, número
- número complexo, confira complexo, número $\mathbf{C}$
- número natural, confira natural, número $\mathbf{N}$;
- número racional, confira racional, número $\mathbf{Q}$;
- número real, confira real, número $\mathbf{R}$;
- número transcendente, confira transcendente, número $\mathbf{R}$

Você pode ver um pequeno vídeo sobre os números naturais que se encontra publicado numa página da Sobral Matemática, procure o link
`www.sobralmatematica.org/aveiro/Numeros.mov`
Lá você pode encontrar outros formatos, escolha algum que lhe seja possível ver em seu dispositivo.

Esta talvez seja a razão porque os matemáticos se dividem quando se discute se o *zero* é um número natural. Alguns preferem dizer que não. De fato o zero é uma *abstração*. Quem nada tivesse nada teria para contabilizar e portanto o *zero* é pouco natural. Eu prefiro incluir o zero como *número natural* e a minha justificativa é a lei do cancelamento

$$a + b = c + b \quad \Rightarrow \quad b = c - a + b \quad \Rightarrow \quad c - a = 0; \tag{1.4}$$

Os números naturais são *fracamente* definidos por nove axiomas de Peano. É comum apresentar os axiomas de Peano agrupados segundo uma certa aplicação.

Fracamente porque os axiomas de Peano também se aplicam ao conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Na verdade Peano definiu a *indução finita*.

1. N não é vazio O conjunto dos números naturais não é vazio e portanto contém pelo menos um elemento cujo símbolo é 0. Para Peano, este elemento seria 1 portanto eu estou *modificando* os axiomas de Peano. Este é um dos pontos críticos dos axiomas de Peano, nada impediria de considerar que o primeiro elemento de $\mathbf{N}$ fosse o número inteiro -3 ou 3 e toda a axiomática de Peano funcionaria. Na verdade os axiomas de Peano são a formulação do *princípio da indução finita* e $\mathbf{N}$ é um dos possíveis resultados da aplicação deste princípio. Este seria a ideia de *Leopold Kronecker*, aceitar os axiomas de Peano como a construção de $\mathbf{N}$, então os números naturais são uma aplicação do *princípio da indução finita* e assim nada há a ser demonstrado: *existe um conjunto chamado* $\mathbf{N}$!

2. Da igualdade: Estes axiomas definem o conceito de *relação de equivalência*.

Não perca muito tempo pensando na relação de equivalência. Em algum momento ela vai se mostrar essencial.

   (a) reflexividade
   $$(\forall x)(x \in \mathbf{N})x = x; \tag{1.5}$$

   (b) transitividade
   $$(\forall x, y, z)(x, y, z \in \mathbf{N})x = y \text{ e } y = z \text{ implica } x = z; \tag{1.6}$$

(c) simetria
$$(\forall x, y)(x, y \in \mathbf{N})x = y \text{ implica que } y = x; \tag{1.7}$$

3. Fechado para igualdade Se
$$a \in \mathbf{N} \text{ e } b = a \text{ então } b \in \mathbf{N}. \tag{1.8}$$

O uso deste axioma ocorre em situações como operações com frações, se o resultado final for, por exemplo, $\frac{3a}{a}$, com $a \neq 0$ então $\frac{3a}{a} \equiv 3$, e como $3 \in \mathbf{N}$ não há razão para considerar estes dois objetos como diferentes e ambos pertencem ao conjunto $\mathbf{N}$.

4. A operação sucessor Existe uma operação, s, chamada de *sucessor* com as seguintes propriedades:

Algumas linguagens de computação definem $x++$ como $x = x + 1$, o sucessor de x. Divirta-se redefinindo (a),(b),(c),(d) como um exercício.

(a) $s(0) = 1; s(n) \in \mathbf{N}$ para todo $n \in \mathbf{N}$;

(b) $s(s(0)) = 2; s^n(0) = n$;

(c) Para qualquer $n \in \mathbf{N}; s(n) = 0$ é falso;

(d) s é injetiva: $s(n) = s(m) \quad \Rightarrow \quad n = m$;

5. O princípio da indução finita

Considere K um subconjunto de $\mathbf{N}$ que tenha as propriedades seguintes:

(a) $0 \in K$;

(b) $q \in K \quad \Rightarrow \quad s(q) \in K$

então $K = \mathbf{N}$.

Teorema 1 (infinitude dos números naturais) $\mathbf{N}$ *é infinito*

Dem:
Hipótese: $\mathbf{N}$ *tem um* maior elemento, a.

$$s(s(a)) < a; \tag{1.9}$$
$$s(s(a)) = s(a) + 1 = a + 1 + 1 = a + 2 < a \quad \Rightarrow \quad 2 < 0; \tag{1.10}$$

porque
$$s(a) = a + 1 \text{ e } s(s(a)) = s(a) + 1 = a + 1 + 1 = a + 2;$$

Contradição porque $\mathbf{N}$ *tem apenas números positivos com* $2 < 0$ *então* $\mathbf{N}$ *não pode ter um maior elemento e é assim infinito.* **q.e.d .**

A construção feita por Peano é minuciosa, ele pensou em todos os detalhes, e inclusive, a construção de Peano foi em parte produzida independentemente por Frege sem que nenhum dos dois soubesse dos trabalhos do outro. Ainda assim é possível perceber que o conceito *conjunto infinito* se mantém vago uma vez que ele depende de uma *aplicação repetida, indefinidamente, de uma certa operação* e esta "ação" não poderia ser nunca executada. Observações deste tipo conduziriam aos trabalhos de um dos fundadores da computação, Turing, e seu célebre teste, a *máquina de Turing*.

A Matemática, resolve problemas práticos, mas ela está longe de ser uma teoria perfeita ou exata! Talvez isto seja o seu aspecto mais forte, as suas falhas, uma permanente fonte de inspiração das pesquisas.

Os números naturais têm uma deficiência operatória em relação às duas operações nele definidas, adição e multiplicação, o que levou sucessivamente à construção do conjunto dos números inteiros e depois dos números racionais.

Além da adição, o conjunto dos números naturais admitem a operação de multiplicação e as propriedades da multiplicação são as mesmas da adição eis porque eu vou agora resumir as propriedades da adição num formato que vou copiar depois para descrever as propriedades da multiplicação:

Definição 1 (proprieddade da) *adição em* $\mathbf{N}$

1. *Existe um elemento neutro para adição em* $\mathbf{N}$ *que é o zero, tal que* $a + 0 = a$ *para todo* $a \in \mathbf{N}$.
2. *a adição é associativa,* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *para quaisquer números* $a, b, c \in \mathbf{N}$.
3. *a adição é comutativa,* $a + b = b + a$ *para quaisquer dois números naturais.*

Expressar as propriedades por meio de *axiomas* parece uma pouco difícil de se aceitar à primeira vista. O primeiro axioma $a + 0 = a$ parece tão óbvio que nem precisaria ser estabelecido. Mas é quando se resolvem equações que se observa a importância de estipular os *axiomas* como as regras para que álgebra funcione. Deixe-me resolver uma equação para lhe dar um exemplo.

$$x + 3 = 7; \tag{1.11}$$
$$(x + 3) - 3 = 7 - 3; \text{ aqui tem um erro!}; \tag{1.12}$$
$$x = 4; \text{ solução correta, obtida por meios ilegais!}; \tag{1.13}$$

Encontrei a solução correta da equação, *entretanto usei de meios ilegais.* O número $-3 \notin \mathbf{N}$ não poderia aparecer nestas contas porque ele não existe no conjunto $\mathbf{N}$. Este é um erro muito comum que vem em consequência dum atalho muito usado "*quando um número passa para o outro lado, troca de sinal*". Em $\mathbf{N}$ *não existe troca de sinal*.

A única forma de resolver esta equação em $\mathbf{N}$ é por tentativas, ou então, inventar uma nova operação chamada *subtração* em $\mathbf{N}$. Mesmo assim a solução tem que ser feita por tentativas o que prova que a subtração é uma operação mal definida em $\mathbf{N}$. Ela não tem as *propriedades da adição*, não é *comutativa* e nem *associativa.*

A multiplicação é outra propriedade definida no conjunto $\mathbf{N}$:

Definição 2 (proprieddade da) *multiplicação em* $\mathbf{N}$

1. *Existe um elemento neutro para multiplicação em* $\mathbf{N}$ *que é o* 1*, tal que* $a * 1 = a$ *para todo* $a \in \mathbf{N}$.
2. *a multiplicação é associativa,* $a * (b * c) = (a * b) * c$ *para quaisquer números* $a, b, c \in \mathbf{N}$.
3. *a multiplicação é comutativa,* $a*b = b*a$ *para quaisquer dois números naturais.*

Eu simplesmente copiei a definição da *adição* e troquei por *multiplicação* e depois troquei $+$ por $*$, e troquei o zero pelo 1. As propriedades são as mesmas, e isto denuncia que estou diante duma *estrutura algébrica* coisa que você pode entender como um modelo. Existem dois exemplos deste *modelo*:

$$(\mathbf{N}, +) \text{ e } (\mathbf{N}, *) \tag{1.14}$$

Vou convidá-la para um pequeno voo em abstração e dizer-lhe que sempre que tivermos um conjunto A com uma operação, de tal modo que $(A, *)$ tenha estas três propriedades, se diz que $(A, *)$ é um *monoide*. Então $\mathbf{N}$ é um *monoide* aditivo e também é um *monoide* multiplicativo.

Monoide é uma *estrutura algébrica*. E estamos cheios de estruturas algébricas à nossa volta, por exemplo, o conjunto das horas do relógio é um *monoide aditivo* e não tem sentido dizer-se que seja um *monoide multiplicativo*. Chame

$$\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \tag{1.15}$$

É um exercício que lhe deixo verificar as propriedades da *adição das horas* no relógio, você deve concluir que

$$(\mathcal{H}, +); + \text{ é a adição das horas} \tag{1.16}$$

$(\mathcal{H}, +)$ é um *monoide*.

Tome um desafio, resolva a equação $x + 7 = 3$ na *estrutura de monoide* das horas do relógio! É possível resolver de forma muito parecida como se fosse o conjunto dos *números inteiros*. Divirta-se! Afinal, aprendemos também para nos divertir!

Exemplo 1 (Importância prática da abstração) *Abstração é uma questão prática*

Acredite, e veja um exemplo de como abstração *é uma* questão prática *que pode lhe economizar* bilhões de reais*. Somente espero que você não pretenda usar a* abstração *de forma tão pragmática…*

Certamente você sentiu que é existe muita abstração *na explanação caracterizando as propriedades das operações numa série de itens que se assemelham à burocracia judiciária…*

Este é o método axiomático de descrever a ciência, ele tem alguns defeitos, mas tem suas vantagens. Compare as duas definições seguintes de uma função *definidas na linguagem de programação* `python3`.

```
def F(n,a,b): return a*pow(n,2)/2 + n*(2*b-a)/2.0;

def F(n,a,b): return n*(a*(n-1) + 2*b )/2.0;
```

As duas definições são equivalentes no sentido de que produzem o mesmo resultado o cálculo duma função do segundo grau em que a, b são duas constantes conhecidas. Na segunda expressão eu usei a distributividade para reduzir duas operações. Na primeira expressão há 8 operações, na segunda há seis operações, e isto é importante, pense num programa em que F está sendo chamada um bilhão de vezes, duma para outra há uma economia de 2 bilhões de operações! Acho que somente este exemplo deve mostrar-lhe a importância da abstração que o método axiomático nos fornece. Este é um exemplo de uma atividade muito importante em computação, ou em qualquer atividade em que hajam algoritmos em uso, a otimização do algoritmo*. indexabstração!otimização*

Acho que este pequeno exemplo justifica e pode auxiliar à estudante a aceitar o método axiomático na apresentação da Matemática. Os axiomas são as regras operatórias que se encontram por baixo dos programas de computadores portanto são eminentemente práticos.

Os números naturais são o modelo para a indução finita que é um método muito prático para fazer demonstrações baseadas numa indexação sobre $\mathbf{N}$ e os axiomas de Peano são, na prática o modelo de demonstração por *indução finita*.

Vou escrever no próximo capítulo sobre os números inteiros, o conjunto $\mathbf{Z}$ e sucessivamente sobre os demais conjuntos.

Capítulo 2

os números inteiros

Os **números inteiros** formam um conjunto que tem como símbolo $\mathbf{Z}$ e é formado por todos os números naturais mais os inversos aditivos dos números naturais, $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \tag{2.1}$$
$$-\mathbf{N} = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \tag{2.2}$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup -\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \cup \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \tag{2.3}$$
$$\mathbf{Z} = \{\cdots - 4, -3, -2, -1, 01, 2, 3, 4, \dots\}; \tag{2.4}$$

Este conjunto provavelmente foi inventado para completar o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais de tal modo que se pudesse fazer a *contabilidade* incluindo as *dívidas*. Durante muito tempo estes novos elementos, os negativos, foram considerados como números espúrios como aconteceu com as demais ampliações dos conjuntos numéricos para se obtivessem os números fracionários, os reais e os complexos.

Hoje se vê o conjunto $\mathbf{Z}$ junto com a operação de adição como uma estrutura algébrica em que qualquer equação pode ser resolvida, algumas vezes esta estrutura é indicada com o símbolo $(\mathbf{Z}, +)$ e suas propriedades são

Definição 3 (propriedades dos) *inteiros com a adição*

1. *elemento neutro a adição tem um* elemento neutro*, o zero, tal que* $0+a = a+0 = a$ *para todo* $a \in \mathbf{Z}$.

2. *inverso aditivo todo número inteiro* a *tem um* inverso aditivo *indicado com o símbolo* $-a$ *tal que* $a + -a = 0$.

3. *associatividade da adição a adição é* associativa*,* $a + (b + c) = (a + b) + c$.

4. *comutatividade da adição* $a + b = b + a$.

Observe que eu escrevi $a + -a = 0$, propositadamente, para me permitir este comentário. O símbolo $-a$ é um *único símbolo* representando o inverso aditivo do número a. Mas, como acontece em Matemática com frequência, os símbolos adquirem vida própria e a gíria matemática admitiu que $a + -a = a - a$ e que $-(-a) = a$ completando as regras da álgebra de $(\mathbf{Z}, +)$.

Algumas pessoas se chocam ao passar pela primeira vez por esta definição porque, por uma lado, parecem fatos tão evidentes que não precisavam ser destacados. A associatividade parece desnecessária, também. Eu vou dar um exemplo resolvendo uma equação para mostrar o uso destas propriedades.

Exemplo 2 (resolvendo) *uma equação*

$$7 + x = 2; \tag{2.5}$$
$$-7 + (7 + x) = -7 + 2; \tag{2.6}$$
$$(-7 + 7) + x = -7 + 2 = -5; \tag{2.7}$$
$$0 + x = -7 + 2 = -5; \tag{2.8}$$
$$x = -5; \tag{2.9}$$

1. *Na equação (eq.6) eu somei aos dois membros da equação o número -7 porque ele é o inverso aditivo de 7 e assim eu vou eliminar o 7 do primeiro membro.*

2. *Na equação (eq.7) eu usei a* propriedade associativa *para fazer com que -7 operasse diretamente com 7. Se a equação estivesse sido escrita assim*

$$x + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad x + (7 - 7) = 2 - 7 = -5$$

eu teria usado a simplificação habitual pela qual

$$(7 + -7) = (7 - 7)$$

3. *Na equação (eq.8) substitui $7 - 7$ por zero.*

4. *Na equação (eq.9) eu simplifiquei concluindo que $x = -5$.*

Ninguém resolve esta equação *usando esta sequência de passos porque alguns atalhos foram incluídos na álgebra* aparecendo algumas expressões, por um lado interessantes porque trazem mais agilidade, mas por outro perigosas porque podem conduzir a erros como "*quando o número passa para o outro lado troca o sinal*" fazendo com que simplifiquemos a solução da equação resumindo-a sequência incompleta:

$$7 + x = 2; \tag{2.10}$$
$$x = -7 + 2 = -5 \text{ \textit{o sete foi "passado" para o outro lado} }; \tag{2.11}$$

Quando se trabalha com duas operações, adição e multiplicação, aparece um erro comum de *troca sinal* onde esta troca é ilegal. Então você pode usar os atalhos, e resolver a equação do exemplo pela forma resumida que aparece acima, mas é preciso ter clareza do que estiver fazendo. Os professores tem grande dificuldade em convencer a sua audiência de que a forma correta de resolver uma equação é aquela em que todas as propriedades são usadas.

Uma forma de contornar o problema talvez seja

$$7 + x = 2; \tag{2.12}$$
$$x = -7 + 2 = -5; \text{ porque } -7 \text{ é inverso aditivo de } 7; \tag{2.13}$$
$$x = -5; \text{ porque } -7 + 7 = 0 \text{ e } 0 + x = x; \tag{2.14}$$

incluindo observações que substituam as passagens que ficaram faltando. Este cuidado pode prevenir o erro que mencionei acima de inversão de sinal, na multiplicação, quando da *passagem para o outro lado*.

Compare a equação (eq.12), resolvida em $\mathbf{Z}$, com a mesma equação agora resolvida em $\mathbf{N}$, no conjunto dos números naturais.

$$7 + x = 2; \tag{2.15}$$

$$x = -7 + 2 = -5; \text{ ilegal, porque } -7 \notin \mathbf{N}; \tag{2.16}$$

$$x = -5; \text{ resultado impossível, porque } -5 \notin \mathbf{N}; \tag{2.17}$$

Em $\mathbf{N}$ esta equação é impossível e foi esta a razão pela qual a Humanidade inventou $\mathbf{Z}$. O conjunto dos inteiros, com adição tem uma estrutura algébrica completa que recebe o nome de grupo. Se diz, *grupo aditivo dos inteiros*.

Obviamente que os *números negativos*, $-\mathbf{N}$, não foram inventados para resolver equações, muito provavelmente eles foram inventados pelos contadores para resolver questões de *caixa: deve e haver*. Eles precisavam de expandir os números, inventar os números negativos, para que pudessem *expressar as dívidas*.

Um pouco acima eu falei em trabalhar com duas operações em $\mathbf{Z}$, porque também existe uma outra operação, *a multiplicação*. E tem mais outras, *a divisão e a subtração*. No conjunto $\mathbf{Z}$ se pode definir a multiplicação mas ela vai ficar tão deficiente quanto ela é no conjunto dos números naturais, $\mathbf{N}$.

Definição 4 (propriedades da) *multiplicação em* $\mathbf{Z}$

1. *existe um elemento neutro em* $\mathbf{Z}$ *relativamente à multiplicação,* 1.
2. *a multiplicação é associativa,* $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. *a multiplicação é comutativa,* $a * b) = (b * a)$.

Comparando com as propriedades da adição, falta *elemento inverso* relativamente à multiplicação. É o mesmo defeito que tem o conjunto $\mathbf{N}$ relativamente às duas operações, adição e multiplicação. Falta o *elemento inverso* relativamente a estas duas operações.

Este defeito vai dar origem ao conjunto das frações, que é o conjunto $\mathbf{Q}$.

Falei que $(\mathbf{Z}, +)$ era o grupo aditivo dos números inteiros. Deixe-me dar-lhe exemplo de outro grupo que faz parte de sua vida diária, para que você entenda porque é interessante salientar que existe uma estrutura, a de *grupo*. O conjunto

$$\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \tag{2.18}$$

tem as mesmas propriedades que o grupo $(\mathbf{Z}, +)$ tem:

1. <u>elemento neutro</u> é a hora 12, que somada com qualquer outra reproduz a *outra*: $12 + 4 = 4$.
2. <u>elemento inverso aditivo</u> Toda hora tem o seu inverso aditivo, que é o complemento para chegar em 12: $4+8 = 12$ então $(4, 8)$ é um par de elementos inversos, como também o são

   $$(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6)$$

   E você vê um caso curioso, um elemento que é inverso aditivo de si próprio: 6.
3. <u>propriedade associativa</u> $a + (b + c) = (a + b) + c$.

4. propriedade comutativa $a + b = b + a$.

Deixe-me resolver uma equação no conjunto das horas, e vai ficar claro o que eu já lhe falei antes: *vou precisar de usar as propriedades*.

$$x + 7 = 3; \tag{2.19}$$
$$(x + 7) + 5 = 3 + 5; \text{ porque o inverso aditivo de 7 é 5}; \tag{2.20}$$
$$x + (7 + 5) = 3 + 5; \text{ propriedade associativa}; \tag{2.21}$$
$$x + 12 = x = 3 + 5 = 8; \text{12 é o elemento neutro das horas}; \tag{2.22}$$
$$x = 8; \tag{2.23}$$

Não dá para resolver esta equação usando a regra "*passando para o outro lado se troca o sinal*" porque no conjunto das horas não tem troca de sinal.

O conjunto dos números inteiros é muito rico em propriedades. Primeiro tem duas operações, a adição, com a qual forma a *estrutura de grupo* e a multiplicação com a qual tem uma estrutura um pouco mais pobre que se chama de *monoide*, porque lhe falta o inverso multiplicativo.

Mas tem uma nova propriedade que é a *distributividade* da multiplicação relativamente à adição:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \tag{2.24}$$

Estou usando o "*asterisco*" como sinal de multiplicação, como se usa também nas máquinas de calcular ou em programas de computador.

Deixe-me fazer uma lista completa das propriedades de $(\mathbf{Z}, +, *)$

1. propriedades da adição $(\mathbf{Z}, +)$ é um grupo comutativo, aqui vai um pacote com 4 propriedades.

2. propriedades da multiplicação $(\mathbf{Z}, *)$ é um monoide comutativo, aqui vai um pacote com 3 propriedades.

3. A a multiplicação é *distributiva* relativamente à adição: $a*(b+c) = a*b+a*c$.

4. O elemento neutro da adição anula, pela multiplicação, qualquer número inteiro: $0 * a = 0$ para qualquer que seja $a \in \mathbf{Z}$.

O $(\mathbf{Z}, +, *)$ é uma nova estrutura que recebe o nome de *anel* . Ao final vou dar mais alguns exemplos de estruturas para que não fique a ideia de somente existem estas que estão aparecendo junto com o conjunto dos inteiros.

As propriedades dos inteiros precisam ser demonstradas, mas para fazê-lo é preciso que se defina a adição e a multiplicação no conjunto $\mathbf{Z}$. Para fazerem-se demonstrações é preciso que se estabeleçam pontos de partida: definir quais são as *verdades básicas* a partir das quais os teoremas serão demonstrados. É uma frase atribuída a Leopold Kronecker: "*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*". A construção dos números naturais é extremamente penosa e é mais prático dizer que eles são o princípio de tudo estabelecendo suas propriedades básicas que é um conjunto de axiomas comumente conhecidos como *axiomas de Peano*. Peano foi um matemático italiano que reuniu todas as afirmações que já tinham sido feitas sobre os números naturais num conjunto de axiomas. Confira os *axiomas de Peano*.

Whitehead e Russel escreveram Principia Matematica, não consegui passar da primeira página...

Considerando $\mathbf{N}$ como ponto de partida, definido pelos *axiomas de Peano*, posso definir a adição em $\mathbf{Z}$. Para fazê-lo eu preciso de 4 sentenças definindo como somar dois números positivos, dois números negativos, um número positivo com outro negativo e como somar número negativo com outro positivo. Esta última sentença vai ser substituída pela afirmação de que a soma é comutativa.

Definição 5 (da adição) *em* $\mathbf{Z}$ *Sejam* $x, y \in \mathbf{Z}$

1. *se* $x, y \geq 0$ *então* $x, y \in \mathbf{N}$ *e* $x + y$ *é a soma definida em* $\mathbf{N}$.
2. *se* $x, y \in -\mathbf{N}$ *então* $x + y = -(-x + -y)$.
3. *se* $x \in \mathbf{N}$ *e* $y \in -\mathbf{N}$ *então* $-y \in \mathbf{N}$ *e calculamos a diferença entre estes dois números naturais:* $x - (-y) = d$. *Observe que* d *é um número positivo, a diferença entre dois números naturais. E aqui tem dois casos a considerar:*

$$\begin{cases} x \geq (-y) & \Rightarrow \quad x + y = d; \\ x < (-y) & \Rightarrow \quad x + y = -d; \end{cases}$$

   Em geral esta sentença complicada é traduzida em linguajar mais simples, "se calcula a diferença entre os números *rebatidos* para $\mathbf{N}$ e se dá a diferença o sinal do maior*". É o que está construído acima.*

4. *A soma é comutativa, o que resolve o caso em que* $x \in -\mathbf{N}$ *e* $y \in \mathbf{N}$.

Quando eu estava para começar a definição da adição em $\mathbf{Z}$, eu me dei contas de que eu precisava de definir módulo foi quando eu usei a expressão "*rebatidos*", que penso que é intuitiva porém não foi definida. Eu preciso de definir a função módulo que é quem rebate um número inteiro negativo para o conjunto $\mathbf{N}$. Eu poderia simplesmente redigir novamente esta texto colocando a definição do módulo antes da definição de adição. Mas preferi deixar este defeito e fazer uma crítica do mesmo para que você perceba como é difícil construir uma teoria. E se você encontrar outros furos lógicos neste texto eu agradeceria a bondade de me avisar. Dizem que quando Gauss morreu encontraram entre seus papeis dezenas de artigos praticamente prontos que ele não publicou porque ele era extremamente crítico e somente publicava aquilo que *considerava impecável*. A ciência é que se atrasou porque ele tinha muita coisa impecável que não publicou. Já Euler, primeiro publicava, e se houvesse erro, corrigia, e ganhamos muito com a corrente de Matemática que verteu dos dedos de Euler. Eu não pretendo me comparar com nenhum destes dois gigantes, apenas eu prefiro seguir as pegadas de Euler, escrever, publicar e deixar que outros mostrem que eu errei!

Então, definindo o módulo,

Definição 6 (do módulo) *dum número inteiro*

$$\begin{cases} x \in \mathbf{N} & \Rightarrow \quad |x| = x; \\ x \in -\mathbf{N} & \Rightarrow \quad |x| = -x; \end{cases}$$

Porque eu falei em *grupo* e *monoide* eu pude simplificar muito a descrição do conjunto dos inteiros com suas propriedades.

Tanto com os inteiros, como com os naturais, podemos fazer duas outras operações: dividir e subtrair. A subtração não tem tanto interesse com inteiros porque a adição fornece tudo que a subtração oferece e com boas propriedades. Por exemplo: $a - b \neq b - a$, a subtração não é comutativa. Não precisamos da subtração, mas na prática ela é útil.

A divisão também é defeituosa, mas muito útil e desde o gregos ela foi estudada e usada. E ela segue sendo importante, mesmo sendo defeituosa. Se você estiver perto dum computador no qual esteja instalado `Linux` como é habitual nas escolas públicas do Ceará, você pode fazer um teste interessante. É quase certo que no computador esteja instalada a linguagem de programa `Python`, abra um termina e nele digite:

```
python
```

e você vai ver algo do tipo

```
Python 2.7.15rc1 (default, Nov 12 2018, 14:31:15)
[GCC 7.3.0] on linux2
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
```

se o `Python` estiver instalado como provavelmente está nas escolas públicas do Ceará.

Não se assuste com o inglês, e se acostume a ler inglês e aos poucos vai ver que não é difícil. Há relativamente poucas palavras em inglês muito diferentes das nossas palavras portuguesas. E vale a pena dominar a língua inglesa. Não porque os americanos sejam melhores do que nós, mas que porque são mais ricos, porque exploram o mundo todo, e assim tem mais coisas que nós, e nós temos o direito de usá-las.

Mas agora faça a experiência, no `Python`:

```
>>> 5/3
1
>>>
```

e o `Python` lhe disse que o resultado desta operação é 1. Não foi um erro, é que `Python` faz divisão inteira, como fizeram os gregos criando o *algoritmo de Euclides*:

$$D = q * d + r; D \text{ dividendo }, q \text{ quociente }, r \text{ resto}; \tag{2.25}$$

$$0 \leq r < q; D = q * d + r; \tag{2.26}$$

$$5 = q * 3 + r; \tag{2.27}$$

$$5 = 1 * 3 + 2; \tag{2.28}$$

Na divisão `Python` dá como resposta o *quociente* da divisão do *dividendo* pelo *quociente*. Se você quiser que `Python` se comporte como uma calculadora você tem que transformar pelo menos um dos números em decimal:

```
>>> 5.0/3
1.6666666666666667
>>>
```

O meu objetivo não é trabalhar com `Python`. Eu usei esta linguagem de programação apenas para motivar uma discussão sobre o *algoritmo de Euclides para divisão*.

O algoritmo de Euclides para divisão é ensinado nas escolas, confira a figura (fig **??**), página **??**,
e satisfaz à equação (eq.25) e cujo resultado correspondente à figura (fig **??**) que apresentei na equação (eq.27).

Para calcular *quociente e resto* fazemos *tentativas*, experimentamos um número inicial para ser o *quociente* que multiplicamos pelo *divisor*. Se o resultado passar do *dividendo* tiramos uma unidade do *quociente* e repetimos o processo até que a multiplicação produza um número inferior ao *dividendo*. Subtraímos o produto do *dividendo* e este resultado é o resto da divisão. É a equação (eq.25) que define todo este processo com uma única regra: *resto* é um número positivo, ou nulo, que deve ser menor do que o *quociente*.

Quando o resto for zero se diz que o *dividendo* é divisível pelo *divisor*, ou que *dividendo* é um múltiplo do divisor. A divisão é rica de conceitos, deixe-me listar alguns:

1. múltiplo, se diz dum número que deixa resto zero na divisão por outro. Por exemplo 8 é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de cinco.

2. número inteiro positivo primo é um número que que não pode ser decomposto em fatores. Por exemplo $6 = 2*3$ portanto 6 não é primo. Os primeiros números primos são
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 21, 23, 29, 31, 37 \cdots$$
e é um teorema da aritmética que o conjunto dos números primos é infinito. Se prova este teorema por absurdo, supondo que exista um último número primo. Seja N este último número primo, então qualquer número natural $p > N$ tem fatores que se encontram no conjunto finito dos números primos $2, 3, 5, \cdots, N$.

   Preciso demonstrar que é falsa a sentença "*O conjunto dos números naturais a partir de* $p = N + 1$, *isto é,* $N + 1$ *e seus* sucessores *todos tem fatores tirados do conjunto finito dos números primos*".

   Para isto eu preciso *formatar* o *conjunto finito dos números primos*. Seja então
$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 5, \cdots, N\} \text{ o conjunto dos números primos;} \tag{2.29}$$
$$\mathcal{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots, p_k = N\}; \tag{2.30}$$
quer dizer que o conjunto finito dos números primos tem k elementos e eles estão todos identificados como elementos da sequência que aparece na equação (eq.30).

   Deixe-me definir R como o produto dos números primos mais uma unidade
$$R = +\prod_{j=1}^{k} p_j; \tag{2.31}$$
A divisão de P por qualquer dos números primos do *conjunto finito de números primos* $\mathcal{P}$ deixa resto 1 e portanto

   (a) P é um novo número primo, ou

   (b) o conjunto finito dos números primos $\mathcal{P}$ está incompleto e tem pelo menos um outro número primo que é fator de R

   contradizendo assim que exista um conjunto finito de números primos.

   Entenda melhor esta demonstração, considere os números primos obtidos pelo crivo de Eratóstenes rolado até 89 então
$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89\} \tag{2.32}$$

então o produto destes números primos é

$$P = 341178144081439945557703010507713490 71$$

e o número primo 32983 é um fator de P.

$$34117814408143994555770301050771349071 = \tag{2.33}$$
$$= 32983 * 75209 * 461093 * 29828588600288736211501; \tag{2.34}$$

Eu obtive a fatoração de P usando o programa `factor` que é distribuído com `Debian/Gnu/Linux`.

Então existe pelo menos um número primos, 32983, que não estava listado naquele *crivo de Eratóstenes.*

Este é o *teorema fundamental da Aritmética* que reza que o conjunto dos números primos é infinito, e sua demonstração de faz por absurdo. Se supõe que exista uma quantidade finita de números primos, e assim se cria um *crivo de Eratóstenes* descrevendo todos os números primos, o conjunto $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\infty, \dots, \mathcal{P}_\|\}$. O produto dos elementos de $\mathcal{P}$ mais um é o número R que vai deixar resto 1 com todos os números primos daquele *crivo de Eratóstenes* que assim não contém todos os números primos. O *teorema fundamental da Aritmética* alimenta uma atividade muito intensa de pesquisa em Matemática que hoje vive em torno do resultado do matemático chinês *Yitang Zhang* que conseguiu construir *progressão aritmética* onde estão localizados todos os números primos entre os seus termos determinando assim um salto máximo existente entre dois números primos.

O resultado de *Yitang Zhang* foi logo melhorado, usando-se para isto os seus próprios métodos, e determinando um salto entre dois números primos menor do que ele havia obtido.

Aqui está um *crivo de Eratóstenes* que obtive rodando programa escrito em `python` dentro do qual eu usei o programa `factor` distribuido com `Debian/Gnu/Linux`

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227,
229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389,
397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,
479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571,
577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653,
659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,
757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853,
857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947,
953, 967, 971, 977, 983, 991, 997
```

Este é um resultado de `Inteligência Humana`, um programa escrito por mim, usando uma linguagem de programação construida por seres humanos, `python`, inicialmente construída por *Guido Rossi* com apoio de uma multidão de programadores que formam a *comunidade python* e fiz uso dum programa cujo autor desconheço, `factor` que vem junto com a minha distribuição `Debian/gnu/linux`.

Capítulo 3

os números racionais

Verificar onde entra a dedução da geratriz duma dízima periodica, editando /tex/dicionarioNumerosRacionais.tex

Os **números racionais** são as frações é a referencia a um número que significa uma parte dum inteiro, algumas vezes designada como *fração própria* em oposição às frações impróprias que são frações tão boas como as próprias apenas chamadas assim porque representam números racionais que não são inteiros mas que são em módulo maior do que 1. É um exemplo de defeito do linguajar matemático oriundo duma época em que as frações não eram consideradas números em todo o seu direito.

Uma fração é um objeto da forma $\frac{p}{q}$ em que $p, q \in \mathbf{Z}; q \neq 0$ e que representa um número racional.

A história é uma arte muito difícil e um exemplo disto é o *triângulo de Pascal*, denominado em homenagem a Blaise Pascal que viveu no século 16, mas, aparentemente, os matemáticos chineses já o conheciam pelo menos desde o século 12 de quando se sabe dum livro de Matemática chinesa fazendo referência ao mesmo duzentos anos antes de Pascal. Também parece que a geometria, dita dos gregos, era conhecida por outros povos anteriores aos helenos que, apenas teriam compilado de forma organizada aquilo que chegou até nós como *geometria euclidiana*.

Aqui havia um erro! Corrigido!

Isto para afirmar, sem me sentir obrigado a grandes justificativas que, num certo momento da história humana, provavelmente na Idade Média, se começou a conceber que objetos como $\frac{1}{3}$ *seriam números*. O uso do condicional tem sentido porque até recentemente as escolas ensinavam que $\frac{5}{3}$ seria uma *fração imprópria* sugerindo que não seria bem uma fração! Os números negativos ainda hoje são tratados *negativamente* e os números complexos nem sempre fazem parte do currículo do Ensino Médio . . . para não mencionar os *quatérnions* que, possivelmente, há gente que nem sabe que existem.

Então fazendo uma história romanceada, deixe-me dizer que inventamos os objetos do tipo $\frac{1}{n}$ quando $n \in \mathbf{N}; n \neq 0$ para representar os inversos multiplicativos dos número naturais, com exceção do zero, e aos poucos construímos uma aritmética com estes novos objetos com as seguintes regras:

1. O símbolo $\frac{p}{q}$ representa um número sempre que $q \neq 0$ em que os membros $p, q \in \mathbf{Z}$. Há o hábito de designar p como *numerador* e q como *denominador*. A razão destes nomes vem da ideia intuitiva da invenção das frações em que $\frac{2}{3}$ significaria a quantidade 2 de uma coisa chamada "terço" donde o 2 é o "numerador" enquanto que 3 dá o nome, "denominador".

2. O inverso aditivo do número $\frac{p}{q}$ é o número $\frac{-p}{q}$ que também pôde ser escrito como $-\frac{p}{q}$ e então o sinal $-$ é um modificador de tal modo que $a + (-a) = 0$.

3. Vale regra $-(-a) = a$;

4. O zero Sempre que $q \neq 0$, $\frac{0}{q} = 0 \in \mathbf{N}$ e aqui guarde como observação para uso posterior, então existe uma quantidade imensa de representantes do zero e isto é um problema que preciso resolver!

5. Sempre se pode reduzir uma fração à sua expressão mais simples eliminando fatores comuns ao *numerador* e ao *denominador*. Assim
$$\frac{8}{80} = \frac{2^3}{2^4 5} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10} \tag{3.1}$$
ou seja, se fatora numerador e denominador e assim se eliminam os fatores comuns para obter a forma irredutível duma fração. Esta operação cria um problema de que vou tratar ao final criticando todo o processo. Agora se tem pelos menos dois objetos representando a mesma coisa, a fração simplificada e anterior que pode ser simplificada:
$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

6. Esta regra de simplificação pode ser usada ao reverso para permitir a definição da soma de frações. Para somar
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
se acrescentam fatores comuns até obter denominadores iguais:
$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q}{qp} + \tfrac{p}{pq} \tag{3.2}$$
$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q}{pq} + \tfrac{p}{pq} = \tfrac{1}{pq}(q+p) \tag{3.3}$$
$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{q+p}{pq} \tag{3.4}$$
porque temos q objetos do tipo $\frac{1}{pq}$ e p objetos do tipo $\frac{1}{pq}$. Estou usando, a comutatividade da multiplicação de números naturais, na lista de operações acima junto à regra que me permite eliminar ou incluir fatores comuns e finalmente, silenciosamente, estou usando *distributividade* da multiplicação em relação a adição que vou incluir como a próxima regra.

7. Vale a distributividade da multiplicação relativamente à soma.

8. Posso agora deduzir da regra anterior uma regra geral para soma de frações
$$\tfrac{m}{n} + \tfrac{p}{q} = \tfrac{qm}{nq} + \tfrac{np}{nq} \tag{3.5}$$
$$\tfrac{m}{n} + \tfrac{p}{q} = \tfrac{qm+np}{nq} \tag{3.6}$$
sendo a regra:
   - multiplicam-se os denominadores para formar o novo denominador;
   - multiplicam-se em cruz, numeradores e denominadores e se os somam para formar o novo numerador.
   - o resultado nem sempre será uma fração na forma mais simples, e este um problema de que tenho que tratar em seguida, mas mencionei antes *como simplificar uma fração eliminando os fatores* comuns ao numerador e ao denominador.

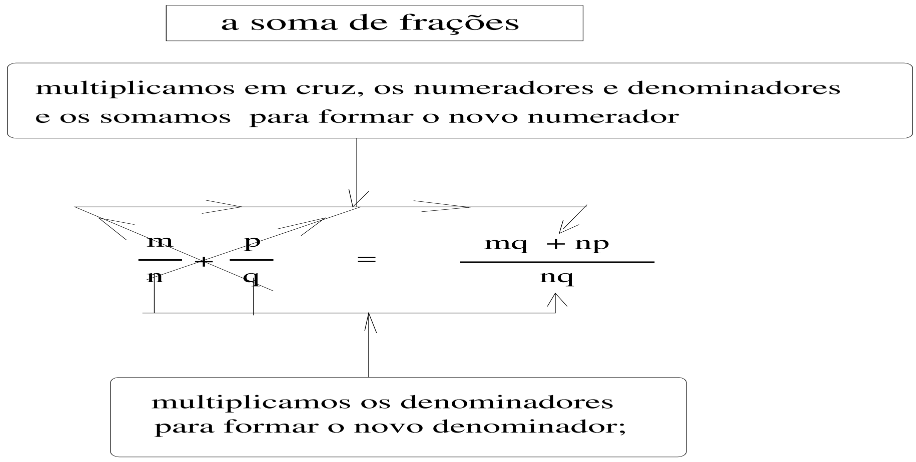


Figura 3.1: gráfico mostrando a soma de frações

A figura (3.1), página 22, apresenta um algoritmo gráfico para ilustrar a regra de soma de frações.

O principal objetivo era conseguir que toda fração tivesse um inverso multiplicativo:

$$n \neq 0 \text{ e } m \neq 0 \implies \frac{n}{m}\frac{m}{n} = \frac{mn}{mn} = 1 \tag{3.7}$$

não sendo necessário indicar que $m \neq 0$ porque já excluí a possibilidade de haver frações com denominador nulo.

O conjunto das frações é o conjunto dos números racionais e é designado com o símbolo **Q**.

Resumindo, valem para este novo conjunto de objetos,**Q**, todas as propriedades

1. A-1 No conjunto **Q** existe um elemento neutro relativamente à **adição**.
2. A-2 Existe um inverso para todo número racional, relativamente à **adição** (inverso aditivo).
3. A-3 A *adição* é comutativa.
4. A-4 A *adição* é associativa.
5. M-1 Existe um elemento neutro relativamente à **multiplicação**.
6. M-2 Para todo número racional diferente de zero existe um inverso multiplicativo.
7. M-3 A *multiplicação* é comutativa.
8. M-4 A *multiplicação* é associativa.
9. AM-1O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número natural resulta em zero.
10. AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

Agrupei as propriedades em três classes, da adição (A), da multiplicação (M), e relativas à adição e multiplicação (AM). Observe que as propriedades da adição são as mesmas que da multiplicação com um pequeno detalhe sobre a exceção do zero na multiplicação. Estas quatro propriedades são as que definem a *estrutura de grupo*. Tem-se aqui um *grupo aditivo*, um *grupo multiplicativo* e as duas propriedades que estabelecem relação entre estes dois grupos. São estas propriedades que fazem de $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ um *corpo comutativo*, porque a multiplicação é comutativa.

Relação de equivalência

As *relações de equivalência* resolvem problemas formais de unicidade e outros problemas de identificação como é o caso de polígonos semelhantes que a geometria precisa de identificar. São objetos diferentes mas eles precisam ser "equivalentes". A relação de equivalência é uma generalização da igualdade.

No caso das frações há uma infinidade de frações que representam o mesmo número, $\frac{n}{n} \equiv 1; n \neq zero$, por exemplo. Isto cria problemas para a Álgebra que precisa que o inverso dum número seja único, então como no caso dos triângulos semelhantes, é preciso identificar as frações que representarem o mesmo número colocando-as todas numa mesma *classe de equivalência*. Mas duas frações iguais forma o que chamamos de *proporção* então o *o produto dos meios é igual ao produto dos extremos* e assim se chega à regra de equivalência de frações:

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{p}{q} \iff nq = mp \tag{3.8}$$

é interessante observar que todas as frações equivalentes ficam sobre uma mesma reta determinada pela representação mais simples, pela fração irredutível, a figura (3.2) página 23, mostra as classes de equivalência das frações como pontos das retas contidas

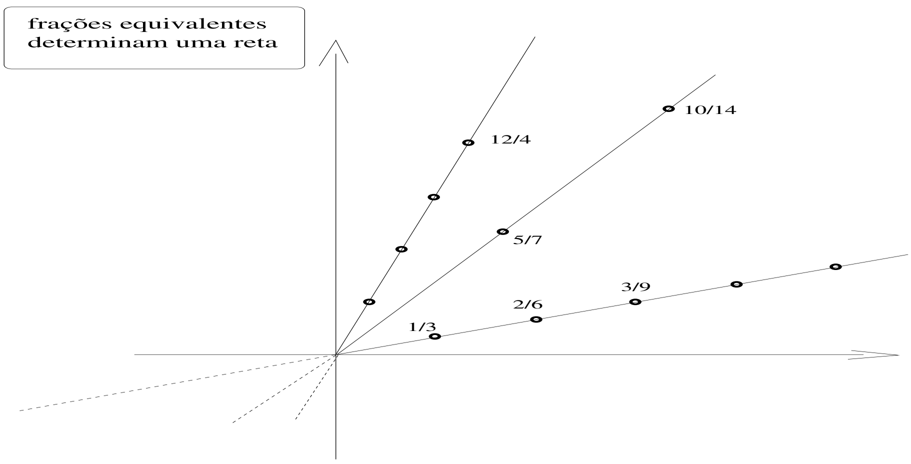


Figura 3.2: retas do *plano de Gauss* são classes de equivalência de frações

no *plano de Gauss*, o produto cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Representação geométrica de Q

Os números racionais tem uma propriedade de "densidade" que os inteiros não têm:

1. dados dois números racionais sempre tem outro número racional *entre* eles.

2. dados dois números racionais, sempre tem outro à esquerda;

3. dados dois números racionais, sempre tem outro à direita;

A figura (3.3), página 24, compara com o que acontece na reta a propriedade de

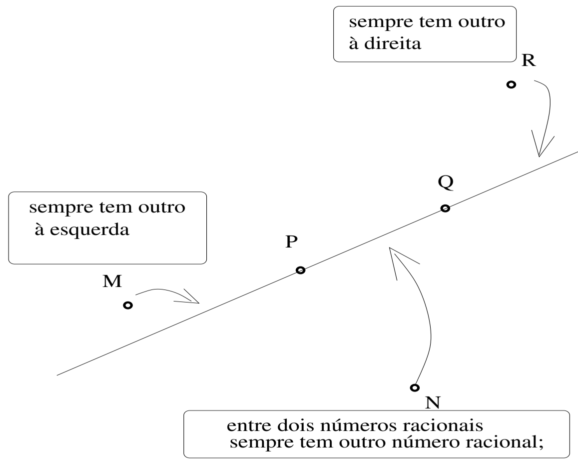


Figura 3.3: entre dois pontos, na reta . . .

densidade dos números racionais. Esta comparação sugere fazer uma interpretação geométrica dos números racionais.

1. Seleciona-se um ponto na reta para a dividir em duas semirretas: a *semirreta positiva* e a *semirreta negativa*. É o representante do zero.
2. Depois, com um compasso selecionam-se os inteiros à distâncias iguais, os inteiro positivos na semirreta positiva, e os inteiros negativos na semirreta negativa.
3. O espaço que sobra é para as frações que não são inteiros.
4. Depois você irá ver que que na reta ainda tem números que não são racionais, os números irracionais, que também encontram lugar na reta.

Então existe uma multitude de exemplares de retas representando $\mathbf{Q}$ e simplesmente vou dizer que todas estas retas são equivalentes como representação de $\mathbf{Q}$, e isto vai me permitir a *definição geométrica* das operações aritméticas de $\mathbf{Q}$. Por exemplo, a figura (3.4) página 25, ilustra o produto 1.5×2 usando semelhança de triângulos. Escolhi duas retas para representar $\mathbf{Q}$ e encontrei o resultado da multiplicação em uma das retas. Observe que precisei da relação de equivalência entre as retas numéricas para construir a multiplicação geométrica.

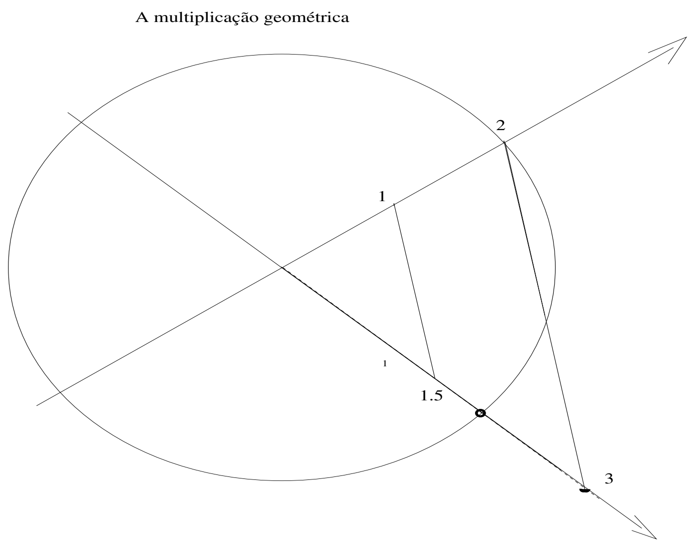


Figura 3.4: A multiplicação geométrica

Capítulo 4

os números reais

Um **número real** é uma **dízima** que pode ser *periódica*, e então é um *número racional*, ou *não ser periódica*, e então é *número irracional*.

Há um pequeno erro na afirmação anterior que somente vou poder elucidar ao final deste texto, entretanto não custa nada alertá-la, dizendo-lhe qual é o erro mas pedindo que conviva com ele até que seja possível mostrar os detalhes. As *dízimas* são representantes das classes em que os números reais estão divididos. Como no caso dos números racionais, $\frac{1}{3}$ é o *melhor* representante da classe das frações que lhe são equivalentes, porque é uma *fração irredutível*. O mesmo eu vou poder dizer das *dízimas*, e o erro da frase inicial seria equivalente à afirmação "*um número racional é uma fração irredutível*".

Deixe-me dar lhe os dois exemplos:

1. $\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots = 0.(3)$ é uma dízima periódica, com período (3) e você tem no começo a geratriz desta dízima, um número racional,

2. 3.14159265358979323848... que é a *constante de Arquimedes* que eu obtive usando `calc` com 20 casas decimais, é uma aproximação do número irracional π. Não é uma dízima periódica, os dígitos vão se suceder de uma forma "arbitrária" de tal modo que é impossível criar um algoritmo que mostre o termo de ordem n para qualquer valor de n. Não há nenhum padrão repetido. Existem fórmulas que geram os dígitos de π com alguma precisão, mas o valor é sempre *aproximado*.

Há três formas clássicas de construir o conjunto dos números reais partindo dos números racionais como *material primário*, no sentido de que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, o conjunto dos números racionais é um subconjunto do conjunto dos números reais

1. os cortes de Dedekind,

2. os intervalos encaixados, que é bem parecido com os *cortes*, e possivelmente também se deve a Dedekind,

3. as *sucessões de Cauchy*, que é o meu método preferido porque é baseado na estrutura algébrica que surge de forma natural da estrutura algébrica do conjunto dos números racionais. Nos outros casos é preciso construir a estrutura algébrica em cima dum *conjunto novo* e eu entendo que isto é muito mais difícil de fazer

do que o surgimento dum *conjunto novo* oriundo das sucessões de números racionais que já tem uma estrutura algébrica bem justificada, e vou mostrar aqui *como se faz* usando este terceiro método.

Partindo do conjunto $\mathbf{Q}$, como *material primário*, é simples mostrar que existe um novo conjunto $\mathbf{R}$; $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, usando uma *intuição geométrica*. Confira os detalhes em *números racionais* mas vou, rapidamente, repetir os passos essenciais aqui. Deixe-me dar um nome ao *conjunto das sucessões de números racionais* uma vez que vou estar sempre me referindo a este conjunto que será o meu material de trabalho. Seja S o *conjunto das sucessões de números racionais*.

O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais tem as mesmas propriedades da reta na geometria euclidiana:

1. Entre dois "pontos" $x, y \in Q$ sempre tem um ponto no *meio*, embora este conceito, "*meio*", esteja indefinido na geometria euclidiana, ele é considerado um *axioma* o que dispensa uma definição. Em $\mathbf{Q}$ este conceito pode ser melhor apresentado, dizendo-se que dados $x, y \in Q$ qualquer *média* entre eles se encontra no segmento que eles determinam. Aqui, "*entre eles*" pressupõe a existência duma *relação de ordem* inexistente na reta da geometria euclidiana, mas existente em $\mathbf{Q}$. E a relação de ordem de $\mathbf{Q}$ é facilmente transferida para o conjunto das sucessões de números racionais,S. Fiz referência a "qualquer média" porque há distintos tipos de média, *aritméticas, geométricas* ...

2. Dados dois "pontos" $x, y \in Q$ sempre tem um ponto fora do segmento determinado por estes dois pontos, a geometria euclidiana se refere ao segmento de reta determinado por dois pontos. Em que $\mathbf{Q}$ esta regra é mais forte. Posso escolher "$x \leq y$" e afirmar que existe um ponto $t < x$ e um ponto $w > y$,
$$t \leq x < y \leq w; \tag{4.1}$$

3. Ambas as propriedades podem iteradas garantindo que $\mathbf{Q}$ é infinito entre dois dos seus elementos como fora do segmento que os dois elementos determinam. Esta é uma forma livre de fazer referência à *propriedade arquimediana* que qualquer reta possui, assim como $\mathbf{Q}$.

Estas propriedades permitem que se faça uma *identificação* entre $\mathbf{Q}$ e um *subconjunto de qualquer reta* criando-se o conceito de *reta numérica*.

Acho que está passando do *momento* de dar um nome a este novo conjunto, o *conjunto dos números reais*: $\mathbf{R}$. Qualquer *reta numérica* é um representante de $\mathbf{R}$ e de agora em diante eu vou usar a expressão *reta numérica* como equivalente ao símbolo $\mathbf{R}$ que representa o *conjunto dos números reais*.

A geometria mostra que na *reta numérica* tem pontos que não pertencem a $\mathbf{Q}$, confira a figura (fig 4.1), página 28, em que posso desenhar uma sucessão de círculos de raio $\sqrt{n}$ que, *com algumas exceções*, é um número irracional. Os círculos oferecem o método de determinação geométrica de $\sqrt{n}$ na *reta numérica*. Se você construir, na figura (fig 4.1), um triângulo retângulo de altura 1 com o cateto horizontal medindo x a hipotenusa, que é o raio do círculo, vai medir $\sqrt{x^2+1}$ então o círculo com este raio vai encontrar o eixo OX. O último círculo desenhado foi obtido com $x = \sqrt{3}$ que marcou no eixo OX o número 2.

Então a *reta numérica* é uma outra *coisa* diferente de $\mathbf{Q}$, é um novo conjunto que chamei de $\mathbf{R}$.

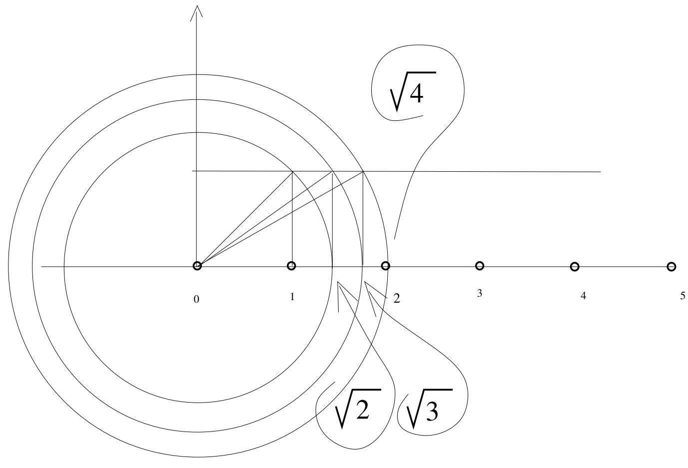


Figura 4.1:

O exemplo mais comum, e o que aparece na figura (fig 4.1), página 28, é $\sqrt{2}$ cujo algoritmo cria de forma muito engenhosa uma *dízima não periódica*, embora o algoritmo não sirva como uma prova de que $\sqrt{2}$ é *dízima não periódica*. Esta demonstração é feita por contradição,

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \text{ é uma fração irredutível;} \tag{4.2}$$

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2; \tag{4.3}$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ é par ;} \tag{4.4}$$

$$p^2 \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad p \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad p = 2m; m \in \mathbf{N} \tag{4.5}$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{4m^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2m^2}{q^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2m^2 \tag{4.6}$$

$$q^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ é par} \quad \Rightarrow \quad q \text{ é par ;} \tag{4.7}$$

$$p, q \text{ são pares} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} \text{ não é irredutível;} \tag{4.8}$$

Na equação (eq.8) eu cheguei a uma contradição porque eu parti da hipótese de que $x = \frac{p}{q}$ é uma *fração irredutível*.

Eu comecei dizendo que os *números* eram *dízimas* que se dividiam em duas classes: *dízimas periódicas* e as *dízimas não periódicas*. As primeiras têm uma representação no formato $\frac{p}{q}$ que é a *geratriz* da *dízima*. As *dízimas não periódicas* não admitem uma geratriz porque, como os algarismos aparecem numa sequência imprevisível, é impossível aplicar-lhes o algoritmo da soma dos termos duma progressão geométrica que produz a geratriz no caso das *dízimas periódicas*.

Então na reta numérica tem pelos menos um número, $\sqrt{2}$, que não é uma dízima periódica. Claro, tem uma infinidade, para começar $\sqrt{n}$ como a figura (fig 4.1), página 28 mostra sempre que n não for um quadrado perfeito, por exemplo, qualquer número primo, portanto uma infinidade. Outros dois exemplos menos intuitivos são π e e que nem mesmo são *números algébricos* coisa que $\sqrt{n}$ é.

Esta linha de raciocínio leva naturalmente ao método de Dedekind para construção dos números reais, mas ela tem o defeito de oferecer uma grande dificuldade para introduzir no novo conjunto os métodos algébricos que existem em $\mathbf{Q}$. Somente para mostrar-lhe a razão da dificuldade do método de Dedekind, ele trabalha com um par de sucessões de números racionais, portanto, pelo menos, é duas vezes mais complicado do que trabalhar apenas com uma sucessão de números racionais. Eu vou deixar de lado este método, apenas guardando o fato de que o conjunto $\mathbf{Q}$ tem uma representação geométrica que se chama de *reta numérica*, que é qualquer reta na qual se tenha eleito um *ponto* para representar o *zero* e outro *ponto* para representar 1, definindo, deste modo, as semirretas, *positiva* e *negativa*. O que leva a definir a *ordem* na *reta numérica*. Confira a figura (fig 4.2), página 29,

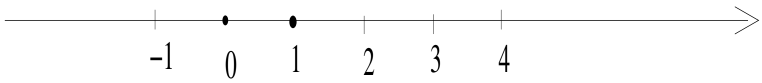


Figura 4.2: reta numérica

E eu vou aproveitar esta construção geométrica do *novo conjunto* que contém $\mathbf{Q}$ para apresentar-lhe este *novo conjunto* de forma diferente. Mas se você for crítica, deverá estar observando que estou falando de três coisas sem estabelecer a conexão entre elas:

- dízimas,
- pontos da *reta numérica*,
- sucessões de números.

Mas como definir as operações neste novo conjunto? Para responder a esta questão é que eu preciso apresentar uma forma de construir o novo conjunto dos números reais aproveitando a estrutura algébrica existente, e conhecida, dos números racionais.

Alguma conexão eu já estabeleci quando mostrei que posso identificar os números racionais na *reta numérica*, a figura (fig 4.2), página 29, apresenta os inteiros, mas já fiz menção às médias que preenchem os intervalos entre dois inteiros com frações, as *dízimas periódicas*, e também já mostrei, geometricamente, que algumas *dízimas não periódicas* se encontram na *reta numérica*. Falta-me completar o quadro estabelecendo a estrutura algébrica da *reta numérica*.

- Primeiro mostrando que uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*. O conjunto das *dízimas*, que é $\mathbf{R}$, é um subconjunto de S que é o conjunto de todas as sucessões de números racionais.

$$\mathbf{R} \subset S; \tag{4.9}$$

  Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um subconjunto próprio de S, e com isto vou chegar ao conceito de *limite*. Este ponto é crítico, a partir dos números racionais, como material conhecido, ou ainda como *material primário* que vou usar para construir o novo conjunto, eu crio um novo conjunto, S das sucessões de números racionais que herdam de maneira natural a estrutura algébrica de $\mathbf{Q}$ e é deste conjunto que eu vou retirar um subconjunto que é o conjunto dos números reais. O processo de escolha é um novo conceito, *limite*. Desta forma eu estou colocando em funcionamento dois processos completamente integrados, a criação dum novo conjunto e apresentação dum novo conceito. Um número real é um limite e com isto eu vou eliminar um doloroso processo que é o estudo das propriedades do limite, são nada mais do que as propriedades dos números reais.

Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um subconjunto próprio de S, e com isto vou chegar ao conceito de *limite*.

- Depois mostrando que em S está definida uma estrutura algébrica que vai ser então *estampada* em $\mathbf{R}$, deixando o projeto completo.

Sempre que eu *produzir* uma dízima o que estou *produzindo* é uma sucessão

$$\begin{cases} s_0 = 1, s_1 = 1.4, s_2 = 1.41, \dots s_{19} = 1.4142135623730950488, \dots \\ s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19} \in \mathbf{Q}, \dots ; s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19}, \dots) = \sqrt{2}; \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = .3, t_2 = 0.33, \dots t_{19} = 0.3333333333333333333, \dots \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19} \in \mathbf{Q}, \dots ; t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19}, \dots) = \frac{1}{3}; \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1, \dots, \sigma_k = (-1)^k, \dots ; \\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots \sigma_k \in \mathbf{Q}, \dots ; \sigma = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots); \end{cases} \tag{4.12}$$

quer dizer que o conjunto de *todas as dízimas* é um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais. Repetindo, uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*, mas *sucessão de números racionais* não precisa ser uma *dízima*. O terceiro exemplo, na equação (eq.12), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima.

Uma dízima é uma sucessão, na equação (eq.10) você tem uma *dízima não periódica* e na equação (eq.11) você tem uma *dízima periódica*.

Mas tem *sucessões de números racionais* que não são *dízimas*, que é o exemplo da sucessão da equação (eq.12), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima. O que diferencia estes dois conceitos no conjunto das sucessões, *dízimas* de *não dízimas* é um novo conceito, *limite*, sobre o qual eu pretendo oferecer-lhe uma introdução aqui. Este conceito é um dos mais difíceis que a estudante encontra quando começa a estudar a Matemática superior.

Mas fique alerta, "*difícil*" não é sinônimo de "*impossível*"! Aquilo que é difícil, o é porque representa um salto no conhecimento. Sim, o conhecimento é feito de saltos, nem sempre os dados se conectam facilmente. E *limite* representa um destes saltos. Mais a frente eu vou voltar a discutir o *salto lógico* que representa a passagem de $\mathbf{Q}$ para $\mathbf{R}$, e ele representa este salto do conhecimento que você pode encontrar procurando pela palavra chave *salto de cardinalidade*. Quem descobriu este salto foi o matemático Cantor e que, ao morrer, começava a duvidar de sua descoberta que somente ficou devidamente esclarecida 100 anos depois num grande esforço que foi feito na década de 40 para entender os fundamentos da Matemática que estavam seriamente desestruturados por várias correntes de pensamento. Está é uma outra história que merece um artigo a parte.

Para romper este salto eu vou usar duma estrategia, dos exemplos de onde eu vou tirar a teoria. A Matemática é uma linguagem, e a melhor maneira de aprender uma linguagem é pelos exemplos, foi assim que você aprendeu a falar a sua língua materna, talvez português, como é o meu caso.

Primeiro eu vou definir um tipo particular de *limite*, na verdade uma *classe de limites*. Não se assuste com esta referência a uma *classe*, lembre-se que um número racional, uma fração, é uma classe:

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{2}{6} \equiv \frac{10}{30} \dots \tag{4.13}$$

e você convive muito bem com as classes de números racionais. A primeira fração que eu escrevi desta classe de números racionais, $\frac{1}{3}$ é um *representante* desta classe, a *fração irredutível* da classe. Mas todas as outras são tão boas como a primeira. Quer dizer que existe uma infinidade de representações para $\frac{1}{3}$, e você convive perfeitamente com isto. O conjunto dos números reais é formado também de classes e é o *limite* que caracteriza cada uma das classes, e agora eu vou apresentar-lhe a classe do zero, o limite zero.

A classe do zero

A palavra chave agora é *convergir*, que é quase que um sinônimo de *limite*. Eu vou definir a *classe das sucessões de números racionais que convergem para zero*. Começo com a definição de convergência para zero e mostro que o conjunto de tais sucessões não é vazio e tem uma estrutura algébrica interessante.

Eu vou usar esta classe para definir um tipo particular de *limite* que vai me permitir a construção da teoria dos limites que é necessária ao Cálculo Diferencial e Integral.

Deixe-me começar com um exemplo do qual vou tirar todos os dados para fazer uma definição.

$$t = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots); t_k = 0; \tag{4.14}$$

$$s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}; \begin{cases} k > 0 & \Rightarrow \quad s_k = \frac{1}{k}; \\ k = 0 & \Rightarrow \quad s_0 = 0; \end{cases} \tag{4.15}$$

A sucessão identicamente nula definida na equação (eq.14) é um exemplo de sucessão que converge para zero, é a sucessão constante zero. Um outro exemplo de sucessão que converge para zero está definida na equação (eq.15). em que eu incluí uma *regra de proteção* para o índice $k = 0$, entretanto a definição poderia ser arbitrária, porque o que interessa numa sucessão é o seu *comportamento para grandes valores do índice* e chama-se isto de *comportamento assintótico*.

Na figura (fig 4.3), página 31, você pode ver o gráfico da sucessão definida na

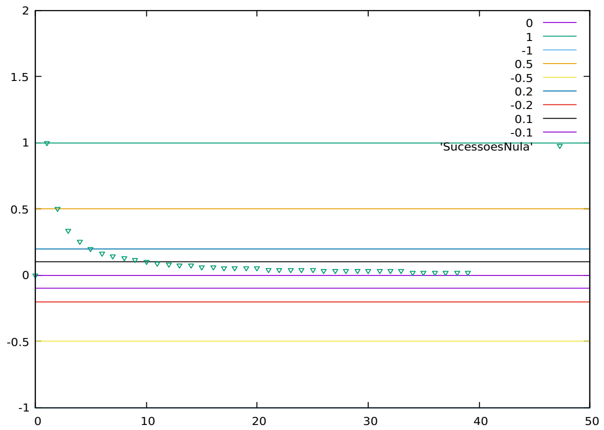


Figura 4.3:

(eq.15). Nela você também pode ver retas horizontais marcando a abertura dum "*paquímetro*" com diâmetros $d \in \{1, 0.5, 0.2, 0.1\}$, a última "*abertura*" ficou pouco visível.

Paquímetro é o instrumento que você pode ver na figura (4.4), página 33. É um instrumento de alta precisão que serve para medir os diâmetros, interno ou externo, de figuras cilíndricas e usado pelos *torneiros mecânicos*.

coisa que uma bruxa confundiu com encanador...

Presidente Lula
é *torneiro mecânico*

Aqui eu estou usando um paquímetro para determinar quando

$$|s_k| < \epsilon; \epsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}; \tag{4.16}$$

e você pode verificar na figura

1. $\epsilon = 0.5$ vale para todo $k > 2$;
$$k > 2 \Rightarrow |s_k| < 0.5 = \epsilon;$$
2. $\epsilon = 0.2$ vale para todo $k > 5$;
$$k > 5 \Rightarrow |s_k| < 0.2 = \epsilon;$$
3. $\epsilon = 0.1$ vale para todo $k > 10$;
$$k > 10 \Rightarrow |s_k| < 0.1 = \epsilon;$$

Procure entender as "*traduções*" que eu fiz de cada sentença nos três casos que eu considerei. É esta *tradução* que eu vou usar na definição.

Eu estou querendo determinar a partir de qual índice k é verdade que "$|s_k| < \epsilon$" e a figura me mostra três respostas para esta indagação.

Agora vou fazer a a definição de *sucessão que converge para zero* usando a experiência com sucessão da equação (eq.15).

Definição 7 (sucessão) *que converge para zero Seja $s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que*

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon)\,; \tag{4.17}$$

Então s_k converge para zero e se usa a notação

$$s_k \to 0; \tag{4.18}$$

para indicá-lo. Há também outra notação sobre a qual vou fazer comentários mais adiante.

O exemplo da equação (eq.15) me deu as três respostas listadas acima, mas não provou nada. Mas logo eu fazer esta demonstração.

Geometricamente, melhor dizendo, "*figurativamente*", se você pegar um *paquímetro*, cuja imagem você pode ver na figura (4.4), página 33, você pode estabelecer uma abertura ϵ, como estabelece a definição e percorrer o gráfico duma sucessão até encontrar o índice K, a partir do qual a sucessão fica confinada numa faixa de raio ϵ em volta do eixo OX como mostra a figura (fig 4.4), página 33. Lembre-se, o *paquímetro* serve para determinar *diâmetros*, aqui estou usando para encontrar a *largura* ϵ duma faixa em que os termos da sucessão ficam confinados a partir de um índice K. Se isto for possível, para qualquer que seja ϵ, você obteve

$$(k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon)\,; \tag{4.19}$$

você encontrou o índice K que corresponde à abertura ϵ e a partir de K todos os termos da sucessão ficam confinados numa faixa de largura ϵ.

Agora eu preciso ter uma demonstração de que afirmação vale para valores arbitrário de ϵ, então a sucessão se encontra no conjunto S_0. Preciso demonstrar por que exemplos nada provam.

Vou fazer *demonstrações*, e vou começar com exemplos simples para que você compreenda a *razão da coisa*. Deixe-me provar que a sucessão do exemplo apresentado na (eq.15) pertence ao conjunto S_0.

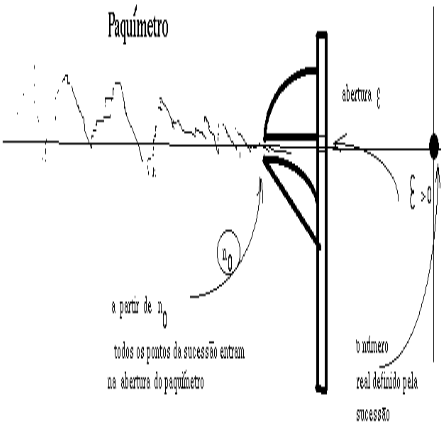


Figura 4.4: paquímetro e uma sucessão nula

$$\frac{1}{k} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad k > \frac{1}{\epsilon} \tag{4.20}$$

$$K = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor; \tag{4.21}$$

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |\frac{1}{k}| < \epsilon \tag{4.22}$$

Então $K > \frac{1}{\epsilon}$, entretanto eu procuro o *menor inteiro* que satisfaz esta condição, porque eu preciso especificar um inteiro a partir do qual fica garantido que s_k entra dentro da faixa de raio ϵ que fica em volta do eixo OX porque estou definindo quando s_k tem limite zero.

Deixe-me trocar em miúdos o conteúdo da sentença da equação (eq.21). Você viu na figura (fig 4.3)

$$k > \frac{1}{0.5} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} < 0.5 \tag{4.23}$$

mas nem sempre $\frac{1}{\epsilon}$ é um número inteiro e os índices das sucessões são números inteiros é por isto que eu preciso estipular o *menor inteiro que seja maior ou igual* $\frac{1}{\epsilon}$ que é o conteúdo da notação $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$. A maioria das linguagens de programação entendem este símbolo da Matemática que elas chamam de `ceil`, que significa *teto* em inglês, na *linguagem do império*.

- O menor inteiro que é maior ou igual a 0.5 é 1
- O menor inteiro que é maior ou igual a 1.5 é 2
- O menor inteiro que é maior ou igual a 2.5 é 3
- O menor inteiro que é maior ou igual a 3.5 é 4
- O menor inteiro que é maior ou igual a 4.5 é 5
- O menor inteiro que é maior ou igual a 5.5 é 6
- O menor inteiro que é maior ou igual a 6.5 é 7
- O menor inteiro que é maior ou igual a 7.5 é 8
- O menor inteiro que é maior ou igual a 8.5 é 9
- O menor inteiro que é maior ou igual a 9.5 é 10

- O menor inteiro que é maior ou igual a 10.5 é 11
- O menor inteiro que é maior ou igual a 11 é 11

para obter estes exemplos eu rodei o comando

```
   for(k=0.5;k<11; k++) {
   print "
item O menor inteiro que é maior ou igual a ",
   "é ", ceil(k)
    }
```

num terminal, executando `calc`. O último exemplo, como o número 11, eu acrescentei manualmente! Mas bastava acrescentar um `if()` para obter tudo automaticamente e depois apenas raspar e colar dentro do editor.

Na prática esta definição me permite encontrar uma *aproximação* para o *valor assintótico* que a sucessão representa, quer dizer um valor que eu posso colocar no lugar de $s_k = \frac{1}{k}$ para ser usado como *representante* para esta sucessão com um erro da ordem ϵ.

Esta frase não é fácil, e ela representa um primeiro passo para a compreensão do limite que Richard Courant dizia que "*era o limiar do ensino superior*, e ele falava isto em 1940... Continua ainda sendo a porta de entrada para o Cálculo. Se você passar por esta porteira o resto é bem mais simples. E eu vou justificar isto ao longo deste texto.

O que me interessa numa *sucessão que convirja para zero* é que ela tenha *propriedades*, e isto quer dizer, satisfaça a sentenças que possam ser traduzidas para um programa de computador que, pelo menos, mostrem graficamente a relação K, ϵ para um valor de ϵ estipulado.

Foi o que usei para obter dois dos gráficos que aparecem neste texto que foram produzidos com auxílio de duas linguagens de programação, `calc`,[Lo11] para fazer as contas, e `gnuplot`, [WKo10], para produzir os gráficos. O programa que usei para obter estes gráficos pode ser baixado de [Pra07, SucessoesNulas.calc]. O caso destes dois gráficos é um exemplo simples da *intrínseca praticidade* que tem o *formalismo matemático*.

Não somente para eu possa traduzir para um programa de computação, mas eu preciso de *sentenças* que caracterizem logicamente o conjunto que eu quero definir que eu preciso escrever formalmente para usar tanto em demonstrações como em programas de computação.

Vou estabelecer isto de forma algébrica. Como já dei dois exemplos de tais sucessões, posso tranquilamente falar que existe um conjunto de tais sucessões e dar-lhe um nome.

$$S_0 = \{s; s \text{ sucessão que converge para zero}\}; \tag{4.24}$$

e os dois exemplos acima mostram que $S_0 \neq \emptyset$

Propriedades do conjunto S_0.

1. Para todo número $K \in \mathbf{Q}$, se $s \in S_0 \quad \Rightarrow \quad Ks \in S_0$.

   E que significa esta afirmação? Significa que o conjunto S_0 é estável por multiplicação: $KS_0 \subset S_0$ para qualquer número racional K.

   E aqui eu posso falar baixinho um segredo, $K*0 = 0$? Sim, eu vou querer depois definir S_0 como a *classe do zero*! É isto que é *limite*, são *classes de equivalência* que definem números.

2. $s, t \in S_0 \quad \Rightarrow \quad s + t \in S_0$ que significa que S_0 é fechado para adições. Isto já começa a fornecer uma estrutura algébrica ao conjunto S_0. Pode ser que $(S_0, +)$

seja um *grupo* com a operação de adição. A propriedade anterior confirma, porque se $s \in S_0$ então $-s \in S_0$ tomando agora $K = -1$. Quer dizer que todo elemento em S_0 tem um inverso aditivo.

Olha o segredo: $0 + 0 = 0; -0 = 0; K * 0 = 0 \ldots$

3. A propriedade comutativa é nata, uma vez que estarei somando sucessões de números racionais, assim como as propriedades associativa e distributiva. Repetindo a soma de sucessões é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* do produto em relação à soma. Com isto cheguei a que $(S_0, +)$ é um *grupo* comutativo. Confira a definição de *grupo*, mas é a mesma estrutura que tem $(\mathbf{Z}, +)$ que é um *grupo*.

4. Se $s, t \in S_0 \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon$ quando eu escolher $\epsilon < 1$, para um valor máximo das escolhas de K que satisfizerem à condição para cada uma das sucessões s, t. Esta frase ficou complicada! Para cada uma das sucessões s, t e tenho índices K_1, K_2 que eu posso colocar na definição de limite e garantir que

$$|s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon \tag{4.25}$$

mas considere o maior dos dois K_1, K_2 e chame-o de K e agora vale

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon; \tag{4.26}$$

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon; \tag{4.27}$$

$$k > K \quad \Rightarrow \quad |s_k||t_k| < \epsilon; \tag{4.28}$$

*E*sta explicação extra que dei agora é um exemplo interessante, os autores muitas vezes atropelam as leitoras tirando conclusões curtas como eu fiz, antes de me corrigir. Desconfie sempre que você não entender um texto de Matemática, muito provavelmente o autor está atropelando, tente *abrir as contas* que é uma gíria muito usada entre os estudantes de Matemática quando encontram um resultado meio complicado. É porque ficaram escondidos os passos intermediários. Abra as contas!

Então $(S_0, \cdot)$ é fechado para multiplicação isto faz com que $(S_0, +, \cdot)$ seja um anel. Ou seja este conjunto de sucessões que convergem para zero é uma estrutura algébrica semelhante à $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

E porque eu fiz a restrição $\epsilon < 1$? Porque interessa-me garantir que $s \in S_0$ então s é uma sucessão assintoticamente pequena, quer dizer, na desigualdade

$$|s_k| < \epsilon; \tag{4.29}$$

eu vou precisar de escolher valores pequenos para ϵ.

E olha o segredo, $S_0 * S_0 \subset S_0; 0 * 0 = 0;$

O maior sucesso de S_0 consiste em que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é um conjunto de sucessões que "*convergem para* r" que é a próxima definição. Esta frase é incomum nos textos de Matemática, ninguém costuma fazer previsões antes de estabelecer a definição, mas acho que cria um suspense pedagógico fazer desta maneira. Quero mostrar que $S_0 + r; r \in \mathbf{Q}$ é o conjunto da sucessões que convergem para r e preciso agora definir o que significa uma sucessão convergir para r, o que vou fazer alterando a definição de convergência para zero. Depois vou voltar para provar que $S_0 + r$ é *o conjunto das sucessões que convergem para* r.

O trágico quando construímos Matemática e que nos vem ideias brilhantes, que funcionam, apenas não sabemos depois como produzi-las na prática, entretanto este é um item irrelevante para a Matemática. Neste caso eu simples não como calcular $S_0 + r; r \notin \mathbf{Q}$! Isto vai me forçar a encontrar outra saída.

Na busca desta saída eu vou agora definir limite expandindo a definição de limite zero, se achar complicado, leia logo o comentário que se segue à definição.

Definição 8 (sucessão) *que converge para $r \in \mathbf{Q}$ Seja $s = (s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que*

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(k > K \quad\Rightarrow\quad |s_k - r| < \epsilon)\,; \tag{4.30}$$

Agora eu coloco o *paquímetro* com a abertura em volta de r para descobrir a partir de índice K os termos da sucessão vão estar confinados numa *faixa* de diâmetro ϵ centrada em r.

Eu defini a convergência para $r \in Q$, porém, como incluir nas contas $r \notin Q$? Esta é uma *dificuldade psicológica* de quem está passando inicialmente pelo estudo do limite. Se estou "*construindo*", como posso fazer uso dum elemento de um conjunto que ainda não está construído? o que significa $r \notin Q$ nesta definição. Isto é mais do que um problema psicológico, é um problema de lógica. Deixe-me mostrar uma alternativa e desarme sua mente se souber que ela é difícil. Aliás, não espere nada fácil em Matemática, mas lembre-se que Matemática é uma construção de seres humanos, como você. E o que for difícil apenas exige mais concentração e trabalho, nada é *impossível*.

Se $r = \sqrt{2}$ ainda poderia ser possível fazer algumas contas alterando a expressão $|s_k - \sqrt{2}| < \epsilon$ para encontrar

$$k > K \quad\Rightarrow\quad |s_k - \sqrt{2}| < \epsilon \tag{4.31}$$

mas, se $r = \pi$ ficaria complicado! Avançando no curso de Cálculo você vai encontrar fórmulas que lhe vão permitir calcular um pedaço da dízima que fornece uma aproximação par π mas ainda assim vai ser trabalhoso operar com a desigualdade, dado um erro ϵ.

Preciso encontrar uma alternativa, e ela existe, e está no ponto de apresentá-la.

Exemplos sempre mostram o caminho para construir a teoria. Deixe-me começar com

$$r = \tfrac{4}{3} = 1.33333333333333333333\ldots \tag{4.32}$$
$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \tag{4.33}$$

acompanhe as contas

$$s_{20} = 1.33333333333333333333; \tag{4.34}$$
$$s_{40} = 1.3333333333333333333333333333333333333333; \tag{4.35}$$
$$|s_{40} - s_{20}| = 0.0000000000000000000033333333333333333333 < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{4.36}$$
$$|s_{40} - s_{20}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{4.37}$$
$$|s_{40} - s_{2000}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{4.38}$$
$$|s_{40} - s_{2000000}| < \tfrac{3}{10^{21}}; \tag{4.39}$$

você precisa ler os cálculos feitos nas equações (eq.36)- (eq.39) para entender o que vou agora comentar. O *erro* ao considerar o limite de s como sendo $s_{20} = 1.33333333333333333333$ é menor do que $\frac{3}{10^{21}}$.

Repetindo, $\frac{4}{3} \neq 1.33333333333333333333$ mas tomar 1.33333333333333333333 em lugar de $\frac{4}{3}$ representa cometer um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Claro, $\frac{4}{3} \in \mathbf{Q}$ e nós sabemos, os computadores sabem, fazer contas com este símbolo. O que *nem os computadores* e *nem nós* sabemos é fazer contas com π. E é esta a razão deste texto. Como é que vamos *falar com os computadores* e lhes passar um valor para π, ou qualquer outro número que não seja racional? A única forma de fazê-lo é passando um *valor aproximado* como

$$\frac{4}{3} \approx 1.33333333333333333333; \tag{4.40}$$

Repetindo, no caso dos números racionais eu posso passar a um programa de computador o seu valor exato $\frac{p}{q}$ que também é um valor simbólico. No caso de π eu tenho que usar

$$\pi \approx 3.14159265358979323848 \tag{4.41}$$

sabendo que estou cometendo um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Observe que eu *sei* que estou cometendo um erro desta ordem, o que ainda significa que eu tenho o controle do erro que estou cometendo. Isto ainda quer dizer que *sei* qual é o limite duma sucessão de números racionais que se *aproxima* de π e posso parar o processo algorítmico do cálculo de π quando for atingida a precisão que eu precisar.

Estes cálculos me deixam no ponto de mostrar-lhe o método para verificar se uma sucessão tem limite ou não, se ela é convergente ou não e finalmente se for convergente como tomar decisão pela escolha dum valor aproximado. As diferenças $|s_m - s_n|$ é que vão controlar a escolha de m como o ponto de decisão e então o limite $r \approx s_m$ e assim eu cheguei no *critério de Cauchy* para determinação de duas coisas:

1. se s_n é convergente,

2. a decisão de quando parar o algoritmo quando a precisão atingida for a desejada.

É raro um autor se referir ao *critério de Cauchy* como um *método prático de aproximação*. Usualmente ele é apresentado como um *método teórico*, o que ele é, mas é importante o seu aspecto de determinação da aproximação desejada, ou necessária. Deixe-me enunciar o *critério de Cauchy* que é simples reformulação das contas que eu fiz nas equações (eq.36)- (eq.39).

critério de Cauchy é uma condição de existência!

Definição 9 (critério) *de Cauchy*

$$(\forall \epsilon)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(m,n > K \quad \Rightarrow \quad |s_m - s_n| < \epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad s_n \textit{ converge}; \tag{4.42}$$

A sucessão s converge se e somente se satisfizer ao critério de Cauchy.

Um erro! Corrigido!

Observe que o *critério de Cauchy* garante que a sucessão *converge* mas fica *silencioso* a respeito do valor do limite. Quando o *critério de Cauchy* for verificado, então eu sei que qualquer um dos dois valores s_m, s_n podem ser usados como uma aproximação para o valor do limite com a *garantia* de que o erro cometido é da ordem de ϵ.

O critério de Cauchy é uma garantia de que o limite existe, ele estabelece quando um sucessão é convergente. É ele que divide as sucessões em duas grandes classes: a *classe das sucessões convergentes*, aquelas que definem *dízimas* e a *classe das sucessões divergentes*, aquelas que não definem *dízimas*.

Pensando no *paquímetro* a *semântica da coisa* fica ligeiramente diferente, agora o que estou verificando é todos os termos da sucessão, a partir de K ficam confinados numa faixa de raio ϵ e portanto o *limite* fica dentro desta faixa e em geral eu não vou conseguir calculá-lo exatamente.

Deixe-me dar-lhe um exemplo usando $\frac{4}{3}$, *exatamente* porque eu sei tudo a respeito deste símbolo. s_n é a dízima periódica que aparece na (eq.40). Eu quero que o erro máximo envolvido com uma aproximação seja 0.1 *para ser modesto...*

$$m, n > 3 \quad \Rightarrow \quad |s_m - s_n| < 0.1 = \epsilon; \tag{4.43}$$
$$|1.33333333333333333333 - 1.3| = 0.03333333333333333333 < 0.1; \tag{4.44}$$

então $s_1 = 1.3$ é o *valor do limite* com um erro $\epsilon = 0.1$, bem modesto.

Observe que eu evitei de usar os exemplos com π porque o algoritmo para determinar as decimais desta dízima é bem complicado e mais adiante, no Curso de Cálculo você irá encontrá-lo quando estiver estudando integral. Neste momento seria difícil de fazer uso deste exemplo.

Agora eu posso redefinir S_0, como o conjunto de todos os elementos do anel das sucessões convergentes que têm limite zero. É a classe das sucessões de Cauchy que definem o zero. $\pi + S_0$ é a classe das sucessões de Cauchy que definem π, apenas eu não sei fazer esta conta.

Então eu vou encontrar uma saída bem a gosto dos Matemáticos que adoram brincar de *faz de contas*. Vou fazer de contas que eu sei, e é incrível como este método funciona, e por isto que Matemática é uma grande diversão, que infelizmente também serve para os banqueiros colocarem para funcionar o videogame que eles chamam de *mercado*.

Vou fazer exatamente a mesma coisa que se faz com os números racionais, com as frações, se define uma relação de equivalência. Agora vou usar o *critério de Cauchy* que é uma relação de equivalência.

Definição 10 (critério) *Cauchy como relação de equivalência Considere duas sucessõess*$, t$ *se*

$$(\forall \epsilon)\, (\exists K \in \mathbf{N})\, m, n > K \quad \Rightarrow \quad (|s_m - t_m| < \epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad s \equiv t; \tag{4.45}$$

Um erro! Corrigido!

As duas duas sucessõess$, t$ *são equivalentes à Cauchy. Se uma delas for convergente, a outra também será e terão o mesmo limite, ou melhor, definirão o mesmo número real. Se uma delas for divergente, a outra também será.*

Agora S_0 é a classe do zero, é uma classe de equivalência desta relação recém definida. É uma classe de sucessões de Cauchy de números racionais. Embora esta definição possa, inicialmente, parecer esdrúxula, é precisa e exata. Compare com um número racional, que também é uma classe frações equivalentes, embora não seja isto dito com frequência. Em geral se diz, erradamente, que um número racional é uma fração $\frac{p}{q}; q \neq 0$, quando na verdade é uma classe de equivalência de tais frações.

Da mesma forma um número real é uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy um dos exemplos mais fáceis é o caso de *raiz de dois*.

π pode ser obtido de forma muito rudimentar com uma definição geométrica que os gregos tonaram muito conhecida, é mais simples do que $\sqrt{2}$, porque uma aproximação para π pode ser obtida com polígonos regulares convexos inscritos num círculo de raio 1, a sucessão dos perímetros destes polígonos é uma sucessão crescente para o limite que é π. Outra forma de obter uma aproximação para π é com polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio 1, resulta numa sequência decrescente para o limite que é π. Aqui você vê duas *sucessões de Cauchy*, que têm o mesmo limite, consequentemente duas sucessões de Cauchy equivalentes, dois exemplos da classe designada pelo símbolo π.

Na figura (fig 4.5), página 39, você pode ver duas sucessões, uma decrescente

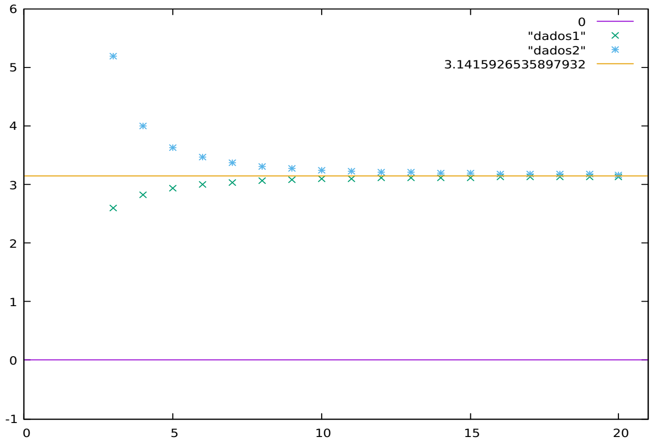


Figura 4.5:

e a outra decrescente que convergem para π. Elas foram obtidas considerando os perímetros de polígonos regulares circunscritos e inscritos. Este é um exemplo corrupção lógica, o programa que rodei usa π para calcular o perímetro dos polígonos e naturalmente esta não pode ser uma forma de construir uma sucessão que convirja para π. Mas como já disse, avançando no estudo das integrais você vai encontrar uma que fornece um algoritmo para calcular a constante de Arquimedes. Na figura (fig 4.5), a linha horizontal cheia representa a dízima π.

O programa você encontra em [Pra07, NumerosReais.calc].

Qualquer sucessão convergente de números racionais é uma sucessão de Cauchy. Outra forma de dizer isto é *toda dizima* é um sucessão de números racionais convergente definindo um número real.

Para $\sqrt{2}$ se pode usar o algoritmo do cálculo da raiz escolhendo-se ora uma casa inferior ora uma cada superior, no algoritmo, para obter duas sucessões equivalentes que convergem para $\sqrt{2}$,

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \dots \tag{4.46}$$
$$2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, \dots \tag{4.47}$$

Esta é uma introdução à construção dos números reais, uma das três mais conhecidas que é a minha preferida: via sucessões de Cauchy. Fazendo uma rápida defesa das *sucessões de Cauchy*, ou melhor do *teste de Cauchy*, este teste provê uma aproximação para um número real com o erro estipulado ϵ:

$$\forall \epsilon > 0; \exists K \in \mathbf{N}; \tag{4.48}$$
$$n, m > K \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x_m\| < \epsilon \tag{4.49}$$

querendo parar o processo de construção dum número real com precisão ϵ basta descobrir $K \in \mathbf{N}$ do teste de Cauchy, então qualquer $x_n; n > K$ é uma ϵ aproximação para o número real procurado. Portanto um método prático e não um difícil método teórico como algumas vezes é pintado o teste de Cauchy.

Os passos desta construção eu vou apenas mencionar como uma lista de exercícios, não muito fáceis, para a leitora interessada:

1. O conjunto de todas as sucessões de números racionais, seja S este conjunto, é uma álgebra com divisores de zero. Dê pelo menos um exemplo de divisor de zero.

2. O conjunto de todas as sucessões que convirjam para zero (logo sucessões de Cauchy) é um *ideal maximal* da álgebra S. Deixe-me chamar este ideal maximal de S_0.

3. O quociente por um ideal maximal, numa álgebra, é um corpo, neste caso o corpo dos números reais: $S/S_0 = \mathbf{R}$.

Uma das consequências desta construção são as propriedades do *limite* que se tornam óbvias neste contexto e praticamente impossível de serem demonstradas, como se pretende, no Cálculo Diferencial e Integral a não ser que os exercícios acima sejam feitos.

Notação do limite

Eu fujo fortemente da regra no que diz respeito à notação do *limite*. Para começar o próprio conceito de limite deve ser discutido. O *limite* é um *operador* que se aplica a distintos tipos de função e você vai ver isto ao longo do Curso de Cálculo. No caso das sucessões, que são funções cujo domínio é o conjunto $\mathbf{N}$, interessa-me saber qual é o comportamento assintótico duma sucessão que é o seu *valor* no ∞. Se ela tiver um valor no ∞, quer dizer que *ela tem limite* ou ainda é convergente.

Então a notação que eu uso é

$$s \in S_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k=\infty} s_k = 0; \tag{4.50}$$

$$\lim_{k=\infty} 1.333\cdots = 1.(3) = \frac{4}{3}; \tag{4.51}$$

$$\lim_{k=\infty} 3.1415926\cdots = \pi; \tag{4.52}$$

são exemplos do valor do operador *limite* atuando sobre algumas das dízimas conhecidas.

O salto de cardinalidade

Foi Cantor que descobriu o *salto de cardinalidade* e que tentou demonstrá-lo sem sucesso e nem mesmo convencer os matemáticos de sua época de havia um salto de cardinalidade, a tal ponto que ao final da vida nem mesmo ele acreditava em sua descoberta. Morreu doido!

Se um conjunto S tiver $n \in \mathbf{N}$ elementos, então o *conjunto das partes* de S, $\mathbf{P}(S)$ terá 2^n elementos. Isto é uma consequência imediata do binômio de Newton que descreve em cada linha as combinações de n elementos tomados $p - a - p$ porque dado um conjunto com n elementos os seus subconjuntos são as combinações dos seus elementos. Em outras palavras *combinação* é sinônimo de *subconjunto*.

Mais,

$$S \subset \mathbf{P}(S) \tag{4.53}$$

subconjunto próprio valendo logo para o $\emptyset$.

Uma sucessão é um *arranjo* dos elementos do conjunto de chegada contendo portanto todas as combinações dos elementos do conjunto de chegada como um subconjunto próprio então o conjunto S das sucessões de números racionais contém como subconjunto próprio o conjunto $\mathbf{Q}$ e contém também como subconjunto próprio $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$.

Cantor descobriu que a cardinalidade de $\mathbf{Q}$ e de $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ eram distintas e que, se eu pudesse escrever a desigualdade sem sentido

$$card(\mathbf{Q}) < card\mathbf{P}(\mathbf{Q}) \tag{4.54}$$

não havia nenhum conjunto com cardinalidade intermediária. Portanto havia um salto de cardinalidade. Na verdade a *cardinalidade* é uma classificação das *complexidades*. Eu entendo que cardinalidade e complexidade se equivalem. Cantor não conseguiu uma demonstração para sua descoberta e nem mesmo conseguiu convencer a ninguém que tal salto existia. Foram precisos passar 100 anos para que Paul Cohen completando a tese de Gödel e estabelecendo que não é possível ter em Matemática uma única teoria dos conjuntos e sim pelo menos duas, uma delas é a chamada teoria dos conjuntos de ZFC (Zermelo-Fraenkel). Na teoria dos conjuntos de ZFC o salto de cardinalidade é um axioma que Cantor estava tentando demonstrar.

É o que Richard Courant sentia e expressou dizendo que *limite*, quer dizer, *número real* era o limiar da Matemática Superior. Em boa parte é isto que torna tão difícil provar as propriedades do limite, na verdade o que se está tentando provar são as propriedades dos números reais que eu aqui contornei produzindo $\mathbf{R}$ a partir dum conjunto que tem uma estrutura algébrica bem estabelecida e de fácil demonstração. $\mathbf{R}$ herda as propriedades de $\mathbf{Q}$ deixando de existir uma coisa chamada *propriedades do limite* que são simplesmente as propriedades de $\mathbf{R}$.

Finalizando, a cardinalidade de $\mathbf{R}$ é um novo salto na escala de cardinalidades que é chamada de c a cardinalidade do contínuo.

Capítulo 5

a exponencial e o logaritmo complexos

Um **número complexo** é um número da forma $a + bi$

$$a + bi; \tag{5.1}$$
$$a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1} \tag{5.2}$$

Estes números surgem naturalmente como soluções de equações do segundo grau quando o *determinante de equação* é negativo então a *fórmula de Baskhara* produz os *números complexos*. Confira o exemplo,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \tag{5.3}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbf{R} \tag{5.4}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac; \tag{5.5}$$
$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{(-1) - \Delta} = \pm i\sqrt{-\Delta}; i = \sqrt{-1} \tag{5.6}$$
$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm id}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{d}{2a} = a + bi; \tag{5.7}$$
$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -11 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{11}; \tag{5.8}$$
$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{\frac{3+i\sqrt{11}}{2}, \frac{3-i\sqrt{11}}{2}\}; \tag{5.9}$$
$$a + bi \in \{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}\}; \tag{5.10}$$

Quando $\Delta < 0$ se define $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ confira equação (eq.6) fazendo aparecer os números com o formato $a + bi; a, b \in \mathbf{R}$, na equação (eq.7) ou ainda na equação (eq.9).

Observe que esta invenção expande uma propriedade dos números, agora

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \tag{5.11}$$

que somente valia para os números reais positivos e agora vale para qualquer número complexo.

O nome que estes números adquiriram caracteriza o preconceito que durante muito tempo eles carregaram quando eles não eram considerados números e inclusive esta denominação criou, e segue criando dificuldades na assimilação destes números no ensino da juventude. Confira *complexo, número* para obter mais informações sobre o conjunto dos números complexos, sua estrutura algébrica.

Praticamente tudo que se possa dizer sobre os números reais, também pode ser dito sobre os números complexos. Existe uma exceção importante a esta regra, que é sobre a relação de ordem. O conjunto dos números reais é um corpo ordenado, os conjunto dos números complexo não possui uma relação de ordem perfeita como é a ordem em $\mathbf{R}$: todo conjunto limitado de números reais tem um *supremo* e um *ínfimo*, e esta afirmação não pode ser feita para o conjunto dos números complexos. Tem mais coisa que tornam os dois conjuntos diferentes e vou mostrar isto quando tratar das *funções complexas* num próximo volume desta coleção.

Mas, para terminar, faço-lhe um alerta, todos os livros de Cálculo ignoram os números complexos e com isto ajudam a manter o terror injustificado que eles infundem nos estudantes. Fazer cálculos com os números complexos é apenas duas vezes mais difícil porque eles têm duas coordenadas, na verdade quatro vezes mais difícil, observando que o produto de números complexos envolve o cálculo de quatro expressões. E o ganho que se tem adotando os números complexo é imenso.

Capítulo 6

Os exercícios

Este capítulo reúne os exercícios finais desta monografia e alguns extrapolam um pouco o conteúdo dos cinco capítulos precedentes, por exemplo, estou calculando a área sob o gráfico dum função, a *integral da função*, e nos capítulos anteriores, *função*, é um assunto vem do Ensino Médio e não foi tratado aqui. Mas a forma com aparece a integral, eu entendo que é intuitiva, portanto este me parece um erro menor, ou talvez uma forma de avançar os assuntos colocando-os de forma intuitiva.

Outro assunto que estou avançado, também me valendo de sua forma geométrica e intuitiva, é a derivada como coeficiente angular da reta tangente. Ainda assim tem um exercício que eu etiquetei *fora do contexto* porque de fato a derivada que aparece nele foge da forma intuitiva. Talvez na redação final eu o retire.

Este capítulo foi redigido primeiro que os outros, exatamente para que completasse os primeiros capítulos de forma preparatória para este.

Que as leitoras me julguem sem piedade!

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta *gabarito*, você pode encontrar o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 1 *Os números*

1. *Números naturais*

   (2) *(V)[ ](F)[ ] O conjunto dos números naturais é formado por todos os números inteiros.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] O conjunto dos números naturais é formado por todos os números inteiros positivos e o zero é considerado um número positivo.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ] O zero é considerado um número positivo e também é considerado um número negativo.*

   (7) *(V)[ ](F)[ ] A operação* **adição** *é uma operação binária definida no conjunto* $\mathbf{N}$ *dos números naturais, e suas propriedades são:*

      i. *A-1 Existe um elemento neutro para a* **adição**
      ii. *A-2 Todo número natural tem um* inverso aditivo.

iii. *A-3* A adição *é comutativa.*

iv. *A-4* A adição *é associativa.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *A operação* **adição** *é uma operação binária definida no conjunto* $\mathbf{N}$ *dos números naturais, e suas propriedades são:*

i. *A-1* *Existe um elemento neutro para a* **adição**

ii. *A-3* A adição *é comutativa.*

iii. *A-4* A adição *é associativa.*

---

2. *Números naturais*

(2) *(V)[ ](F)[ ]* *A operação* **multiplicação** *é uma operação binária definida no conjunto* $\mathbf{N}$ *dos números naturais, e suas propriedades são:*

M-1 *Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**

M-2 *Todo número natural tem um* inverso multiplicativo.

M-3 A multiplicação *é comutativa.*

M-4 A multiplicação *é associativa.*

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *A operação* **multiplicação** *é uma operação binária definida no conjunto* $\mathbf{N}$ *dos números naturais, e suas propriedades são:*

M-1 *Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**

M-3 A multiplicação *é comutativa.*

M-4 A multiplicação *é associativa.*

(5) *(V)[ ](F)[ ] Números binários* *O conjunto* $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ *munido da adição definida pela tabela*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

tem as propriedades

A-1 *Existe um elemento neutro para a* **adição**

A-2 *Todo número tem um* inverso aditivo.

A-3 A adição *é comutativa.*

A-4 A adição *é associativa.*

(7) *(V)[ ](F)[ ] Números binários* *O conjunto* $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ *munido da multiplicação definida pela tabela*

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

tem as propriedades

M-1 *Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**

M-2 *Todo número tem um* inverso multiplicativo.

M-3 A multiplicação *é comutativa.*

M-4 A multiplicação *é associativa.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] As operação* **adição** *e* **multiplicação** *são operações binárias definidas no conjunto* $\mathbf{N}$ *valendo as propriedades*

A-1 *Existe um elemento neutro para a* **adição**

A-3 A adição *é comutativa.*

A-4 A adição *é associativa.*

M-1 *Existe um elemento neutro para a* **adição**

M-3 A multiplicação *é comutativa.*

M-4 A multiplicação *é associativa.*

AM-1 *O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número natural resulta em zero.*

AM-2 *a multiplicação é distributiva relativamente à adição.*

Estas mesmas propriedades valem para o conjunto $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ *com as operações de adição e multiplicação definidas anteriormente.*

---

3. *Melhorando* $\mathbf{N}$

Posso inventar *novos elementos, para completar* $\mathbf{N}$, *produzindo o conjunto* $\mathbf{Z}$, *dos* números inteiros *e a História me diz que isto foi feito com a criação dos números chamados "*negativos*".*

(2) *(V)[ ](F)[ ] Com a invenção dos novos elementos o conjunto* $\mathbf{Z}$ *com a adição tem as propriedades:*

i. *A-1 Existe um elemento neutro para a* **adição** *no novo conjunto.*
ii. *A-2 Todo número inteiro tem um* inverso aditivo.
iii. *A-3* A adição *é comutativa.*
iv. *A-4* A adição *é associativa.*

(3) *(V)[ ](F)[ ] É possível estender a multiplicação de* $\mathbf{N}$ *ao conjunto* $\mathbf{Z}$ *e então as propriedades*

i. *M-1 Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**
ii. *M-2 Todo número inteiro tem um* inverso multiplicativo.
iii. *M-3* A multiplicação *é comutativa.*
iv. *M-4* A multiplicação *é associativa.*

valem.

(5) *(V)[ ](F)[ ] É possível estender a multiplicação de* $\mathbf{N}$ *ao conjunto* $\mathbf{Z}$ *mas então nem todas propriedades seguintes são verdadeiras.*

i. *M-1 Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**
ii. *M-2 Todo número inteiro tem um* inverso aditivo.
iii. *M-3* A multiplicação *é comutativa.*
iv. *M-4* A multiplicação *é associativa.*

(7) *(V)[ ](F)[ ] As propriedades da* estrutura algébrica $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ *são*

i. *A-1 Existe um elemento neutro para a* **adição**
ii. *A-2 Todo inteiro tem um inverso aditivo.*
iii. *A-3* A adição *é comutativa.*

iv. *A-4* A adição *é associativa.*

v. *M-1 Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**

vi. *M-3* A multiplicação *é comutativa.*

vii. *M-4* A multiplicação *é associativa.*

viii. *AM-1O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número inteiro resulta em zero.*

ix. *AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.*

valem no conjunto $\mathbf{Z}$ *munido das adição e multiplicação usuais.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] A equação* $4x+7=31$ *é possível, a solução é* $x=6$*, mas não tenho regras para resolvê-la no conjunto dos números inteiros, sei resolvê-la por tentativas. Um programa de computador diria que esta equação é impossível alimentado com as regras da adição e multiplicação de números inteiros.*

---

4. *número racional e número irracional*

Os números racionais *são pares,* numerador, denominador , *como* (p,q)*, mas apresentados num formato que chamamos* fração, $\frac{p}{q}; q \neq 0$ *com propriedades bem conhecidas*

$$\text{adição: } \frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{nq}; \text{ multiplicação: } \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}; \qquad (6.1)$$

É o conjunto dos números racionais, $\mathbf{Q}$.

E os números reais, $\mathbf{R}$ *é o conjunto dos* números racionais *junto com os* números irracionais.

(2) *(V)[ ](F)[ ] Número irracional Os gregos descobriram que num quadrado, se o lado medisse* 1 *não seria possível medir, com exatidão as diagonais, chamaram este valor de* $\sqrt{2}$.

(3) *(V)[ ](F)[ ]* $\sqrt{2}$ *é um símbolo que funciona mesmo com operações aritméticas, e representa uma sucessão cujos sete primeiros termos podem ser*

$$1,\ 1.4,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142135, \dots \qquad (6.2)$$

(5) *(V)[ ](F)[ ]* $\sqrt{2}$ *é um símbolo que funciona mesmo com operações aritméticas, e representa uma sucessão cujos sete primeiros termos podem ser*

$$2,\ 1.5,\ 1.424,\ 1.4153,\ 1.41431,\ 1.414214,\ 1.4142136, \dots \qquad (6.3)$$

(7) *(V)[ ](F)[ ] As sucessões são funções definidas no conjunto dos números naturais e um número irracional é uma sucessão cujos valores são números racionais, uma sucessão de números racionais. Elas também são chamadas de dízimas e se dividem em duas classes*

números racionais *as dízimas periódicas,*

números irracionais *as dízimas não periódicas.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Uma dízima não periódica é um número racional.*

---

5. <u>*número racional e número irracional, dízima*</u>

   O conjunto dos números reais, $\mathbf{R}$*, é o conjunto das dízimas que podem ser* periódicas *ou* não periódicas. *As dízimas são sucessões de números racionais* s_n *é o número racional que corresponde anular todos os dígitos a partir do* $n-$*ésimo:*

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots \tag{6.4}$$
$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488 = s_{19}; \tag{6.5}$$
$$s_0 = 1.0000\ldots, s_1 = 1.4000\ldots, s_2 = 1.41000\ldots \tag{6.6}$$

   A equação (eq.6) apresenta os termos s_0, s_1, s_2 *de uma sucessão que representa* $\sqrt{2}$*. Porque há uma infinidade de sucessões que representam* $\sqrt{2}$*, o que há em comum entre elas é que elas tem o mesmo limite, elas todas representam o mesmo número cujo símbolo é* $\sqrt{2}$*.*

   Algo semelhante ocorre com as frações, que representam números racionais*, há uma infinidade delas representando o mesmo número, apenas, neste caso existe* "uma melhor fração"*, a* fração irredutível.

   π *é outro número real que também não é racional, "*π*" é um símbolo que representa*

$$3.14159265358979323848\ldots \tag{6.7}$$
$$t_0 = 3, t_1 = 3.1, t_2 = 3.14, t_3 = 3.141, t_4 = 3.1415, \ldots \tag{6.8}$$

   Há uma diferença prática entre estes dois símbolos, $\pi, \sqrt{2}$*.* $\sqrt{2}$ *me permite cálculos aritméticos,*

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2}; \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2; \tag{6.9}$$

   coisa que não posso fazer com o símbolo π*.*

   Se a dízima for periódica *então ela tem uma geratriz* $\frac{p}{q}$

   Você vê aqui um problema para o qual não há solução, eu não posso calcular o limite da sucessão que converge para $\sqrt{2}$*, eu posso provar que este* limite existe *e depois usar uma aproximação para o seu valor. Acontece o mesmo com* π, e *e com qualquer* número irracional.

   (2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *"O produto de duas sucessões de números racionais é outra sucessão de números racionais" e isto equivale a dizer-se que "O produto de dois números racionais é outro número racional". O mesmo se pode dizer da adição, portanto* $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ *é uma* estrutura algébrica.

   (3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *As frações podem ser somadas pela regra*

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn}; q, n \neq 0; \tag{6.10}$$

   então todo número racional tem um inverso aditivo:

$$\frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{-pq + pq}{q^2} = \frac{-p + p}{q} = 0; q \neq 0; \tag{6.11}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ] As frações podem ser multiplicadas pela regra*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}; q, n \neq 0; \tag{6.12}$$

então todo número racional $\frac{p}{q}$ *tem um inverso multiplicativo,* $\frac{q}{p}$.

(7) *(V)[ ](F)[ ] As frações podem ser multiplicadas pela regra*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qm}; q, n \neq 0; \tag{6.13}$$

Todo número racional diferente de zero $\frac{p}{q}$, *tem um inverso multiplicativo,* $\frac{q}{p}$.

(11) *(V)[ ](F)[ ] Para o conjunto dos números racionais são válidas as afirmações:*

i. *A-1 Existe um elemento neutro para a* **adição**
ii. *A-2 Todo número racional tem um inverso aditivo.*
iii. *A-3* A adição *é comutativa.*
iv. *A-4* A adição *é associativa.*
v. *M-1 Existe um elemento neutro para a* **multiplicação**
vi. *M-2 Existe um elemento inverso* multiplicativo *para toda fração cujo numerador seja diferente de zero:*

$$\frac{p}{q}\frac{q}{p} = 1 \quad \Leftarrow \quad p, q \neq 0;$$

vii. *M-3* A multiplicação *é comutativa.*
viii. *M-4* A multiplicação *é associativa.*
ix. *AM-1O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número racional resulta em zero.*
x. *AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.*

---

6. *A reta numérica*

Os números racionais tem uma propriedade que os tornam parecido com pontos duma reta: dados dois números racionais, sempre existe outro número racional entre eles. *O mesmo se pode dizer de dois pontos sobre uma reta. Também se pode dizer sobre uma reta que dados dois pontos,* A, B, *eles determinam o segmento de reta* $\overline{AB}$ *e que existe um ponto desta reta que não se encontra sobre o segmento* $\overline{AB}$. *Dados dois números racionais*

$$a, b\ ;\ a < b;\ \exists c \in Q;\ c < a < b; \tag{6.14}$$

$$a, b\ ;\ a < b;\ \exists d \in Q;\ a < b < d; \tag{6.15}$$

Esta duas últimas propriedades falam da ordem em $\mathbf{Q}$ *e me permitem de fazer uma representação geométrica de* $\mathbf{Q}$ *numa reta orientada.*

(2) *(V)[ ](F)[ ] Se* r *for uma reta orientada então existe um ponto nela que representa o zero, O, dividindo-a em duas semirretas, a* semirreta positiva *e a* semirreta negativa.

(3) *(V)[ ](F)[ ] Eu oriento uma reta escolhendo dois pontos, um que chamo de O, e representa o zero, e outro que chamo de I e representa a* 1.

(5) *(V)[ ](F)[ ] Ao escolher dois pontos, um que chamo de O, e representa o zero, e outro que chamo de I e representa a 1, com um compasso eu posso determinar, sobre a reta orientada qualquer número inteiro.*

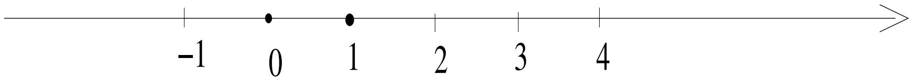


Figura 6.1: reta numérica, representação geométrica de $\mathbf{R}$

(7) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.2), página 50, você pode ver paralelas à reta*

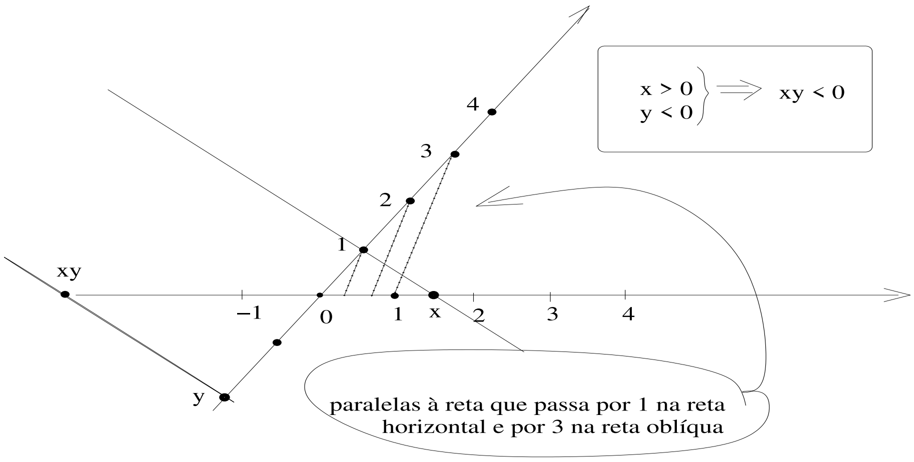


Figura 6.2: Determinação dos racionais na reta numérica

que passa por 1, na reta horizontal e por 3 na reta oblíqua que permite encontrarem-se $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, na reta horizontal, entre 0 e 1, com relativa exatidão. Da mesma forma, traçando uma reta passando por 1, na horizontal, e por um número inteiro m qualquer na oblíqua, posso determinar as frações próprias *de denominador m entre 0 e 1, de volta na reta horizontal, Verifique na figura (fig 6.2) na página 50, para $m = 3$.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Com um compasso eu posso transferir a diagonal dum retângulo de lado 1 sendo um dos vértices do retângulo a origem O o que mostra que a* reta numérica *contém* números irracionais. *A figura (fig 6.1) na página 50 mostra a* reta numérica.

---

7. *Números reais*

Os números naturais, são números reais. Os números inteiros e os racionais também são números reais. O conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais contém todos os números naturais, inteiros e racionais. Como a reta numérica contém números irracionais, como é o caso de $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{n}; n \in \mathbf{N}$, então a reta representa o conjunto dos números reais. Um número real é o limite *duma sucessão de números* *racionais, e esta afirmação vale para todos os números. Por exemplo, 3* é *a sucessão constante* $s_n = 3$, *também* $t_n = \frac{3}{4}$ *é uma sucessão constante que representa* $\frac{3}{4}$. *Mas* π *ou* $\sqrt{2}$ *não são representados por sucessões constantes, eles são* dízimas não periódicas.

O conjunto das sucessões que têm limite zero *é fundamental no estudo do* limite. *Identifique quais são as afirmações que valem para as sucessões com limite zero. Nos itens que seguem,* ϵ_n, δ_n *representam sucessões que têm limite zero.*

(2) *(V)[ ](F)[ ] Se uma sucessão* ϵ_n *tiver* limite zero *então, para qualquer o número real* $r > 0$ *existe um índice* $N \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$k > N \Rightarrow |s_k| < r; r > 0 \tag{6.16}$$

(3) *(V)[ ](F)[ ] Se* δ_n, ϵ_n *tiverem* limite zero *então existem índices* $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < r; r > 0; \tag{6.17}$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r; r > 0; \tag{6.18}$$

$$k > N = \max N_1, N_2 k > N \Rightarrow |\delta_k| < r; \tag{6.19}$$

$$k > N = \max N_1, N_2 k > N \Rightarrow |\epsilon_k| < r; \tag{6.20}$$

$$(\exists N)(k > N \Rightarrow |\epsilon_k|, |\delta_k| < r); \tag{6.21}$$

quer dizer que existe um índice comum às duas sucessões, N, *a partir do qual ambas ficam em módulo menor do que* r *para qualquer erro* r *que for dado.*

(5) *(V)[ ](F)[ ] Como na definição de limite zero no item 7 o erro* r *é um número real qualquer e objetivo é que seja "pequeno", então posso supor que* $0 < r < 1$ *e isto mostra que o produto de duas sucessões com limite zero* δ_k, ϵ_k *se tem*

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < r < 1; r > 0; \tag{6.22}$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r < 1; r > 0; \tag{6.23}$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\delta_k| < r; \tag{6.24}$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < r; \tag{6.25}$$

$$(\exists N) k > N \Rightarrow |\epsilon_k \delta_k| < r^2 < r; \tag{6.26}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ] O produto de duas sucessões com limite zero é uma sucessão com limite zero.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Se* δ_n, ϵ_n *tiverem* limite zero *então existem índices* $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$k > N_1 \Rightarrow |\delta_k| < \tfrac{r}{2}; r > 0; \tag{6.27}$$

$$k > N_2 \Rightarrow |\epsilon_k| < \tfrac{r}{2}; r > 0; \tag{6.28}$$

$$k > N = \max N_1, N_2 \Rightarrow |\delta_k + \epsilon_k| < |\delta_k| + |\epsilon_k| < r; \tag{6.29}$$

o que prova que se duas sucessões forem de limite zero então a soma delas é uma sucesso de limite zero.

---

8. <u>*limite zero*</u>

Na definição de limite zero na questão 7, item 2, em que para cada erro $r > 0$ existe um índice $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad |\epsilon_k| < r; r > 0 \tag{6.30}$$

eu sempre posso supor que $r < 1$ porque o objetivo é caracterizar que, em módulo, $|\epsilon_k|$ é menor do que qualquer erro *r escolhido, e "erros devem ser pequenos"...*

*Esta escolha pode forçar que o índice seja muito grande para que a desigualdade comece a se verificar. Mas, e procure entender esta frase, "*o primeiro milhão de termos duma sucessão são completamente irrelevantes"...ou o primeiro trilhão de termos*!"Pelo menos para um programa de computador...*

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Considere a sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k}$. Como $\frac{1}{m} > \frac{1}{m+p}$ para quaisquer números naturais m, p então $r = \frac{1}{m}$ junto com $N = m$ satisfazem*

$$(\forall r = \frac{1}{m})(\exists N = m)(k > N \quad \Rightarrow \quad |\frac{1}{k}| < r) \tag{6.31}$$

o que prova que a sucessão $\frac{1}{k}$ tem limite zero.

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Como $m^p > m$ para números naturais $m, p; p > 1$ então a sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k^p}; p > 1$ é uma sucessão com limite zero.*

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A sucessão $\epsilon_k = \frac{1}{k^p}$ com $p > 1$ é uma sucessão com limite zero em que p é um número real maior do que 1.*

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ] sucessões equivalentes*</u> *Considere dois polinômios P, Q como Q têm no máximo $n = grau(Q)$ raízes, então sucessão $s_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$ pode ser corrigida colocando-se um valor qualquer arbitrário em lugar de $\frac{P(k)}{Q(k)}$ sempre que k for uma uma raiz de Q, definindo assim uma nova sucessão t_k. A sucessão*

$$s_k - t_k \tag{6.32}$$

satisfaz

$$(\forall r)(\exists N)(k > N|s_k - t_k| < r) \tag{6.33}$$

é uma sucessão com limite zero, e para isto basta que N seja maior do qualquer uma das raízes de Q, portanto s_k e t_k têm limite.

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ] sucessões equivalentes*</u> *Considere dois polinômios P, Q como Q têm no máximo $n = grau(Q)$ raízes, pelo teorema fundamental da Álgebra, então sucessão $s_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$ pode ser corrigida colocando-se um valor qualquer arbitrário em lugar de $\frac{P(k)}{Q(k)}$ sempre que k for uma uma raiz de Q, definindo assim uma nova sucessão t_k. A sucessão $s_k - t_k$ satisfaz*

$$(\forall r)(\exists N)(k > N|s_k - t_k| < r) \tag{6.34}$$

e para isto basta que N seja maior do qualquer uma das raízes de Q. Mas disto não se pode deduzir que s_k e t_k sejam de limite zero ou nem mesmo tenham limite.

---

9. *Indução finita*

   O conjunto $\mathbf{P}(A)$ *é um conjunto cujos elementos são os subconjuntos de* A*. Uma outra forma de dizer isto é que* $\mathbf{P}(A)$ *contém as combinações formadas com os elementos de* A*.*

   $$A = \{1, 2, \ldots, n\}; n > 3; \tag{6.35}$$

   (2) (V)[ ](F)[ ] C_n^p *é o número de subconjuntos com* p *elementos que é possível retirar de* A*.*

   (3) (V)[ ](F)[ ]

   $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = n; \tag{6.36}$$

   (5) (V)[ ](F)[ ]

   $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \tag{6.37}$$

   (7) (V)[ ](F)[ ]

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k; \tag{6.38}$$

   (11) (V)[ ](F)[ ]

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}; \tag{6.39}$$

   gabarito:

---

10. *triângulo de Pascal As potências de 11 até a quinta potência são*

   $$11^0 = 1 \tag{6.40}$$
   $$11^1 = 11 \tag{6.41}$$
   $$11^2 = 121 \tag{6.42}$$
   $$11^3 = 1331 \tag{6.43}$$
   $$11^4 = 14641 \tag{6.44}$$

   correspondem às 5 primeiras linhas do Triângulo de Pascal

   (2) (V)[ ](F)[ ] Se considerarmos o símbolo 10 *um novo algarismo, por exemplo na base* 16*,*

   $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

   então

   $$11^0 = 1 \tag{6.45}$$
   $$11^1 = 11 \tag{6.46}$$
   $$11^2 = 121 \tag{6.47}$$
   $$11^3 = 1331 \tag{6.48}$$
   $$11^4 = 14641 \tag{6.49}$$
   $$11^5 = 15AA51 = 15101051 = \tag{6.50}$$

são as primeiras cinco linhas do triângulo de Pascal.

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *Se considerarmos os símbolos* $15, 20$ *como dois novos algarismo, por exemplo na base* 21*,*

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,G,H,I.J,K$$

então

$$11^0 = 1 \tag{6.51}$$
$$11^1 = 11 \tag{6.52}$$
$$11^2 = 121 \tag{6.53}$$
$$11^3 = 1331 \tag{6.54}$$
$$11^4 = 14641 \tag{6.55}$$
$$11^5 = 15AA51 = 15101051 \tag{6.56}$$
$$11^6 = 16FKF61 = 1615201561 \tag{6.57}$$

são as primeiras seis linhas do triângulo de Pascal*, embora esta notação não seja usual.*

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *é possível deduzir das potencias de 11 as linhas do* triângulo de Pascal*,*

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *Considerando as bases* hexadecimal*,*

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$$

e a "base 21"*, nada usual,*

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,G,H,I.J,K$$

$$11^0 = 1 = 2^0 \tag{6.58}$$
$$11^1 = 1 + 1 = 2^1 \tag{6.59}$$
$$11^2 = 1 + 2 + 1 = 2^2 \tag{6.60}$$
$$11^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \tag{6.61}$$
$$11^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \tag{6.62}$$
$$11^5 = 1 + 5 + A + A + 5 + 1 = 2^5 \tag{6.63}$$
$$11^6 = 1 + 6 + F + K + F + 6 + 1 = 2^6 \tag{6.64}$$

se pode concluir *que qualquer linha* n *do* triângulo de pascal *tenha como soma* 2^n.

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *Considerando as bases hexadecimal,*

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$$

e a "base 21", nada usual,

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,G,H,I.J,K$$

$$11^0 = 1 = 2^0 \tag{6.65}$$
$$11^1 = 1 + 1 = 2^1 \tag{6.66}$$
$$11^2 = 1 + 2 + 1 = 2^2 \tag{6.67}$$
$$11^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \tag{6.68}$$
$$11^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \tag{6.69}$$
$$11^5 = 1 + 5 + A + A + 5 + 1 = 2^5 \tag{6.70}$$
$$11^6 = 1 + 6 + F + K + F + 6 + 1 = 2^6 \tag{6.71}$$

se pode provar, usando indução finita*, que qualquer linha* n *do* triângulo de pascal *tenha como soma* 2^n.

gabarito:

---

11. *número de elementos dum conjunto O* triângulo de Pascal *é um algoritmo, ou uma tabela cujas linhas eu vou enumerar a partir de zero de modo que a linha de ordem* n *vem na posição* $n+1$ *e a primeira linha é de ordem zero. A primeira linha é a de ordem zero, e a segunda é de ordem 1. O segundo elemento de cada linha corresponde a ordem da linha.*

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.72}$$

é a linha de ordem 6 *e a soma dos seus elementos vale* 2^6.

(3) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.73}$$

é a linha de ordem 7 *e a soma dos seus elementos vale* 2^7.

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.74}$$

é a linha de ordem 11 *e a soma dos seus elementos vale* 2^{11}.

(7) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.75}$$

é a linha de ordem 10 *e a soma dos seus elementos vale* 2^{10}.

(11) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

é a linha de ordem 10 *e a soma dos seus elementos vale* 2^{10}.

gabarito:

---

12. *Indução Finita*
A soma dos $n+1$ *primeiros números naturais,*

$$0, 1, \ldots, n$$

é dada por uma função f *do segundo grau*

(2) (V)[ ](F)[ ] $f(n) = 2n^2$

(3) (V)[ ](F)[ ] $f(n) = \frac{n^2}{2}$

(5) (V)[ ](F)[ ] $f(n) = n^2$

(7) (V)[ ](F)[ ] $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

(11) (V)[ ](F)[ ] $f(n) = (\frac{n}{2})^2$

gabarito:

---

13. *soma dos termos duma sucessão Se o* termo geral *duma sucessão for do primeiro grau, a soma dos seus termos é dada por uma sucessão cujo termo geral é*

(2) (V)[ ](F)[ ] *do segundo grau.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *também do primeiro grau.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *do terceiro grau.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *do quarto grau.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *do quinto grau.*

gabarito:

---

14. *sucessão e série, p.a.*

$$s_n = a(n-1) + b; \ a, b \text{ dois números dados }; \quad (6.77)$$
$$s_1 = b \text{ é o primeiro termo }; \quad (6.78)$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} s_k; \quad (6.79)$$

são duas sucessões, a segunda, $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *é chamada de* série com termo geral s_k, *mas são duas* sucessões. *O estudo das* séries *oferece uma* dificuldade extra *pois depende do comportamento do* termo geral. *O estudo das* séries *implica no estudo de duas* sucessões acopladas.

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O* termo geral *da* série S *é uma* progressão aritmética,

$$s_n = a(n-1) + b; \tag{6.80}$$

em que a, b *são dois números dados.*

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>*Considere a série* S *e o seu termo geral* s. *Então*

$$s_n = S_{n+1} - S_n; \tag{6.81}$$

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Considere a série* S *e o seu termo geral* s. *Então*

$$s_n = S_n - S_{n-1}; \tag{6.82}$$

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A série* $S = (S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é do segundo grau. Então o seu termo geral também é do segundo grau.*

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A série* $S = (S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é do segundo grau porque o seu termo geral é do primeiro grau e* $S_n = \frac{an^2+n(2b-a)}{2}$

<u>*gabarito:*</u>

---

15. <u>*progressões polinomiais, sucessões polinomiais*</u>
Considere um polinômio P *do grau 2 e a sucessão*

$$s_k = P(k) = ak^2 + bk + c; ; k \in \mathbf{N}; \tag{6.83}$$

é uma progressão quadrática.

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A expressão que define* s_k *é*

$$s_k = ak^2 + bk + c; \tag{6.84}$$

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A soma*

$$\sum_{k=0}^{n} s_k = a\sum_{k=0}^{n} k^2 + b\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)c; \tag{6.85}$$

soma de quadrados, soma dos termos duma p.a., *e um múltiplo da constante c.*

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A soma*

$$\sum_{k=0}^{n} s_k = a\sum_{k=0}^{n} k^2 + b\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)c; \tag{6.86}$$

soma de quadrados, soma dos termos duma p.a., *multiplicadas pelas constantes* a, b, *respectivamente, e um múltiplo da constante* c *que depende do número de termos.*

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Sabendo somar quadrados, se pode obter a soma de qualquer progressão quadrática.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Sabendo somar quadrados, e sabendo somar progressões aritméticas, se pode obter a soma de qualquer progressão quadrática.*

gabarito:

---

16. *progressões polinomiais*

Considere um polinômio $P(x) = ax^2$, do grau 2, a progressão quadrática,

$$s_k = P(k); k \in \mathbf{N}; \tag{6.87}$$

e a série $\sum_{k=0}^{n} s_k = S_n$.

(2) (V)[ ](F)[ ] $S_{n+1} - S_n = s_{n+1}$;

(3) (V)[ ](F)[ ]*Se Q for um polinômio do terceiro grau, então as diferenças $Q_{n+1} - Q_n$ são um polinômio do grau 2.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Existe um polinômio do terceiro grau, Q, de modo que*

$$Q_{n+1} - Q_n = n^2 \tag{6.88}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Existe um único polinômio do terceiro grau,*

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \tag{6.89}$$

tal que $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k = Q(n+1) - Q(0)$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Existe um polinômio do terceiro grau,*

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \tag{6.90}$$

tal que $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k = Q(n) - Q(0)$

gabarito:

---

17. *número e, sucessões e limite*

Considere a sucessão de números racionais definida por

$$S_n = (1 + \frac{1}{n})^n; \tag{6.91}$$

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k}; \\ S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k; s_k = \frac{C_n^k}{n^k} \\ s_k = \frac{n!}{(n-k)!k!n^k}; \end{cases} \tag{6.92}$$

(3) (V)[ ](F)[ ]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k = 2^n \left(1 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n^n}\right); \tag{6.93}$$

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k ; s_k = \frac{C_n^k}{n^k}; \tag{6.94}$$

$$m > n \Rightarrow S_m > S_n ; S_n \text{ é uma sucessão crescente}; \tag{6.95}$$

(7) (V)[ ](F)[ ]

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists K \in \mathbf{N})\,(m > n > K \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon)\,; \tag{6.96}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão S_n é uma sucessão de Cauchy, portanto convergente.*

gabarito:

---

18. *Números Complexos Um número complexo é apenas uma par de números reais $a+bi$ e valem todas as propriedades dos números reais para os* números comple*xos nesta questão você vai resolver equações do primeiro grau com coeficientes complexos. Por exemplo*

$$4z + 7 = 3 + 8i; \tag{6.97}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] *Então*

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow 4z = 10 + 8i; \tag{6.98}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Então*

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow 4z = -4 + 8i; \tag{6.99}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Então*

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z = -1 + 2i; \tag{6.100}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Então*

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z + \frac{7}{4} = \frac{3+8i}{4}; \tag{6.101}$$

(11) (V)[ ](F)[ ]

$$4z + 7 = 3 + 8i \Rightarrow z = \frac{3+8i}{4} - \frac{7}{4} = \frac{-4+8i}{4} = -1 + 2i; \tag{6.102}$$

gabarito:

---

19. *limite de sucessões*

A equação

$$s_n = \frac{1}{n+1} \tag{6.103}$$

define uma sucessão quando $n \in \mathbf{N}$.

(2) (V)[ ](F)[ ] $s_n \neq 0$ *para qualquer que seja* $n \in \mathbf{N}$.

(3) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão* $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é crescente.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão* $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é decrescente.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão* $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *não é decrescente.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão* $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *não é crescente.*

gabarito:

20. *limite de sucessões* *A equação*

$$t_n = \frac{n+1}{n}; s_n = \frac{1}{n+1}; \tag{6.104}$$

define duas sucessões quando $n \in \mathbf{N}$. *Decida quais das alternativas são verdadeiras ou falsas.*

(2) (V)[ ](F)[ ] $t_n = \frac{1}{s_n}$

(3) (V)[ ](F)[ ] $t_n = 1 + \frac{1}{n}$

(5) (V)[ ](F)[ ] $t_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + 2s_n$

(7) (V)[ ](F)[ ] $t_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + s_n$

(11) (V)[ ](F)[ ] t_n *é uma sucessão decrescente.*

gabarito:

21. *série*

Chama-se série *uma sucessão cujos termos são a soma dos termos de uma outra sucessão:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k \tag{6.105}$$

S é a série de termo geral s_k. *Se* S_n *for uma série como está expresso na equação (eq.105), identifique as afirmações que são verdadeiras.*

(2) (V)[ ](F)[ ] $S_{n+1} - S_n = s_n$

(3) (V)[ ](F)[ ] $S_{n+1} - S_n = s_{n+1}$ *é verdadeira e é uma forma alternativa da equação (eq.105).*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Uma forma alternativa da equação (eq.105) é o sistema de equações abaixo, se também for fornecido o valor de* $S_0 = s_0$

$$\begin{cases} S_0 = s_0; \\ S_{k+1} - S_k = s_k \end{cases} \tag{6.106}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $s_k = \frac{1}{k+1}$ *então a série de termo geral* s_k *é uma sucessão decrescente.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $s_k = \frac{-1}{k+1}$ *então a série de termo geral* s_k *é uma sucessão crescente.*

gabarito:

22. *Limite zero Considere a sucessão* $s_n = \frac{1}{n}$. *Decida quais das afirmações são verdadeiras.*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Existe um índice* N *tal que, qualquer que seja* $k > N$ *se tem que* $s_k < 0.1$.

(3) (V)[ ](F)[ ] *Existe um índice* N *tal que, qualquer que seja* $k > N$ *se tem que* $s_k < 0.01$.

(5) (V)[ ](F)[ ] *Existe um índice* N *tal que, qualquer que seja* $k > N$ *se tem que* $s_k < 0.001$.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Existe um índice* N *tal que, qualquer que seja* $k > N$ *se tem que* $s_k < 0.0001$.

(11) (V)[ ](F)[ ] *Dado um número positivo* δ*, existe um índice* N *tal que, qualquer que seja* $k > N$ *se tem que* $s_k < \delta$ *ou equivalentemente*

$$(\forall\delta > 0)(\exists N)(k > N \quad \Rightarrow \quad s_k < \delta \tag{6.107}$$

As sucessões que satisfizerem à condição da equação (eq.107) se diz terem limite zero, ou que definem o zero.

gabarito:

23. *sucessões que definem o zero*

Definição 11 (limite) *zero*

As sucessões que satisfizerem à condição da equação (eq.107) se diz ter limite zero, ou que definem o zero.

Considere duas sucessões s_k, t_k *que definam o zero (ou, equivalentemente, que tenham limite zero).*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Dado qualquer número real* R*, a sucessão definida por* $r_k = Rs_k$*, ou seja um múltiplo de* s_k *pelo número* R *também define o zero.*

(3) (V)[ ](F)[ ] A sucessão soma

$$h = s + t; h_k = s_k + t_k; \tag{6.108}$$

também define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero.

(5) (V)[ ](F)[ ] A sucessão produto

$$h = st; h_k = s_k t_k; \tag{6.109}$$

também define o zero, ou equivalentemente, tem limite zero.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão* $j_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ *define o zero, ou equivalentemente,* tem limite zero*, porque é um produto de sucessões que tem* limite zero.

(11) (V)[ ](F)[ ] *Para qualquer número natural estritamente positivo* p*, a sucessão* $h_k = \frac{1}{(k+1)^p}$ *define o zero, ou equivalentemente,* tem limite zero*, porque é um produto de sucessões que tem* limite zero.

gabarito:

24. <u>sucessão crescente, decrescente</u> *Se* "inspire" *no gráfico da figura (fig 6.3), página 62, e decida qual é opção verdadeira.*

   (2) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.3), página 62, a sucessão etiquetada com (a) é crescente.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.3), página 62, a sucessão etiquetada com (b) é crescente.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.3), página 62, a sucessão etiquetada com (c) é crescente.*

   (7) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.3), página 62, a sucessão etiquetada com (d) é crescente.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 6.3), página 62, a sucessão etiquetada com (e) é crescente.*

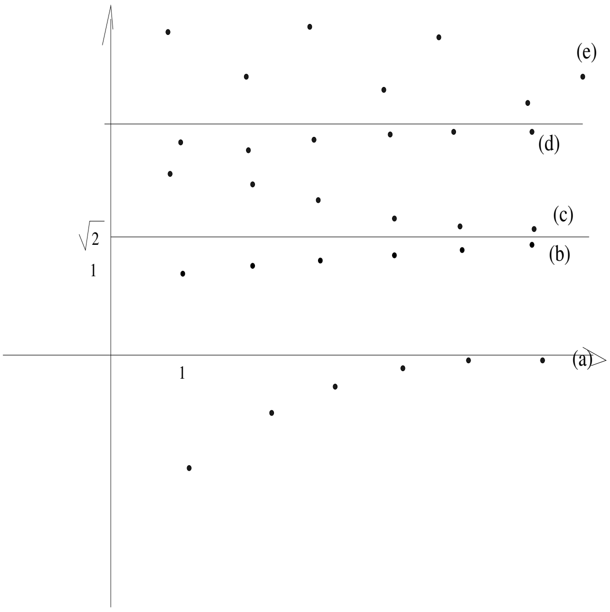


Figura 6.3: sucessão crescente para $\sqrt{2}$

gabarito:

25. <u>sucessão crescente</u> *Os* nomes *se assemelham,* "sucessão limitada" *e* "sucessão que tem limite", *mas se referem à conceitos diferentes. Se uma sucessão* tiver limite *ela tem que ser uma* sucessão limitada *e a recíproca não é verdadeira. Decida quais das afirmações é verdadeiras.*

   (2) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão de termo geral* $s_k = (-1)^k$ *é negativa e crescente.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão de termo geral* $s_k = \frac{-1}{2^k}$ *é negativa e crescente.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão de termo geral* $s_k = \frac{1}{2^k}$ *é* positiva e decrescente.

   (7) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão de termo geral* $s_k = (-1)^k$ *é* oscilante*, é* limitada *e* não tem limite.

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A sucessão de termo geral* $s_k = (-1)^k k$ *é* oscilante *e* não é limitada.

<u>gabarito:</u>

26. <u>*Equação da reta tangente*</u> *A derivada tem um definição intuitiva, ou geométrica, que não serve para calcular a derivada: é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico duma função, se existir uma tal reta tangente.*

    No cálculo do limite *existem dois tipos de operações de natureza distinta*

    (a) *operações aritméticas, ou algébricas, que produzem, a cada passo, expressões aritmeticamente equivalentes.*
    (b) *um* salto lógico *pela via do qual identificamos algum dos* limites notáveis *nas expressões transformadas pela via das operações o que nos permite obter o limite.*

    É exatamente este salto lógico *que torna impossível construir* um programa *para calcular limites* automaticamente. *Também é esta a principal dificuldade no processo de ensino de limite.*

    Esta questão vai dar exemplos destes dois tipos de operações. A diferença entre eles é que, um será marcado por uma sucessão de igualdades, e o salto lógico *com o símbolo "→" apontando para o limite. Este salto, os humanos entendem e a "IA" não consegue reproduzir . . .*

    A figura (fig 6.4), na página 63, lhe mostra, geometricamente, o significado da

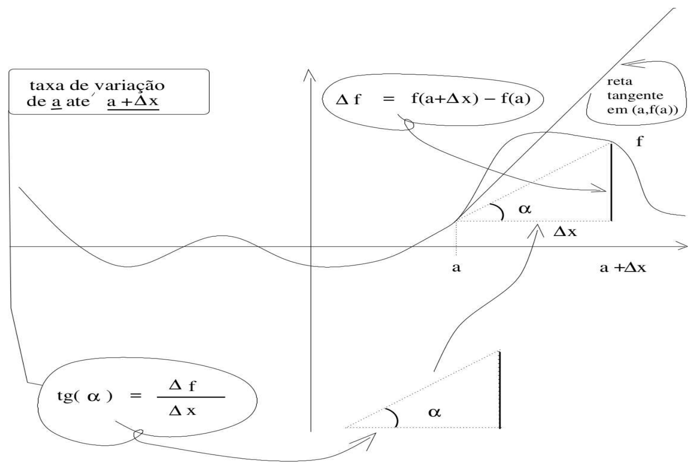


Figura 6.4:

derivada e duma reta secante que representa uma aproximação da reta tangente e o erro *é visível e foi escolhido de propósito.*

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ] Equação da reta tangente*</u> *No gráfico duma função, confira figura (fig 6.4), página 63, posso construir a secante passando nos pontos*

$$(a.f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x));$$

O coeficiente angular da reta secante é

$$m = \frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x} \tag{6.110}$$

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]Equação da reta tangente*</u> *No gráfico duma função, confira figura (fig 6.4), página 63, posso construir a secante passando nos pontos* $(a.f(a)), (a+\Delta x, f(a+\Delta x))$. *O coeficiente angular da reta secante é*

$$m = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{6.111}$$

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Suponha que f seja um polinômio do terceiro grau. Então o coeficiente angular da reta secante é*

$$\begin{cases} f(x) = a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0; \\ m = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = a_3(a-(a+\Delta x))^3 + a_2(a-(a+\Delta x))^2 + a_1(a-(a+\Delta x)) + a_0; \end{cases} \tag{6.112}$$

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Suponha que f seja um polinômio do terceiro grau. Então o coeficiente angular da reta secante é m*

$$\begin{cases} f(x) = a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0; \\ f(a) = a_0; \\ m = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ = \frac{a_3\Delta x^3 + a_2\Delta x^2 + a_1\Delta x}{\Delta x} = \\ = a_3\Delta x^2 + a_2\Delta x + a_1; \\ \Delta x \text{ uma sequência nula} \quad \Rightarrow \quad a_3\Delta x^2 + a_2\Delta x + a_1 \to a_1 \end{cases} \tag{6.113}$$

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Suponha que g seja um polinômio do terceiro grau e que Δx seja uma sequência nula, que convirja para zero. Então*

$$\begin{cases} g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x} = \frac{a_3(a+\Delta x)^3 + a_2(a+\Delta x)^2 + a_1(a+\Delta x) + a_0 - g(a)}{\Delta x} = \\ = \frac{a_3(3a^2\Delta x + 3a\Delta x^2 + \Delta x^3) + a_2(2a\Delta x + \Delta x^2) + a_1\Delta x}{\Delta x} = \\ = 3a_3a^2 + 3a_3a\Delta x + a_3\Delta x^2 + 2a_2a + a_2\Delta x + a_1 \to 3a_3a^2 + 2a_2a + a_1; \\ g'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1; \end{cases} \tag{6.114}$$

---

27. <u>*cálculo do limite*</u>

Se dadas duas sucessões, s_k e t_k a sucessão $s_k - t_k$ tiver limite zero então estas duas sucessões são equivalentes o que significa

(a) *ambas têm o mesmo limite,*

(b) *se uma delas não tiver limite, então a outra também não tem limite.*

O primeiro caso é interessante porque permite que se façam cálculos aritméticos para construir sucessões equivalentes a partir do que se pode deduzir o limite duma determinada sucessão. Esta questão usa esta técnica.

(2) (V)[ ](F)[ ] *A sequência de cálculos*

$$s_k = \frac{k^3+3k^2+k+1}{4k^3} = \frac{k^3}{4k^3} + \frac{3k^2}{4k^3} + \frac{+k}{4k^3} + \frac{1}{4k^3} \quad (6.115)$$
$$\frac{1}{4k^3} \to 0; \quad (6.116)$$
$$\frac{+k}{4k^3} = \frac{1}{4k^2} \to 0; \quad (6.117)$$
$$\frac{3k^2}{4k^3} = \frac{3}{4k} \to 0; \quad (6.118)$$
$$\frac{k^3}{4k^3} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}; \quad (6.119)$$

A seta, ao final das contas, significa "tem limite". O limite da sucessão s_k é $\frac{1}{4}$ ou

$$s_k \to \frac{1}{4};$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se dois polinômios P, Q forem de grau n tal que*

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + \dots \\ Q(x) = b_n x^n + \dots \end{cases} \quad (6.120)$$

então o limite da sucessão $\frac{P(k)}{Q(k)}$ é $\frac{a_n}{b_n}$. Não se confunda, n, a_n, b_n são constantes.

(5) (V)[ ](F)[ ] *O limite da sucessão*

$$\frac{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340}{5k^5} \quad (6.121)$$

é $\frac{3}{5}$

(7) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão*

$$\frac{5k^4}{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340} \quad (6.122)$$

tem limite zero.

(11) (V)[ ](F)[ ] *A sucessão*

$$\frac{3k^5 + 10k^4 + 200k^3 + 2430k^2 + 5302k + 340}{5k^4} \quad (6.123)$$

tem limite zero.

---

28. *cálculo do limite Analise os cálculos e decida quais das sucessões definidas nas opções seguintes, tem limite.*

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t}; \quad (6.124)$$
$$s_k = \frac{3t^2}{9t^2+3t} + \frac{3t}{9t^2+3t} + \frac{1}{9t^2+3t}; \quad (6.125)$$
$$s_k = \frac{3}{9+\frac{3}{t}} + \frac{3}{9t+3} + \frac{1}{9t^2+3t}; \quad (6.126)$$

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$s_k = \frac{3t^{20}+3t+1}{7t^{20}+3t}; \tag{6.127}$$

$$s_k = \frac{3t^{20}}{7t^{20}+3t} + \frac{3t}{7t^{20}+3t} + \frac{1}{7t^{20}+3t}; \tag{6.128}$$

$$s_k = \frac{3}{7+\frac{3}{t^{19}}} + \frac{3}{7t^{19}+3} + \frac{1}{7t^{20}+3t}; \tag{6.129}$$

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$s_k = \frac{3t^9+3t+1}{20t^{10}+3t^3}; \tag{6.130}$$

$$s_k = \frac{3t^9}{20t^{10}+3t^3} + \frac{3t}{20t^{10}+3t^3} + \frac{1}{20t^{10}+3t^3}; \tag{6.131}$$

$$s_k = \frac{3}{20t+\frac{3}{t^6}} + \frac{3}{20t^9+3t^2} + \frac{1}{20t^{10}+3t^3}; \tag{6.132}$$

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$s_k = \frac{10t^7+3t+1}{t^5+3t^2}; \tag{6.133}$$

$$s_k = \frac{10t^2}{1+3t^{-3}} + \frac{3}{t^4+3t} + \frac{1}{t^5+3t^2}; \tag{6.134}$$

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$s_k = \frac{3t^4+3t+1}{5t^2+3t}; \tag{6.135}$$

$$s_k = \frac{3t^4}{5t^2+3t} + \frac{3t}{5t^2+3t} + \frac{1}{5t^2+3t}; \tag{6.136}$$

$$s_k = \frac{3t^2}{5+3t^{-1}} + \frac{3}{5t+3} + \frac{1}{5t^2+3t}; \tag{6.137}$$

<u>**gabarito:**</u>

29. <u>*cálculo do limite*</u> *Decida quais das opções abaixo é verdadeira. Observe que há dois conceitos* diferentes *e* independentes*:*

- <u>*uma sucessão é limitada*</u>*, então ela fica entre duas retas paralelas ao eixo* OX*,*
- <u>*uma sucessão tem limite*</u>*, então ela se aproxima arbitrariamente duma reta paralela ao eixo* OX*.*

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *a sucessão* $s_k = \frac{3t^{20}+3t+1}{9t^{20}+3t}$ *é limitada e tem limite* $\frac{3}{9}$.

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *a sucessão* $s_k = \frac{3t^2+3t+1}{7t^2+3t}$ *é limitada e tem limite* $\frac{3}{7}$.

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *a sucessão* $s_k = \frac{3t^5+3t+1}{20t^5+3t^3}$ *é limitada e tem limite* $\frac{3}{20}$.

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *a sucessão* $s_k = \frac{10t^5+3t+1}{t^5+3t^2}$ *é limitada e tem limite* 10.

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *a sucessão* $s_k = \frac{300t^{400}+3t+1}{50t^{400}+3t}$ *é limitada e tem limite* 6.

<u>**gabarito:**</u>

30. <u>*cálculo do limite*</u>

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> $s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t}$ *então*

$$\lim_{k=\infty} s_k = 0 \tag{6.138}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] $s_k = \frac{3t^2+3t+1}{9t^2+3t}$ *então*

$$\lim_{k=\infty} s_k = \frac{3}{9} \tag{6.139}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] $s_k = \frac{3t^9+3t+1}{21t^9+3t^3}$ *então*

$$\lim_{k=\infty} s_k = \frac{1}{7} \tag{6.140}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] $s_k = \frac{10t^5+3t+1}{t^7+3t^2}$ *então*

$$\lim_{k=\infty} s_k = 0 \tag{6.141}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] $s_k = \frac{3t^4+3t+1}{5t^2+3t}$ *então*

$$\lim_{k=\infty} s_k = \infty \tag{6.142}$$

gabarito:

31. *cálculo do limite Considere a função*

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} \tag{6.143}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] f *está definida para todos os números reais.*

(3) (V)[ ](F)[ ] f *não está definida para* $x = 2$.

(5) (V)[ ](F)[ ] *Considere a sucessão* $s_k = 2 + \frac{1}{k}$.

$$\frac{1}{k} \to 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + \frac{1}{k} \to 2 + 0 = 2; \tag{6.144}$$

Os cálculos mostram que s *converge para* 2.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Considere a sucessão* $t_k = \frac{2k+3}{k+4}$

$$\frac{2k+3}{k+4} = \frac{2k}{k+4} + \frac{3}{k+4}; \tag{6.145}$$

$$\frac{2k}{k+4} = \frac{2}{1+\frac{4}{k}}; 1 + \frac{4}{k} \to 1; \frac{2}{1+\frac{4}{k}} \to 2; \tag{6.146}$$

$$\frac{3}{k+4} \to 0; \tag{6.147}$$

$$\frac{2k+3}{k+4} \to 2 + 0 = 2 \tag{6.148}$$

Os cálculos mostram que t *converge para* 2.

(11) (V)[ ](F)[ ] *Aplicando a função* f *à sucessão* $s_k = 2 + \frac{1}{k}$ *resulta numa nova sucessão* $r_k = f(s_k)$.

$$r_k = f(s_k) = \frac{3}{(s_k-2)^2}; \tag{6.149}$$

$$s_k \to 2 \quad \Rightarrow \quad s_k - 2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad (s_k-2)^2 \to 0; \tag{6.150}$$

$$\tag{6.151}$$

Os cálculos mostram que a sucessão $r_k = f(s_k)$ não tem limite*, porque o* limite do denominador *é zero, e também* não é limitada*, também porque o* limite do denominador *é zero.*

gabarito:

32. *continuidade*

Definição 12 (continuidade) *sequencial*

Se diz que uma função é contínua, ou sequencialmente contínua *quando ela* preserva convergência de sucessões, *se para* uma sucessão qualquer,

$$\begin{cases} \left(\forall s; \lim_{k=\infty} s_k = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{k=\infty} f(s_k) = f(a)\right); \\ (\forall s; s_k \to a)\,(f(s_k) \to f(a)); \\ \left(f(\lim_{k=\infty} s_k) = \lim_{k=\infty} f(s_k)\right); \end{cases} \tag{6.152}$$

As três expressões na equação (eq.152) são idênticas, na última você vê o trocadilho "f do limite é o limite da *f", expressando que o símbolo f* comuta *com símbolo do limite. Se este último limite não existir, para alguma sucessão, então f não é contínua. As funções* contínuas *são aquelas que* preservam limite. *As* sucessões convergentes de números racionais *são os números reais.*

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \tag{6.153}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] f é uma função continua definida em toda a reta real.

(3) (V)[ ](F)[ ] f não está definida no ponto $x = 1$.

(5) (V)[ ](F)[ ] f não é contínua no ponto $x = 1$.

(7) (V)[ ](F)[ ] f preserva convergência em qualquer ponto da reta.

(11) (V)[ ](F)[ ] Como $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 2x+3$ se $x \neq 1$, então eu posso "redefinir" f com a equação

$$g(x) = \begin{cases} x \neq 1 & \Rightarrow \quad f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \\ x = 1 & \Rightarrow \quad g(1) = 5 = 2x+3|_{(x=1)}; \end{cases} \tag{6.154}$$

g é contínua, mas $f \neq g$.

gabarito:

Este tipo de exemplo é muito usado para mostrar que existem funções que não são contínuas, *embora eles deixem as alunas com impressão que* descontinuidade *é um* truque *para ser usado em provas.*

33. *Limite de sucessões Considere as funções*

$$f_1(x) = \frac{3}{(x-2)^2}; \tag{6.155}$$

$$f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8; \tag{6.156}$$

$$f_3(x) = x^2 - 4; \tag{6.157}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] A função f_3 está definida para qualquer número real.

(3) (V)[ ](F)[ ] A função f_1 está definida para qualquer número real.

(5) (V)[ ](F)[ ] A função f_2 está definida para qualquer número real.

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *s é uma sucessão convergindo para* 2,

$$\lim_{k=\infty} s_k = 2 \tag{6.158}$$

então $\lim_{k=\infty} f_1(s_k)$ *não existe.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *A função* f_2 *ao ser aplicada à sucessão* $s = (s_k)$ *produz uma nova sucessão* $t_k = f(s_k)$. *Os cálculos seguintes mostram que a sucessão* t_k *converge para zero,*

$$f_2(s_k) = s_k^3 - 6s_k^2 + 12s_k - 8; \tag{6.159}$$

$$s_k^3 \to 2^3 = 8; -6s_k^2 \to= -6 * 2^2 = -24; 12s_k \to 12 * 2 = 24 \tag{6.160}$$

$$s_k^3 - 6s_k^2 + 12s_k - 8 \to 8 - 24 + 24 + 8 = 0; \tag{6.161}$$

$$\lim_{k=\infty} f_2(s_k) = 0; \tag{6.162}$$

porque $s = (s_k) \to 2$ *e* $f(2) = 0$.

gabarito:

34. *área limitada pelo gráfico Um móvel se desloca à velocidade constante de 20 km/h a partir dum certo instante. O gráfico na figura (6.5), página 69, mostra descreve a velocidade do móvel ao longo do tempo.*

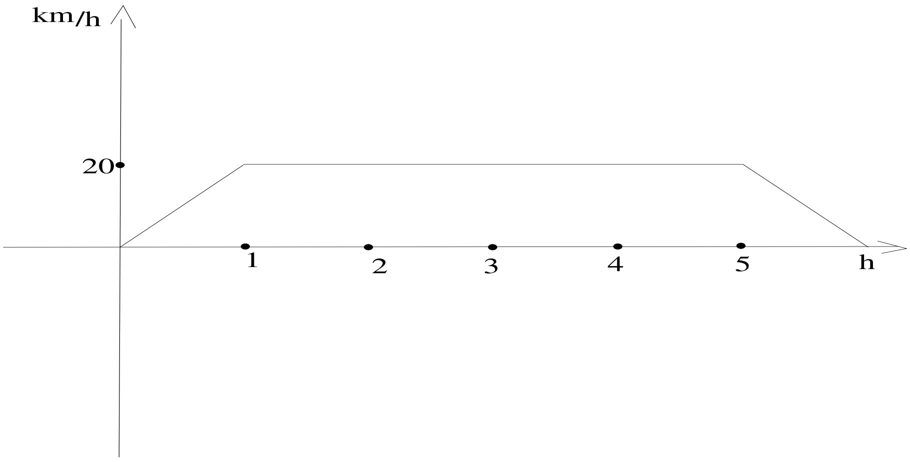


Figura 6.5: velocidade contra tempo

(2) *(V)[ ](F)[ ]* *A velocidade do móvel é constante.*

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *A velocidade do móvel cresce uniformemente desde zero até atingir a velocidade constante de 20km/h.*

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *O móvel para, abruptamente, ficando com velocidade zero após 5 horas de percurso.*

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *A velocidade do móvel decresce uniformemente para zero após 5 horas de percurso.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *A distância percorrida pelo móvel corresponde à área delimitada pelo gráfico na figura (6.5), página 69, é 60 km.*

gabarito:

---

35. *oscilador e limite* *Suponha que um móvel esteja instalado num trilho eletromagnético dentro duma urna de vidro hermeticamente fechada com vácuo. Na posição inicial do móvel se encontra uma* "placa" *indicando* "Fim da linha".

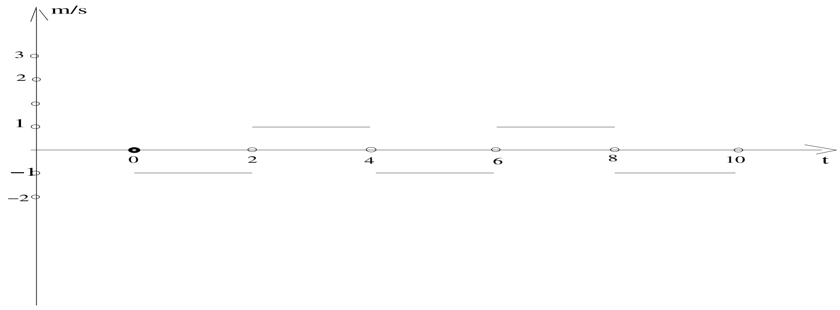


Figura 6.6: velocidade contra o tempo

Suponha, além disto, que o móvel seja imantado de modo que quando o trilho for eletrificado o móvel deslize sobre o mesmo sem atrito e que seja possível imprimir-lhe movimento externamente com auxílio duma alavanca devidamente calibrada de modo que ele atinja instantaneamente *a velocidade de $1m/s$, sempre partindo do* "Fim da linha" *para percorrer o trilho que mede 2m. Em cada extremo do trilho se encontra um material* perfeitamente elástico *de modo que móvel ao bater nestes anteparos reverte o sentido da velocidade sem perder energia cinética.*

Ao começar a experiência sempre se inicializa o contador do tempo de modo que o $t_0 = 0$, a condição inicial, e o móvel volta automaticamente para a posição "Fim da linha" *que é a* condição inicial *do experimento.*

Seja $v(t)$ a função que descreve a velocidade do móvel dentro da urna com vácuo em movimento sobre o trilho.

(2) *(V)[ ](F)[ ]*
A figura (fig 6.6), página 70, traz o gráfico da velocidade v do móvel.

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *A velocidade v do móvel é uma função descontínua de segunda espécie (a continuidade não é restaurável).*

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *Suponha que o trilho onde se se movimenta o móvel tenha comprimento 2m entre os batentes. A velocidade v tem um salto a cada 2 minutos.*

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *Suponha que o trilho onde se se movimenta o móvel tenha comprimento 2m entre os batentes. A velocidade v tem um salto a cada 2 segundos.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *Em quatro minutos o móvel percorre a distância zero metros.*

gabarito:

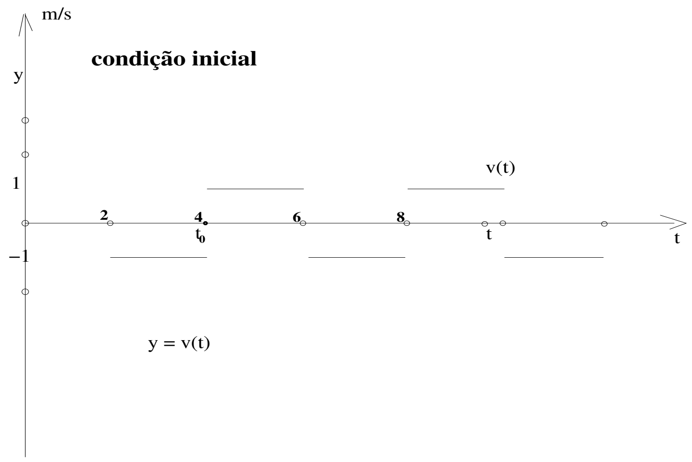


Figura 6.7: condição inicial

36. <u>*função primitiva*</u> *Considere a figura (fig 6.7), página 71, contendo gráfico da velocidade contra o tempo dum trem* oscilando *sobre um trilho magnético descrito na questão 35. A* área *limitada pelo gráfico da velocidade $y = v(t)$ e o eixo dos tempos é a* distância percorrida *pelo trem, é uma função do tempo*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(x)dx; \tag{6.163}$$

O símbolo na equação (eq.163) é chamado de integral *e representa a* área *limitada pelo gráfico da função $y = v(t)$ e pelo eixo Ot entre dois pontos dados, t_0, t em que o primeiro ponto, t_0, é chamado de* condição inicial.

(2) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A área que define $y = s(t)$ é formada de áreas de retângulos.*

(3) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.7), página 71, então*

$$s(6) = 2m \tag{6.164}$$

(5) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.7), página 71, então*

$$s(8) = 0 \tag{6.165}$$

*significando isto que o trem está volta na extremidade inicial do trilho, onde se encontra a placa "1*Fim da linha*".*

(7) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se $t_0 = 4$ como indica a (fig 6.7), página 71, então*

$$s(9) = 1m \tag{6.166}$$

(11) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O gráfico da* função-distância*, $y = s(t)$, que aparece na figura (fig 6.8), página 72, é uma* função contínua.

<u>**gabarito:**</u>

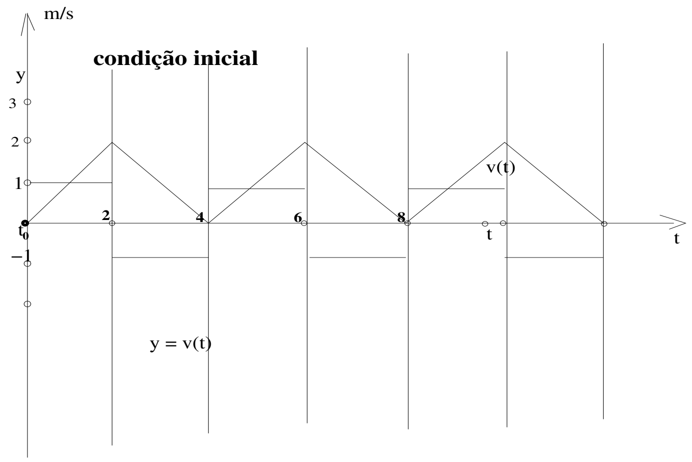


Figura 6.8: movimento oscilatório

37. *soma dos quadrados*

O binômio de Newton *pode ajudar nos cálculos e as linhas do triângulo de Pascal mostram os coeficientes do binômio em cada linha. Até a terceira linha é*

1				$(a+b)^0 = 1$
1	*1*			$(a+b)^1 = 1a + 1b$
1	*2*	*1*		$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1	*3*	*3*	*1*	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

que é o necessário para esta questão.

Uma progressão aritmética é uma sucessão cujos termos são definidos por um polinômio do primeiro grau. A soma dos termos p.a. é dada por um polinômio do segundo grau:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k} P(i) = \frac{k+1}{2}k = Q_2(k); \qquad (6.167)$$

em que Q_2 é um polinômio do segundo grau.

Hipótese 1 (Conjectura:) *(somas de potências) Assim posso fazer a* conjectura *"a soma dos quadrados dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do terceiro grau.":*

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = Q_3(k);\ \textit{grau de } Q_3 \textit{ é } 3; \qquad (6.168)$$

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_3 neste caso em que a p.a. tem razão 1. A metodologia não seria diferente para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.

Considere um polinômio do terceiro grau

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; \tag{6.169}$$

(2) *(V)[ ](F)[ ] O polinômio Q_3 fica completamente determinado por quatro valores dados.*

Solução 1 *Dados os valores de $Q(0), Q(1), Q(2), Q(3)$, ou qualquer outra sequência de 4 valores de Q, posso montar um sistema de quatro equações a quatro incógnitas que são os coeficientes do polinômio.*

---

(3) *(V)[ ](F)[ ] quatro valores assumidos por Q_3 são insuficientes para o determiná-lo.*

(5) *(V)[ ](F)[ ] O sistema de equações*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{1} i^2 = Q_3(1) - Q_3(0) = 1; \\ \sum_{i=0}^{2} i^2 = Q_3(2) - Q_3(0) = 5; \\ \sum_{i=0}^{3} i^2 = Q_3(3) - Q_3(0) = 14; \\ \sum_{i=0}^{4} i^2 = Q_3(4) - Q_3(0) = 30; \end{array} \right. \tag{6.170}$$

permite de calcular os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 de Q_3.
porque

$$\sum_{i=0}^{4} i^2 = Q_3(4)-Q_3(3)+Q_3(3)-Q_3(2)+Q_3(2)-Q_3(1)+Q_3(1)-Q_3(0) = Q_3(4)-Q_3(0);$$

(7) *(V)[ ](F)[ ] O sistema de equações que me permite calcular os coeficientes do polinômio $Q_3(x)$ é*

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 1; \\ Q_3(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 5; \\ Q_3(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 & = 14; \\ Q_3(5) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 & = 30; \end{array} \right. \tag{6.171}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 & = 14 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 & = 30; \end{array} \right. \tag{6.172}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}; \tag{6.173}$$

cuja solução é

$$\left(\ a_0 = 0; \quad a_1 = \tfrac{1}{6}; \quad a_2 = \tfrac{1}{6}; \quad a_3 = \tfrac{1}{3}; \ \right) \tag{6.174}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = Q_3(k) = \frac{k + 3k^2 + 2k^3}{6} \tag{6.175}$$

gabarito:

38. *área, integral, Soma de Riemann* *Considere a função $f(x) = x^2$. O símbolo*

$$I = \int_0^1 f(x)dx \tag{6.176}$$

designa a integral desta função *relativamente ao intervalo* $[0, 1]$ *e pode ser calculado aproximadamente usando-se somas de Riemann. As somas de Riemann formam sucessões S_k que produzem uma aproximação com k retângulos e se*

$$\lim_{k=\infty} S_k = I \tag{6.177}$$

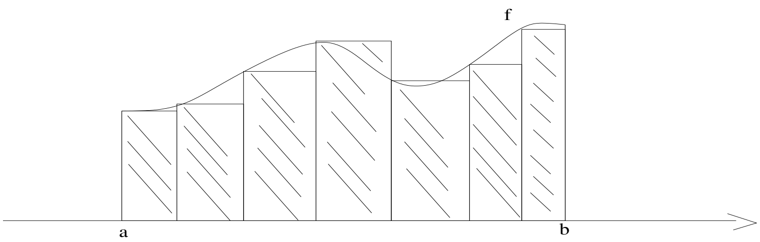
existir para as todas as possíveis somas de Riemann então I é um número, a integral existe. Esta lista vai trabalhar com um caso particular de somas de Riemann, *as* somas de Riemann uniformes *quando o intervalo é dividido em partes iguais. Notação:*

$$\Delta x = \tfrac{1}{k} = \tfrac{1-0}{k}; \tag{6.178}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x; \tag{6.179}$$

$$I = \lim_{k=\infty} S_k = \int_0^1 f(x)dx; \tag{6.180}$$

A figura (6.9), página 74, lhe mostra o efeito de aproximar a área limitada pelo gráfico



Aproximação da integral com áreas de retângulos

Figura 6.9:

dum função e pelo eixo OX.

Na equação (eq.178) eu defini o salto Δx *que é a base dos retângulos para o cálculo aproximado da área sob a curva. Na equação (eq.179) eu defini a soma das áreas dos retângulos com que vou* calcular aproximadamente *a área sob a curva. Na equação (eq.180) eu estou fazendo referência ao limite da sucessão S_k que é o símbolo da integral* $\int_0^1 f(x)dx$*.*

As somas de Riemann *definem sucessões cujo limite, se existirem, é a integral da função associada.*

(2) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \cdots + 81\Delta x^3 + 100\Delta x^3 = 0.285 \quad (6.181)$$

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \cdots + 81\Delta x^3 = 0.285 \quad (6.182)$$

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x) = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \Delta x^2; \quad (6.183)$$

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$S_k = \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \quad (6.184)$$

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

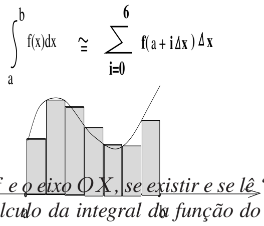
$$\Delta x = \frac{1}{k}; S_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3}; \quad (6.185)$$

e como é conhecida a soma dos quadrados dos números naturais*, dada por um polinômio do terceiro, então é possível calcular* $\lim_{k=\infty} S_k$.

<u>gabarito:</u>

39. *<u>somas de potências, soma de Riemann</u>*

O símbolo



$$\int_a^b f(x)dx \quad (6.186)$$

representa a área algébrica limitada pelo gráfico da função f e o eixo OX, se existir e se lê "integral de f entre a, b". O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo da integral da função do segundo grau. Inicia com o valor aproximado obtido com uma soma de Riemann seguido dum cálculo de limite. A figura (fig 39), página 75, é uma interpretação gráfica da expressão da soma de Riemann em que foi feita uma divisão com 7 retângulos para o cálculo aproximado da integral da função f. Com um programa, por exemplo,

```
define f(x) {
        returnpower(x,2);
}


define SomaRiemann(a,b,k) {
        local soma=0,        i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
        for (i=0;            i<k; i++) soma += f(i*deltax);
        return               soma*deltax;
}


print SomaRiemann(0,1,1000);
```

programa em `calc`, linguagem livremente distribuída na Internet.

Executando a última linha vai resultar em 0.3328335 *que é valor aproximada da integral* $\int\limits_0^1 x^2 dx$ *com mil subdivisões do intervalo* $[0,1]$. *O programa recebe os parâmetros* `a,b,n`, *correspondendo ao início, fim do intervalo e o número* n *de subintervalos a serem considerados. Troque a equação da função e rode o programa para calcular, aproximadamente, outras integrais. Aumente o valor de* n *para obter melhor aproximação, mas não exagere porque pode aumentar excessivamente o tempo de processamento. Você pode baixar um programa para cálculo aproximado de integrais neste local [Pra07, programas].*

- *Com* $k = 10000000$,
- *obtive o resultado* $I = 0.333333283333335$,
- *em aproximadamente* `2m52.211s` *minutos de processamento.*

(2) (V)[ ](F)[ ] A soma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{9} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = 1/10; \tag{6.187}$$

calcula, aproximadamente, com 10 subdivisões.

(3) (V)[ ](F)[ ] Aplicando a propriedade distributiva o programa pode ser otimizado, e aqui você um interessante desta propriedade da aritmética. A soma de Riemann da equação (eq.187) anterior fica

$$\Delta x \sum_{i=0}^{9} f(i\Delta x); \Delta x = 1/10; \tag{6.188}$$

transferindo Δx *para fora do somatório. É o método que está sendo usado no programa 3. O programa primeiro calcula todas as alturas e depois multiplica a soma por* Δx.

(5) (V)[ ](F)[ ] Sendo $f(x) = x^2$ *a soma de Riemann para o cálculo aproximado da integral* $\int\limits_0^1 f(x)dx$ *fica*

$$\Delta x^3 \sum_{i=0}^{10} i^2; \Delta x = 1/10; \tag{6.189}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] Como $\Delta x = \frac{1}{10}$ *a expressão da soma de Riemann na equação (eq.189) pode ser escrita como*

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=0}^{9} i^2 = \frac{\sum\limits_{i=0}^{10} i^2}{1000} \tag{6.190}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] Posso expressar todos os cálculos da aproximação usando símbolos:

$$I \approx \int\limits_0^1 x^2 dx; \Delta x = \tfrac{1}{k}; \tag{6.191}$$

$$I = \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3}; \tag{6.192}$$

$$I = \frac{Q_3(k)}{k^3} = \frac{a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3}{k^3}; \tag{6.193}$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1 k}{k^3} + \frac{a_2 k^2}{k^3} + \frac{a_3 k^3}{k^3}; \tag{6.194}$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1}{k^2} + \frac{a_2}{k} + a_3; \tag{6.195}$$

Todos os termos na última equação (eq. 195), têm limite nulo, exceto o último que não depende de k portanto o seu limite é a_3 então

$$\int_0^1 x^2 dx = a_3 = \frac{1}{3} \tag{6.196}$$

e foi este valor que foi encontrado rodando o programa, aproximadamente.

gabarito:

40. somas de potências, soma de Riemann

O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo "exato" da integral da função quadrática $f(x) = x^2$ sobre qualquer intervalo $[a, b]$. Vou construir uma soma de Riemann relativa a um intervalo qualquer transformando em simbólicas as expressões. O programa que aparece na questão 39 já opera simbolicamente *e pode ser usado para sua compreensão desta questão.*

a exatidão é um mito, assim como a perfeição!

Para calcular a integral

$$\int_a^b x^2 dx \tag{6.197}$$

vou dividir o intervalo $[a, b]$ em k subintervalos de mesma medida, então $\Delta x = \frac{b-a}{k}$. A figura (fig. 39), página 75, representa a subdivisão do intervalo em 7 subintervalos de mesma medida e a sucessão de retângulos tem por altura o valor de f no início de cada subintervalo. Isto pode ser alterado, desde que seja feito de forma consistente, então é possível escrever duas expressões para a soma de Riemann:

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.198}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.199}$$

Na primeira, equação (eq.198), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no início de cada subintervalo, e na segunda, equação (eq.199), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no final de cada subintervalo.

*E há outras variantes, o que não é tão importante discutir agora. Vou me fixar, daqui para frente na primeira expressão, que aparece na equação (eq.198). Esta é a formulação que dei aos programas. Você pode encontrar programas similares em [Pra07, *.calc]*

Nesta questão há itens falsos, mas então o item verdadeiro, também, estará presente.

(2) (V)[ ](F)[ ] *Uma* soma de Riemann *que calcula um valor aproximado para a integral $\int_a^b f(x)dx$ é*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.200}$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \tag{6.201}$$

e expressão na equação (eq.201) foi deduzida usando a propriedade distributiva do produto relativamente à soma.

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Uma* soma de Riemann *que calcula um valor aproximado para a integral* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *é*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.202}$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \tag{6.203}$$

e expressão na equação (eq.203) foi deduzida usando a propriedade associativa da soma.

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Sendo* $f(x) = x^2$ *então*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.204}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \tag{6.205}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2\right) \Delta x; \tag{6.206}$$

$$I = ka^2 + 2a\Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \tag{6.207}$$

pela definição de f*, pelo uso do produto notável "quadrado da soma" e porque o termo constante* a^2 *está sendo somado* k *vezes.*

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Sendo* $f(x) = x^2$ *então*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{6.208}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \tag{6.209}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2\right) \Delta x; \tag{6.210}$$

$$I = ka^2\Delta x + 2a\Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \tag{6.211}$$

$$I = a^2(b-a) + 2a(\tfrac{b-a}{k})^2 \tfrac{(k-1)k}{2} + \Delta x^3 Q_3(k-1); \tag{6.212}$$

pela definição de f*, pelo uso do produto notável "quadrado da soma" e pela propriedade associativa da soma, pela definição de* Q_3 *na questão 39.*

Solução 2

$$I = a^2(b-a) + 2a(\tfrac{b-a}{k})^2\tfrac{(k-1)k}{2} + \Delta x^3 Q_3(k-1); \quad (6.213)$$
$$I \to a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.214)$$
$$= a^2b - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.215)$$
$$= +ab^2 - a^2b + \Delta x^3 Q_3(k-1) = \quad (6.216)$$
$$= ab^2 - a^2b + \tfrac{(b-a)^3}{k^3} Q_3(k-1) = \quad (6.217)$$
$$= ab^2 - a^2b + \tfrac{(b-a)^3}{3} = \quad (6.218)$$
$$= ab^2 - a^2b + \tfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.219)$$
$$= \tfrac{3ab^2-3a^2b+b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.220)$$
$$= \tfrac{b^3-a^3}{3}; \checkmark \quad (6.221)$$

---

(11) (V)[ ](F)[ ] *Sendo* $f(x) = x^2$ *então*

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{k}; I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a+i\Delta x)\Delta x; = \sum_{i=0}^{k-1}(a+i\Delta x)^2\Delta x; \quad (6.222)$$
$$I = \sum_{i=0}^{k-1}\left(a^2\Delta x + 2ai\Delta x^2 + i^2\Delta x^3\right); \quad (6.223)$$
$$I = ka^2\Delta x + 2a\Delta x^2\sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \quad (6.224)$$
$$I = ka^2\tfrac{b-a}{k} + 2a(\tfrac{b-a}{k})^2\tfrac{(k-1)k}{2} + (\tfrac{b-a}{k})^3 Q_3(k-1); \quad (6.225)$$
$$I = a^2(b-a) + a(b-a)^2\tfrac{k-1}{k} + (\tfrac{b-a}{k})^3\tfrac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6} \quad (6.226)$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{k=\infty} a^2(b-a) = a^2(b-a); \\ \lim\limits_{k=\infty} a(b-a)^2\tfrac{k-1}{k} = a(b-a)^2; \\ \lim\limits_{k=\infty} (\tfrac{b-a}{k})^3\tfrac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6} = \tfrac{(b-a)^3}{3}; \end{cases} \quad (6.227)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \quad (6.228)$$
$$= \tfrac{3a^2(b-a)}{3} + \tfrac{3a(b-a)^2}{3} + \tfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.229)$$
$$= \tfrac{3a^2b-3a^3}{3} + \tfrac{3ab^2-6a^2b+3a^3}{3} + \tfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \quad (6.230)$$
$$= \tfrac{b^3-a^3}{3} \quad (6.231)$$

em que Q_3 *é o polinômio que fornece a soma dos quadrados dos número naturais desde zero até* $k-1$ *definido na questão 37. Na equação (eq.226) tenho que calcular o limite quando* k *cresce indefinidamente ao longo dos números naturais e isto foi feito na equação (eq.227). Depois somei os limites usando a regra, "limite da soma é a soma dos limites" o que resulta na equação (eq.231)*

gabarito:

Solução 3 *A expressão na equação (eq.231) precisa ser analisada, ela é a diferença de dois valores duma mesma função:* $F(x) = \frac{x^3}{3}$. *Repetindo, com* *outras palavras,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); F(x) = \frac{x^3}{3}; \tag{6.232}$$

Esta expressão vai aparecer em todas as integrais, a equação (eq.232), é o Teorema Fundamental do Cálculo *e representa o "método exato" para calcular integrais. F se diz uma* primitiva *de f e posteriormente vamos ver que f é a derivada de F. O artigo indefinido num dos sentidos se justifica porque qualquer constante que somarmos a F representa uma outra primitiva e pode ser colocada na (eq.232) e neste momento uma razão simples, que não é a fundamental, porque a (eq.232) é uma diferença, então se $G(x) = F(x)+C$ não fica alterada a (eq.232). Mais adiante você vai ver que há uma razão mais forte para que G também seja uma primitiva de f, ou como se costuma dizer, uma primitiva de f é $F + C$.*

$$\textit{uma primitiva de } f(x) = x^2 \textit{ é } F(x) = \frac{x^3}{3} + C \tag{6.233}$$

em que C é uma constante qualquer.

E o poder está chegando às suas mãos! Será possível também derrubar a ditadura!

Altere no programa

```
define f(x) {
    returnsin(x);
}


a = 0; b = 4*atan(1) ≈ π print b;

define SomaRiemann(a,b,k) {
    local soma=0,        i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
    for (i=0;            i<k; i++) soma += f(i*deltax);
    return               soma*deltax;
}


print SomaRiemann(a,b,10000);
```

Repita usando agora $f(x) = \cos(x)$. Faça os gráficos destas funções e procure entender o que aconteceu.
Mas sobretudo, se convença de que agora *você* sabe *calcular muitas integrais* aproximadamente *e mais para frente também será capaz de calcular muitas delas, exatamente.*

---

41. *somas de potências, soma de Riemann, limite* *Esta questão vai repetir as questões 37, 39 e 40 com o objetivo de calcular exatamente a integral $\int_a^b x^3 dx$ em que $[a, b]$ é um intervalo da reta. A metodologia é exatamente a mesma, apenas envolvendo agora a soma dos cubos. Para isto vou expandir a conjectura feita na questão 37, a hipótese 1, afirmando*

Hipótese 2 (Conjectura:) *(somas de potências) Assim posso expandir a conjectura sobre somas de quadrados fazendo a* conjectura *"a soma dos cubos dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do quarto grau.":*

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1);\ \text{grau de } Q_4 \text{ é } 4; \tag{6.234}$$

Notação: Vou padronizar a notação:

- $\sum\limits_{i=0}^{k-1} i = Q_2(k-1)$, *o grau de* Q_2 *é* 2.
- $\sum\limits_{i=0}^{k-1} i^2 = Q_3(k-1)$, *o grau de* Q_3 *é* 3.
- $\sum\limits_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1)$, *o grau de* Q_4 *é* 4.

Esta conjectura é um teorema e pode ser demonstrada para qualquer potência.

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_4 neste caso em que a p.a. tem razão 1. A metodologia não seria diferente para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.

(2) (V)[ ](F)[ ] O sistema de equações

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(0) = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{1} i^3 = Q_4(1) = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(2) = 9; \\ \sum\limits_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(3) = 36; \\ \sum\limits_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(4) = 100; \end{cases} \tag{6.235}$$

determina

$$Q_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4; \tag{6.236}$$

Solução 4

$$Q_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{6.237}$$
$$a_0 = 0 \tag{6.238}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \tag{6.239}$$
$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 = 9 \tag{6.240}$$
$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4 = 36 \tag{6.241}$$
$$a_0 + 4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + 4^4a_4 = 100 \tag{6.242}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix}; \tag{6.243}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 12 \end{array}\right); \tag{6.244}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \\ 42 \\ 12 \end{pmatrix}; \tag{6.245}$$
$$a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = \tfrac{1}{4}; a_3 = \tfrac{1}{2}; a_4 = \tfrac{1}{4}; \tag{6.246}$$
$$Q_4(x) = \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{x^4}{4}; \tag{6.247}$$
$$Q_4(x) = \tfrac{x^2+2x^3+x^4}{4} \tag{6.248}$$

$$Ax = a; B = QA; b = Qa; \tag{6.249}$$
$$x = A^{-1}a; B^{-1} = A^{-1}Q^{-1}; \tag{6.250}$$
$$x = A^{-1}a = B^{-1}b = A^{-1}Q^{-1}b = a; \tag{6.251}$$
$$B^{-1}b = a; \tag{6.252}$$

em que na última equação você encontra a razão de ser da matriz triangular B*, ela me dá a mesma solução que a matriz original* A*. Ou ainda, o sistema equações que obtive ao triangularizar a matriz original é* equivalente ao sistema de equações original. *Mas agora se tem uma melhora fundamental, quando eu escrevi*

$$x = A^{-1}a; \tag{6.253}$$

estou supondo que eu consigo inverter a matriz A *o que em geral é uma operação de alto custo computacional porque envolve o cálculo do* $\det(A)$ *com* $n!$ *operações, ao passo que a triangularização da matriz* A *envolve apenas* $\frac{(n+1)n}{2}$ *operações que são as combinações lineares sucessivas das linhas da matriz* A *com o objetivo de anular todas as linhas abaixo da diagonal resultando num sistema equivalente ao sistema original. Eu usei uma função definida em*